

1 TEORÍA DE TENSORES CARTESIANOS

1.1 Introducción:

Los conceptos fundamentales de la **mecánica de medios continuos** serán establecidos utilizando la **notación indicial**, propia del cálculo de tensores cartesianos.

Las leyes físicas, los conceptos matemáticos y los teoremas serán **“re-formulados”** utilizando las definiciones y convenciones del **cálculo tensorial**.

1.2 Definiciones Básicas

1.2.1 Notación Tensorial

Un vector en un espacio euclídeo de tres dimensiones puede representarse por R_i , donde el subíndice i toma los valores 1, 2 y 3:

$$R_i = (R_1, R_2, R_3),$$

y los R_i corresponden a los componentes del vector en un sistema cualquiera de coordenadas.

1.2.2 Producto Escalar

El producto escalar de dos vectores a_i y b_i viene dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Utilizando la convención de que **dos subíndices repetidos indican siempre una suma**, para todos los valores de los subíndices, queda:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i.$$

1.2.3 Tensor Delta de Kronecker

Un tensor de gran utilidad en el cálculo es el llamado **“Delta de Kronecker”** y está definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Utilizando este tensor podemos escribir el **producto escalar** de dos vectores en la forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = \delta_{ij} a_i b_j.$$

1.2.4 Tensor Permutación

El Tensor de permutación es **un tensor de tercer orden** definido por:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } ijk \text{ forman permutación par} \\ -1 & \text{cuando } ijk \text{ forman permutación impar} \\ 0 & \text{si no forman permutación} \end{cases}$$

Utilizando este tensor podemos escribir el **producto vectorial** de dos vectores en la forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k,$$

y el **triple producto escalar** en la forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

1.2.5 Orden o Rango de un Tensor

Es posible definir el "**orden de un tensor**" como el **número de subíndices** que aparece asociado a la letra que identifica al tensor:

$$a = \text{Tensor de Orden Cero} = \text{Escalar}$$

$$a_i = \text{Tensor de Primer Orden} = \text{Vector}$$

$$a_{ij} = \text{Tensor de Segundo Orden} = \text{Matriz}$$

$$a_{ijk} = \text{Tensor de Tercer Orden} = \text{"Cubo"}$$

$$a_{ijkl} = \text{Tensor de Cuarto Orden} = \text{"Hipercubo"}$$

En un espacio tridimensional, un tensor de **orden N** posee 3^N componentes.

Ejemplo: Matriz de 3x3

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad n = 2 \quad \Rightarrow \quad 3^N = 9 \text{ componentes}$$

Ejemplo: Ley Generalizada de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \cdot e_{rs} \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad 3^N = 81 \text{ componentes}$$

1.2.6 Gradiente

El gradiente de una función escalar viene dado por:

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}.$$

El operador “ ∇ ” recibe el nombre “**Nabla**”, “**Delta Invertida**” o “**Del**” y se puede operar con él como un vector. Está definido por:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

En notación tensorial el gradiente se representa por:

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \phi_{,i}.$$

La “**coma**” delante del subíndice significa **diferenciación con respecto a las coordenadas espaciales** x_i .

1.2.7 Divergencia

La **divergencia de un campo vectorial** viene dada por:

$$\nabla\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

En notación tensorial el gradiente se representa por:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = F_{i,i} = \delta_{ij}F_{i,j}.$$

1.2.8 Laplaciano

Si tomamos la **divergencia del gradiente** de una función obtenemos el **Laplaciano** de dicha función:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = f_{,ii}.$$

1.2.9 Rotacional

La **rotación de un campo vectorial** viene dada por:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

En notación tensorial la podemos expresar con ayuda del **tensor de permutación** como:

$$\text{