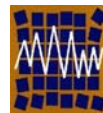




Universidad de Concepción
Departamento de Ingeniería Civil



Asociación Chilena de Sismología e
Ingeniería Antisísmica

Nº A10-02. APLICACIÓN DEL BEM A PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN Y AISLACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN EL PLANO.

A.R. Castro¹ y P.E. Oyarzún²

1.- Ing. Civil Mención Estructuras UC, MSc. Ing. Civil Mención Estructuras COPPE Río de Janeiro,
Instituto de Obras Civiles, Universidad Austral de Chile,
General Lagos 2086, Valdivia, Chile
e-mail: acastro@uach.cl

2.- Ing. Civil en Obras Civiles UACH,
Instituto de Obras Civiles, Universidad Austral de Chile,
General Lagos 2086, Valdivia, Chile
e-mail: pablooyarzun@uach.cl

RESUMEN

En el presente trabajo se ha implementado la ecuación de elastodinámica bidimensional mediante el método de elementos de contorno (BEM), el que resulta ser una útil herramienta matemática para resolver problemas de propagación de ondas en medios infinitos o semi-infinitos. El truncamiento de la región o dominio involucrado en el problema, necesario en otras técnicas numéricas tales como diferencias finitas y elementos finitos, tienden a distorsionar los resultados debido a la reflexión y refracción de las ondas elásticas que se producen en dichas zonas de truncamiento. Debido a esto, una importante aplicación del BEM consiste en formular el problema del aislamiento de vibraciones en estado estacionario, basado en las ecuaciones de elastodinámica bidimensional. Mediante un programa de computador, elaborado en lenguaje FORTRAN, compilador Force 2.0.8 se estudia en forma especial, la influencia que poseen las barreras para aislamiento pasivo de vibraciones, a modo de discontinuidades naturales en el terreno (zanjas), sobre la atenuación del valor de la amplitud de desplazamiento vertical y horizontal, y sobre la disminución en la amplitud de los esfuerzos internos de un suelo.

Palabras Clave: Método de Elementos de Contorno, Aislamiento de Vibraciones, Elastodinámica.

1 DIMENSIONAMIENTO DE BARRERAS PARA AISLACION PASIVA

Las barreras para aislación pasiva se ubican a una distancia considerablemente grande de la fuente que emite las vibraciones, y relativamente cerca del sitio donde se requiere disminuir las amplitudes de desplazamiento y esfuerzos. En la figura 1.1 se muestra una barrera en forma de zanja abierta, de forma rectangular con un ancho L y una profundidad H , que se utiliza para proteger un instrumento de precisión del efecto dañino que puede ocasionar la propagación de las ondas elásticas.

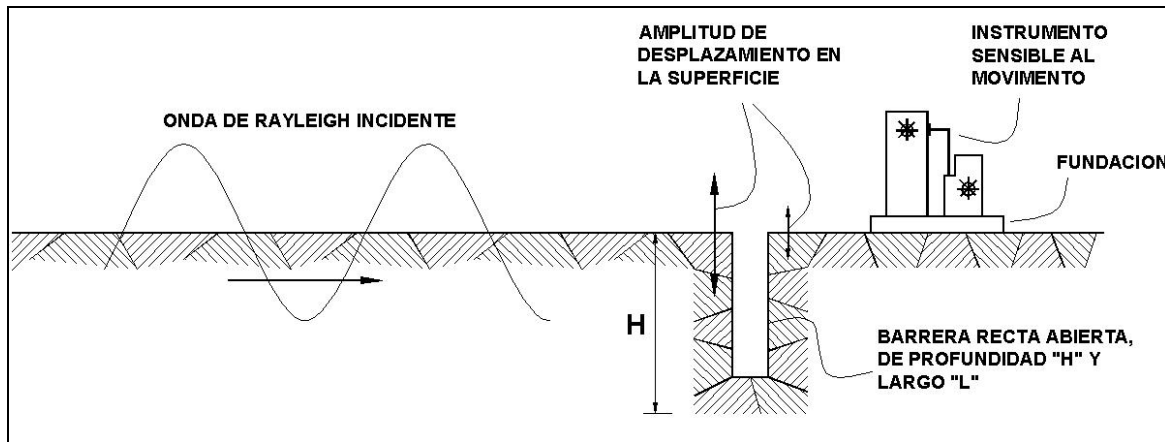


Figura 1.1: Esquema de aislamiento de la vibración usando una zanja de sección rectangular – aislación pasiva (Woods, 1968).

Las barreras que se utilizan para aminorar el efecto de las ondas se consideran efectivas (Richard, Hall, Woods, 1970) en el lugar que se desea aislar de las ondas elásticas, si el *factor de reducción de la amplitud* (ARF) es igual a 0,25 o menor. Dicho factor se define a continuación (Woods, 1968):

$$\text{ARF} = \frac{\text{amplitud de vibración vertical con la barrera}}{\text{amplitud de vibración vertical sin la barrera}} \quad (1.1)$$

Woods (1968) utilizó barreras de sección rectangular para llevar a cabo ensayos de aislación pasiva. El esquema del ensayo se elaboró en base a una zanja que se constituyó con profundidades de 1 [ft] a 4 [ft], de 1 [ft] a 8 [ft] de largo, y de 0,33 [ft] a 1 [ft] de ancho. La frecuencia de excitación se hizo variar dentro de un rango de 200 [Hz] y 350 [Hz]. Siendo λ_R la longitud de la onda de Rayleigh y R_0 la distancia entre la fuente emisora de la vibración y el centro de la barrera, H/λ_R se hizo variar de 0,444 a 3,64 y R_0/λ_R de 2,22 a 9,20. Se tomó en cuenta que la línea 0° sería una línea de simetría en la obtención de resultados, y se encontró que los valores del ARF serían iguales o menores a 0,25 dentro de una semicircunferencia de radio $L/2$ por detrás de la barrera (figura 1.2).

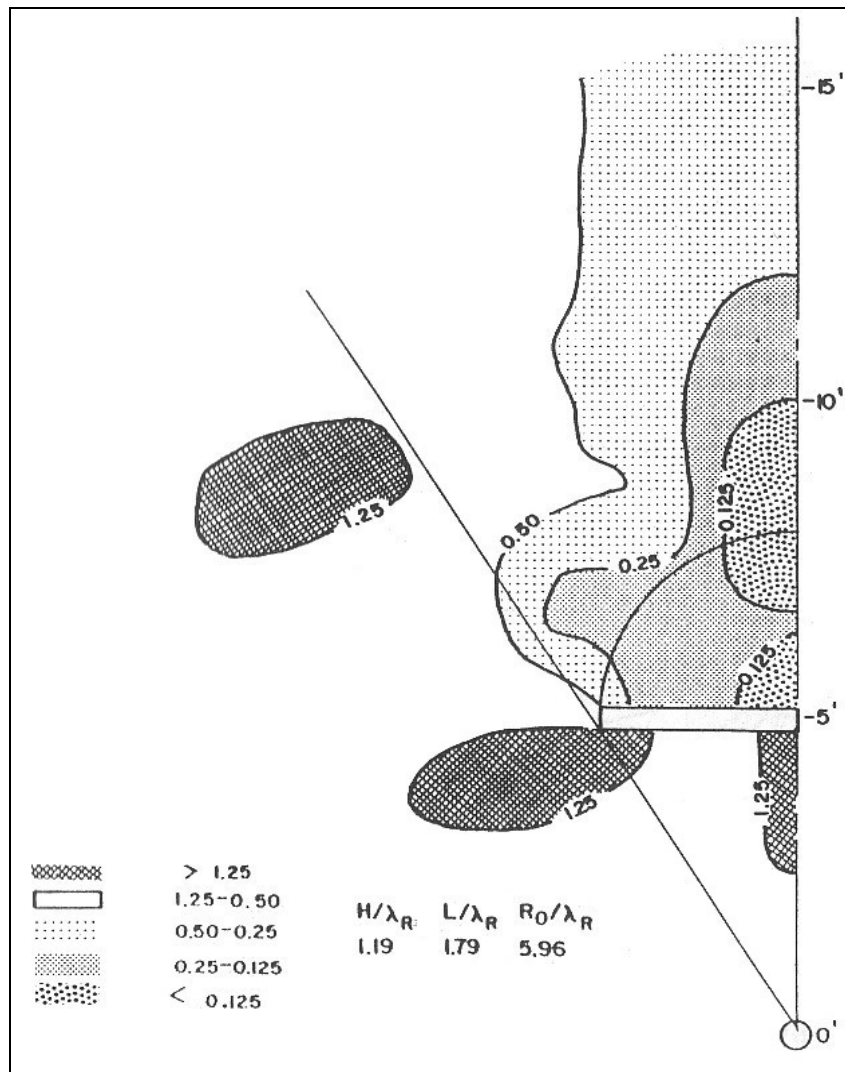


Figura 1.2: Diagramas de contorno del ARF para aislación pasiva (Woods, 1968).

Las conclusiones que se lograron obtener a partir de esta investigación fueron (Richard, Hall, Woods, 1970):

- Para que la aislación pasiva sea efectiva ($ARF = 0.25$ dentro del rango $R_0 = 2 \cdot \lambda_R$ a $7 \cdot \lambda_R$), la profundidad H de la zanja debió ser al menos igual a $1.33 \cdot \lambda_R$.
- Para mantener el mismo ARF, se requirieron barreras de dimensiones mayores para distancias también mayores desde la fuente, debiéndose aumentar el área en la proporción $H/\lambda_R \times L/\lambda_R$ de acuerdo a R_0/λ_R .
- El área mínima para efectos de diseño: $2.5 \cdot \lambda_R^2$ para $R_0 = 2 \cdot \lambda_R$ y $6.0 \cdot \lambda_R^2$ para $R_0 = 7 \cdot \lambda_R$. Para valores intermedios de R_0 puede interpolarse linealmente.

- El ancho de la zanja no posee influencia sobre la efectividad de la aislación, al menos dentro del rango comprendido entre $L/\lambda_R = 0,13$ a $0,91$.
- Se produce un aumento en la amplitud de desplazamiento vertical inmediatamente por delante de la barrera, debido a reflexión de las ondas.

2 METODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO EN ELASTODINAMICA

2.1 Ecuación de Elastodinámica para un Sólido Elástico

De la aplicación de la *segunda ley de Newton* sobre un sólido tridimensional, la ecuación de *Navier* (ecuación dinámica en función únicamente de los desplazamientos) en notación tensorial puede escribirse de la siguiente forma:

$$(C_1^2 - C_2^2) \cdot u_{i,ij} + C_2^2 \cdot u_{j,ii} + \frac{b_j}{\rho} = \ddot{u}_j \quad (2.1)$$

En que: $C_1 = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ Velocidad de las ondas de compresión.

$C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ Velocidad de las ondas de corte.

λ es el coeficiente de *Lamé*, μ el módulo de cizalle y ρ la densidad del material.

2.2 Solución Fundamental para Elastodinámica Plana en Estado Estacionario

La solución fundamental se obtiene resolviendo la ecuación (2.1) para las fuerzas de cuerpo b_i de la forma:

$$b_j = \rho \cdot \delta(q - p) \cdot e_j \quad (2.2)$$

En que $\delta(q - p)$ (igual a cero para $p \neq q$, e igual a ∞ para $p = q$) es la función *delta de Dirac* que representa la carga unitaria dinámica concentrada que actúa en un punto p (punto de carga) en la dirección j ; mientras que q es el punto de campo o aquél en donde se aplica la solución (medición del desplazamiento)

en la dirección i . Ahora si a esta fuerza de cuerpo se le da una variación en el tiempo $\exp(i \cdot \omega \cdot t)$ y se inserta en la ecuación (2.1), conduce a:

$$(C_1^2 - C_2^2) \cdot u_{i,ij} + C_2^2 \cdot u_{j,ii} + \delta(q - p) \cdot e_j = s^2 \cdot \ddot{u}_j \quad (2.3)$$

De donde $s = i \cdot \omega$, considerando que la solución u_i también varía de acuerdo a $\exp(i \cdot \omega \cdot t)$, y tomando en cuenta que:

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 \cdot u_i \quad (2.4)$$

De esta forma la solución de (2.3) para el desplazamiento no depende del tiempo, sino más bien de la frecuencia de perturbación ω , de la geometría del sólido y de sus propiedades mecánicas. Las tensiones en el contorno y los esfuerzos en puntos internos del sólido, pueden obtenerse en función de los desplazamientos (una vez que se obtengan) utilizando la teoría de la elasticidad como:

$$t_i = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i} \cdot n_j \right) + \lambda \cdot u_{j,j} \cdot n_i \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \cdot u_{k,k} \cdot \delta_{ij} \quad (2.6)$$

n_j son los cosenos directores del vector normal al contorno, orientado hacia afuera desde el interior del sólido. Tras seguir los trabajos efectuados por Doyle (1966) y Cruse (1968), se obtuvieron soluciones de (2.3) aplicables a problemas bidimensionales de deformación plana, en base a los tensores fundamentales U^* y T^* :

$$u_j^* = U_{ij}^* \cdot e_i \quad ; \quad t_j^* = T_{ij}^* \cdot e_i \quad (2.7)$$

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot \mu} \cdot \left\{ \psi \cdot \delta_{ij} - \chi \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \right\} \quad (2.8)$$

$$T_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right] \cdot \left[\delta_{ij} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} \cdot n_i \right] - \frac{2 \cdot \chi}{r} \cdot \left(n_j \cdot r_{,i} - 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right\}$$

$$- 2 \cdot \frac{d\chi}{dr} \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} + \left[\left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 - 2 \right] \cdot \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha \cdot \chi}{2r} \right) \cdot r_{,i} \cdot n_j \Bigg\} \quad (2.9)$$

Con $\alpha = 2$, y las funciones ψ y χ son:

$$\psi = K_0 \left(\frac{s \cdot r}{C_2} \right) + \frac{C_2}{s \cdot r} \cdot \left\{ K_1 \left(\frac{s \cdot r}{C_2} \right) - \frac{C_2}{C_1} \cdot K_1 \left(\frac{s \cdot r}{C_1} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$\chi = K_2 \left(\frac{s \cdot r}{C_2} \right) - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \cdot K_2 \left(\frac{s \cdot r}{C_1} \right) \quad (2.11)$$

K_ν son las funciones de *Bessel* modificadas de segunda especie y orden ν . r es la distancia entre p y q , mientras que $i, j = 1, 2$. Los datos restantes en las fórmulas anteriores son:

$$r_{,j} = (x_j(q) - \xi_j(p)) / r \quad r = \left[(x_j - \xi_j) \cdot (x_j - \xi_j) \right]^{1/2} \quad \frac{\partial r}{\partial n} = r_{,j} \cdot n_j \quad (2.12)$$

x_j y ξ_j son las coordenadas de los puntos de campo (q) y fuente (p) respectivamente.

2.3 Ecuación de elementos de contorno para elastodinámica

Llevando la ecuación de *Navier* a una formulación de residuos ponderados (*Brebbia, Telles, Wrobel*, 1984), usando la solución fundamental como función de peso, al evaluar las condiciones de borde se llega a:

$$\int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2) \cdot u_{i,ij}^* + C_2^2 \cdot u_{j,ii}^* - s^2 \cdot u_j^* \right\} \cdot \rho \cdot u_j \cdot d\Omega = - \int_{\Gamma} t_j \cdot u_j^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} u_j \cdot t_j^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} b_j \cdot u_j^* \cdot d\Omega \quad (2.13)$$

Y por consiguiente para puntos internos:

$$u_j(p) = \int_{\Gamma} t_i(Q) \cdot U_{ij}^*(p, Q) \cdot d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) \cdot T_{ij}^*(p, Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_i(q) \cdot U_{ij}^*(p, q) \cdot d\Omega(q) \quad (2.14)$$

Y para puntos del contorno:

$$c_j(P) \cdot u_j(P) = \int_{\Gamma} t_i(Q) \cdot U_{ij}^*(P, Q) \cdot d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) \cdot T_{ij}^*(P, Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_i(q) \cdot U_{ij}^*(p, q) \cdot d\Omega(q) \quad (2.15)$$

En estas dos últimas ecuaciones el desplazamiento en el punto p (o P) se relaciona con los desplazamientos y tensiones en todos los puntos del contorno. Para los puntos fuente y de campo, p (o P) y q (o Q), se utilizan letras mayúsculas para representar puntos ubicados en el contorno del sólido, y letras minúsculas para puntos internos. Una vez resueltos los desplazamientos y tensiones en el contorno, u_j y t_j respectivamente, los esfuerzos σ_{ij} en puntos interiores del sólido se obtienen a partir de:

$$\sigma_{ij}(p) = \int_{\Gamma} D_{kij} \cdot t_k \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} \cdot u_k \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ikij} \cdot b_j \cdot d\Omega \quad (2.16)$$

En que D_{kij} y S_{kij} se conocen como tensores de tercer orden:

$$D_{kij} = \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial U_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (2.17)$$

$$S_{kij} = \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial T_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

2.4 Discretización de la ecuación de elementos de contorno

La discretización que se utiliza en la modelación numérica consiste en dividir el contorno del sólido bidimensional en elementos rectos (figuras 1.3 y 1.4) con un nodo en el centro, en que las funciones desplazamiento y tensión en el contorno son constantes dentro de cada elemento. De este modo el valor de c_j en (2.15) se transforma en $\frac{1}{2}$ (Brebbia, Telles, Wrobel, 1984).

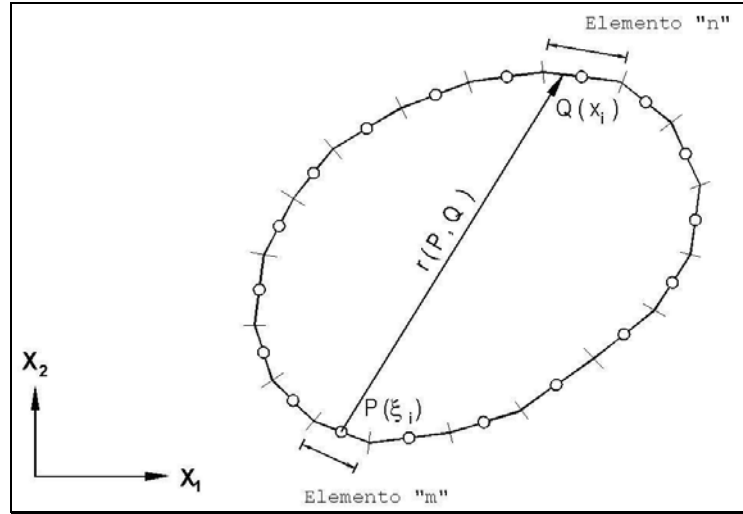


Figura 2.1: Discretización del contorno Γ .

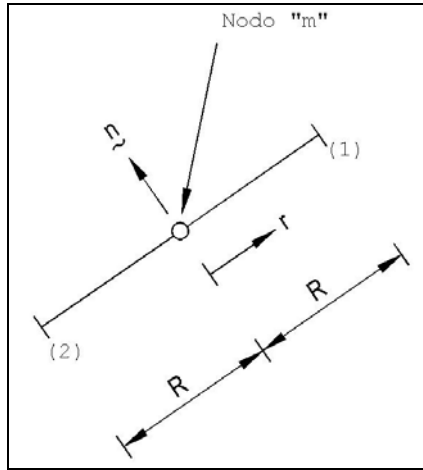


Figura 2.2: Esquema para el nudo "m" dentro del elemento "P".

La ecuación (2.15) para el nudo m (del elemento P), en función de todos los demás nudos n (correspondientes al punto medio de cada elemento Q), al despreciar el efecto de las fuerzas de cuerpo queda:

$$\zeta(m) \cdot \underline{u}^n(m) + \sum_{n=1}^N \left(\int_{\Gamma_n} \underline{T}^* \cdot d\Gamma \right) \cdot \underline{u}^n(n) = \sum_{n=1}^N \left(\int_{\Gamma_n} \underline{U}^* \cdot d\Gamma \right) \cdot \underline{t}^n(n) \quad \text{o} \quad (2.19)$$

$$\zeta(m) \cdot \underline{u}^n(m) + \sum_{n=1}^N \hat{\underline{H}}(m,n) \cdot \underline{u}^n(n) = \sum_{n=1}^N \underline{G}(m,n) \cdot \underline{t}^n(n) \quad (2.20)$$

En que:

$$\underset{\sim}{G}(m,n) = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}_n} \underset{\sim}{U}^* \cdot d\Gamma \quad \quad \hat{\underset{\sim}{H}}(m,n) = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}_n} \underset{\sim}{T}^* \cdot d\Gamma \quad (2.21)$$

$$\underset{\sim}{T}^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{bmatrix} \quad \quad \underset{\sim}{U}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\underset{\sim}{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix} \quad \quad \underset{\sim}{t}^n = \begin{pmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$\underset{\sim}{C} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\sim}{I} \quad (2.24)$$

Las integrales señaladas en (2.21) se resuelven por integración numérica (puntos Gauss) para $m \neq n$, mientras que para los casos en que $m = n$ se resuelven estas integrales en forma analítica.

Para detectar desplazamientos y esfuerzos en puntos internos del sólido se recurre a:

$$u_i(p) = \sum_{n=1}^N \underset{\sim}{t}_j^n(n) \cdot G_{ij}(p,n) - \sum_{n=1}^N u_j^n(n) \cdot \hat{H}_{ij}(p,n) \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ij}(p) = - \sum_{n=1}^N \left[\sum_{np=1}^{NP} (W_{np} S_{kij})_{np} \right] u_k^n(n) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{np=1}^{NP} (W_{np} D_{kij})_{np} \right] \underset{\sim}{t}_k^n(n) \quad (2.26)$$

En la última ecuación, NP corresponde al número de puntos Gauss utilizados para integrar numéricamente S_{kij} y D_{kij} .

3 APLICACIÓN DEL BEM A BARRERAS DE AISLACION PASIVA

La aplicación consiste en modelar el suelo como sólido *semi-infinito*, elástico-lineal y homogéneo en el plano (2D). La barrera se modela trazando una discontinuidad de forma rectangular en la superficie libre del sólido (figura 3.1), y a una distancia considerable se aplican cargas verticales, de carácter cíclico y amplitud unitaria, sobre la superficie.

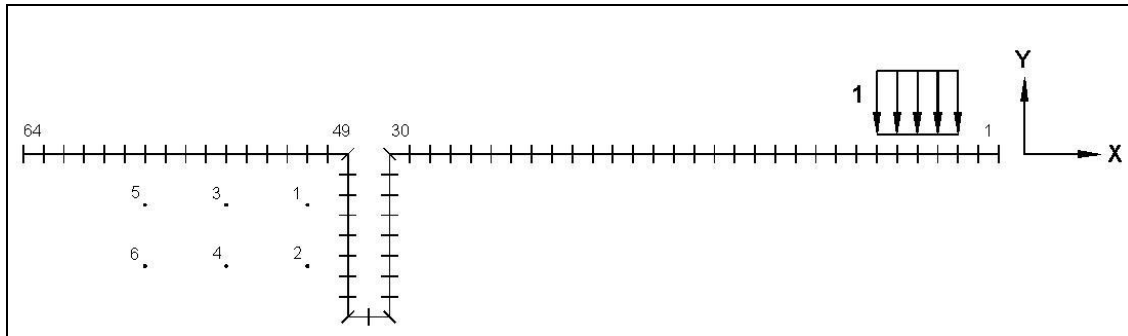


Figura 3.1: Modelación y discretización del contorno del sólido.

Las propiedades que utilizaron para el sólido elástico son las que se señalan a continuación: módulo de corte, densidad, razón de *Poisson* y velocidad de propagación de ondas de Rayleigh

$$\mu = 9250000 \left[N/m^2 \right] \quad \rho = 1275,5 \left[kg/m^3 \right] \quad \nu = 0,347 \quad V_R = 2692,96 \left[cm/seg \right]$$

El programa se utilizó para simular tanto la condición sin barrera **S/B** como también la condición con barrera **C/B**. En primera instancia se proporcionó una frecuencia de aplicación de la carga de manera que longitud de onda de *Rayleigh* fuese tal que $H < 1,33 \cdot \lambda_R$. Los resultados para desplazamientos horizontales y verticales para tal situación, que se muestran en las figuras 3.2 y 3.3, dan cuenta de que en ningún caso podría asegurarse un ARF igual a 0,25 o inferior; incluso tras la barrera prácticamente se consiguen amplificaciones de la amplitud respecto al caso **S/B**, probablemente debido al *efecto péndulo* causado por el movimiento retrógrado de la onda. La discontinuidad en los gráficos correspondientes a los casos *con barrera*; que se señalan en las figuras 3.2, 3.3, 3.4, y 3.5; se debe a que en la zona de la barrera no existe suelo superficial.

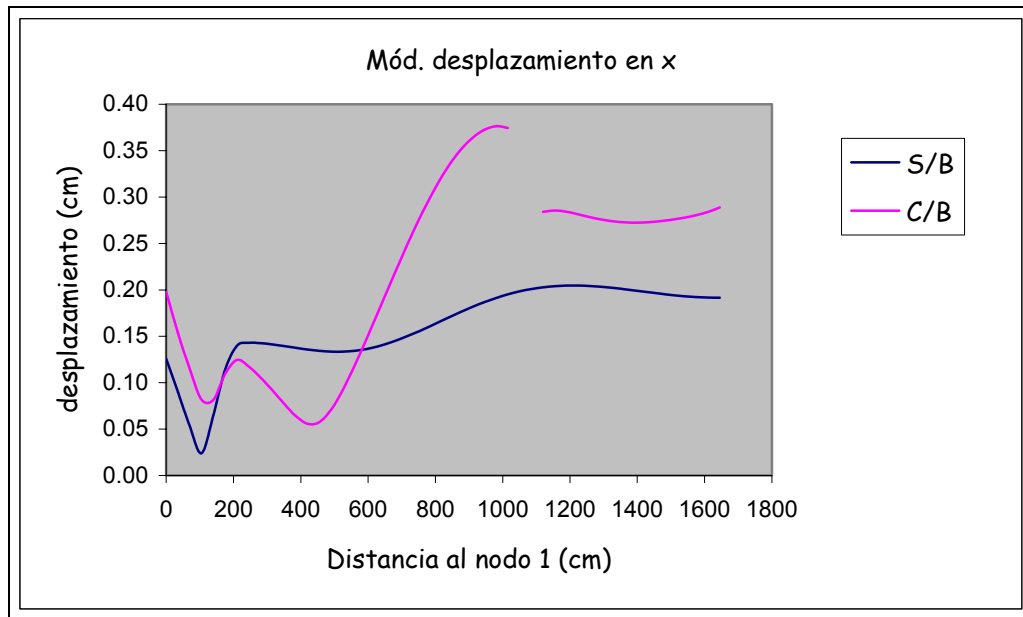


Figura 3.2: Amplitud de desplazamiento horizontal, caso $H < 1,33 \cdot \lambda_R$.

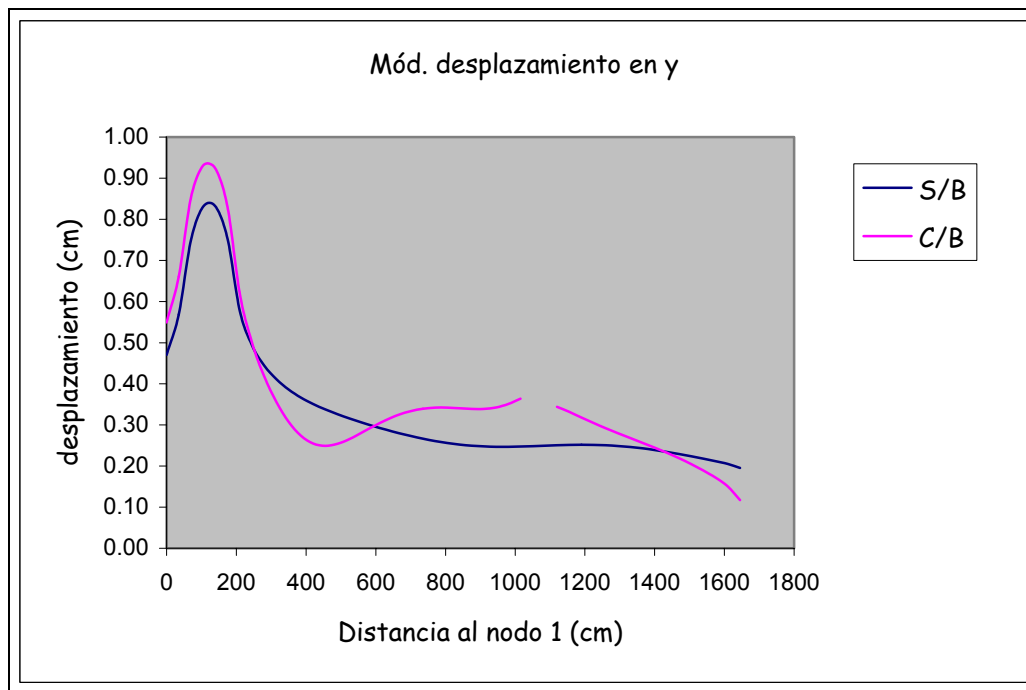


Figura 3.3: Amplitud de desplazamiento vertical, caso $H < 1,33 \cdot \lambda_R$.

En segunda instancia se proporciona una frecuencia de carga tal que la longitud de onda de *Rayleigh* asegura que $H \approx 1,33 \cdot \lambda_R$. De esta forma debería poder asegurarse un ARF al menos igual al 0,25, hecho que claramente se extrae de la figura 3.5 para el desplazamiento vertical. Respecto al desplazamiento horizontal, en la figura 3.4 puede distinguirse por lo general una disminución en la amplitud, aunque no tan drástica como para asegurar un ARF igual a 0,25.

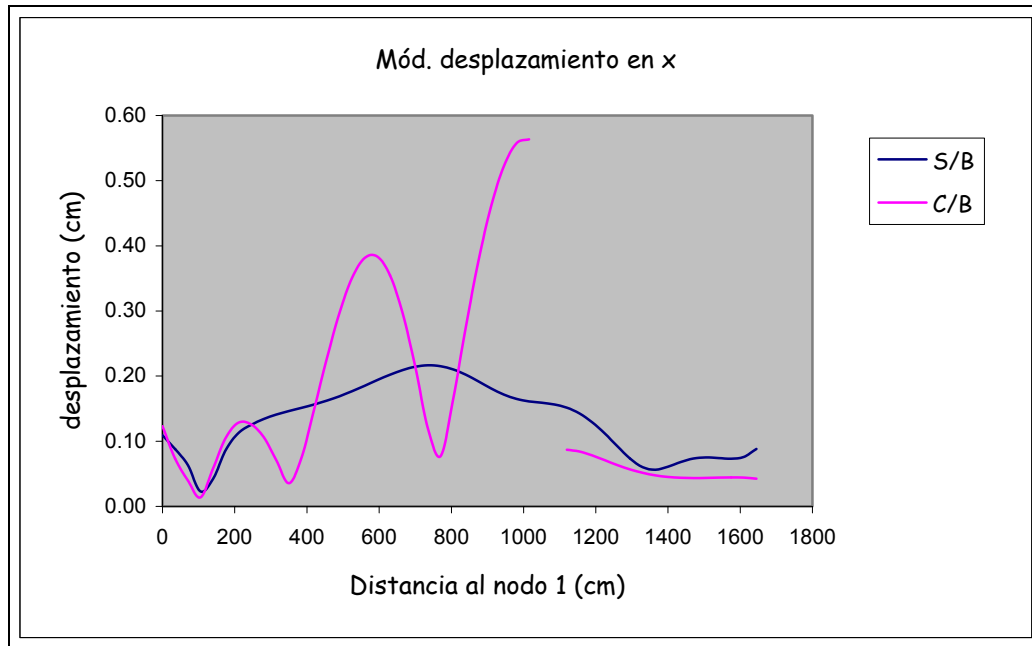


Figura 3.4: Amplitud de desplazamiento horizontal, caso $H \approx 1,33 \cdot \lambda_R$.

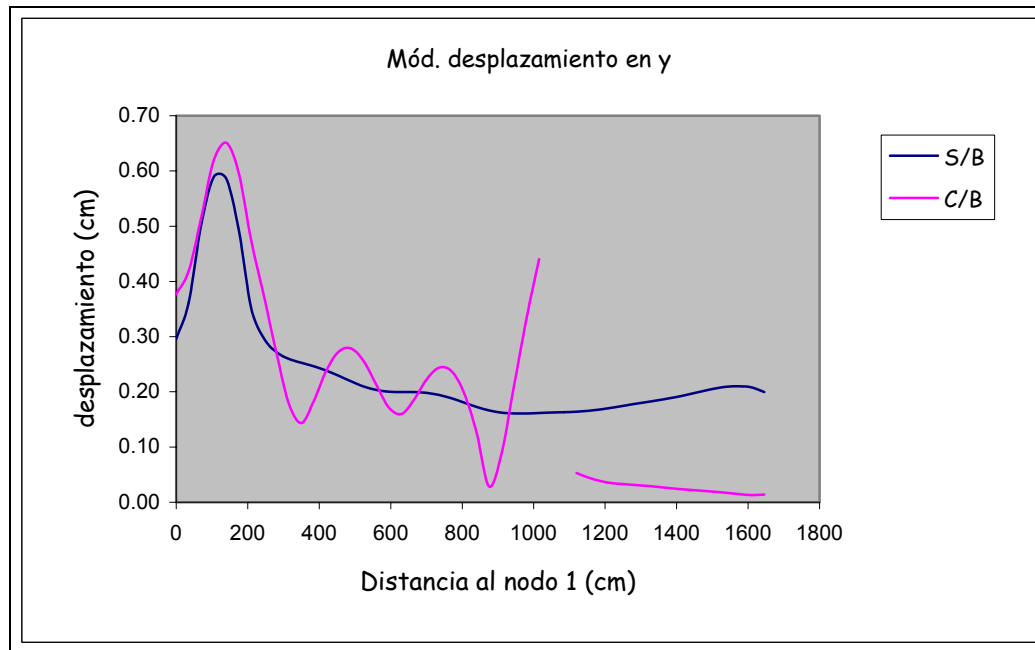


Figura 3.5: Amplitud de desplazamiento vertical, caso $H \approx 1,33 \cdot \lambda_R$.

En los puntos interiores 1, 2, 3, 4, 5 y 6 señalados en la figura 3.1, también se percibe disminución en la amplitud de los desplazamientos respecto al caso sin barrera. Estos resultados pueden verse en las figuras 3.6 y 3.7.

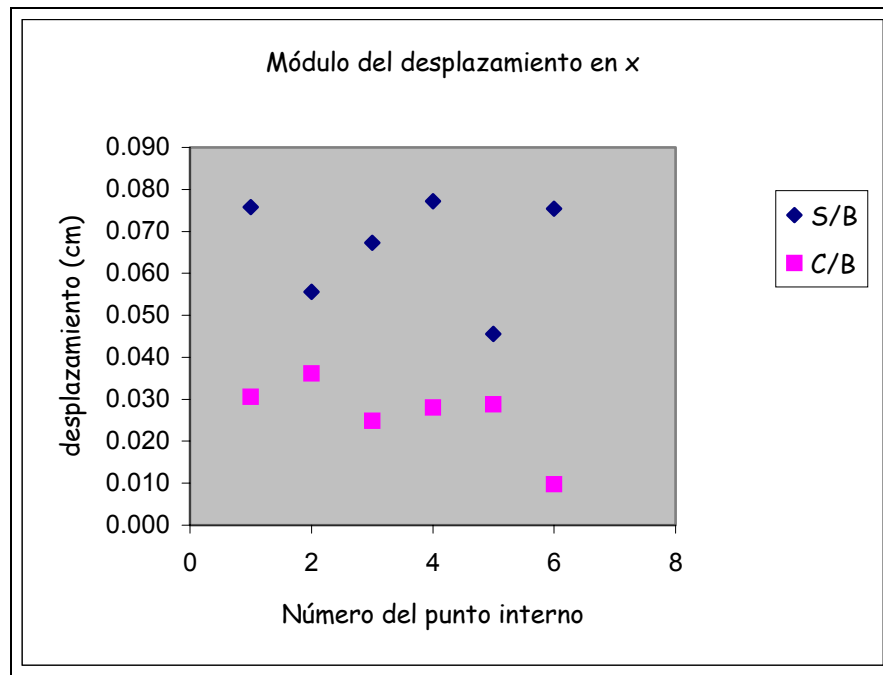


Figura 3.6: Amplitud de desplazamiento horizontal, caso $H \approx 1,33 \cdot \lambda_R$.

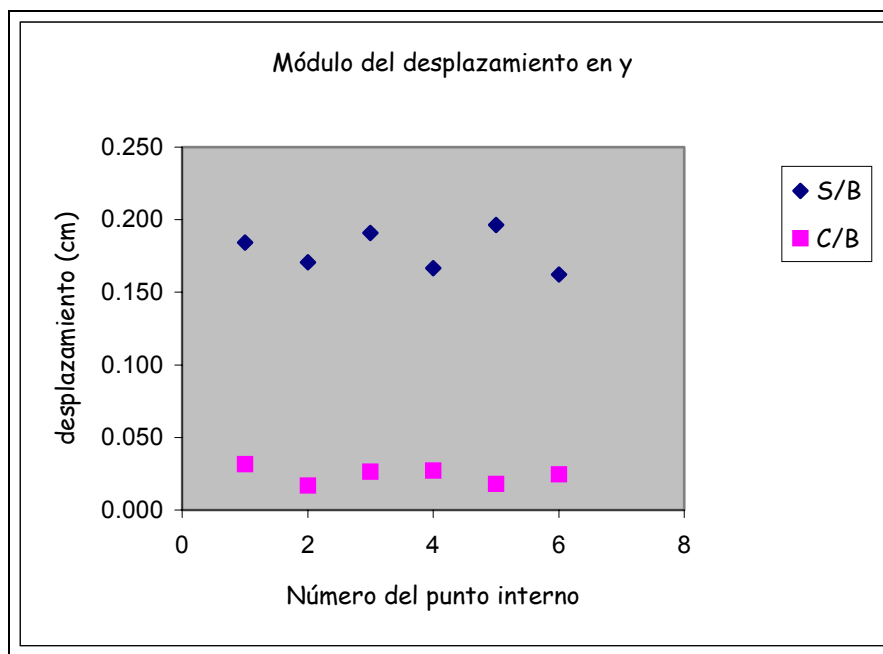


Figura 3.7: Amplitud de desplazamiento vertical, caso $H \approx 1,33 \cdot \lambda_R$.

4 CONCLUSIONES

El BEM muestra ser una útil técnica numérica para modelar problemas de propagación de ondas en dominios infinitos o semi-infinitos, pues evita tener que truncar el dominio o incorporar elementos artificiales como fronteras ficticias que distorsionen la precisión de los resultados.

Para la obtención de valores de desplazamientos, deformaciones o esfuerzos en puntos interiores basta con proporcionar las coordenadas éstos.

La profundidad de la barrera de aislación pasiva sí es una variable influyente en la atenuación de la amplitud del movimiento; para aislación pasiva se verifica realmente una reducción del orden del 75% en la amplitud del desplazamiento vertical, respecto al caso sin aislamiento, cuando la profundidad de la barrera es igual a 1,33 veces la longitud de la onda de *Rayleigh*.

Al disponer barreras de aislación pasiva se producen amplificaciones del desplazamiento en zonas ubicadas por delante de dichos obstáculos; esto debido a que la onda incidente encuentra una superficie libre vertical y se refleja en dirección hacia la fuente.

REFERENCIAS

- Prakash, S. and Puri, V. (1988). Foundations for Machines: Analysis and Design, Wiley-Interscience, New York, USA.
- Richart, F.E. and Hall, J.R. and Woods, R.D. (1970). Vibrations of Soils and Foundations, McGraw-Hill Book Company, New Jersey, USA.
- Chuang, P.H. (1981). Applications of Boundary Element Methods in Elastodynamics, M.Sc. dissertation, University of Southampton, Southampton, UK.
- Brebbia, C.A. and Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. (1984). Boundary Elements Techniques; Theory and Applications in Engineering, Springer & Verlag, New York, USA.
- Ishihara, K. (1996). Soil Behavior in Earthquake Geotechnics, Clarendon Press & Oxford Engineering Science Series, N° 46, New York, USA.
- Meirovitch, L. (1986). Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill Book Company, Second Edition, Boston, USA.

Ewing, E.M. and Jardetzky, W.S. and Press, F. (1957). Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company, New York, USA.

Timoshenko, S. and Goodier, J.N. (1951). Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, Second Edition, Tokio, Japan.

Watson, G.N. (1952). A Treatise on the Theory of Bessel Functions, University Press, Second Edition, Cambridge, Great Britain, UK.

Apostol, T.M. (1965). Calculus Volumen II, Cálculo en Varias Variables con Aplicaciones a las Probabilidades y al Análisis Vectorial, Editorial Reverte, First Edition, Barcelona, España.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1965). El Método de Elementos Finitos, Volumen I, McGraw-Hill Book Company & Interamericana de España, Cuarta Edición, Madrid, España.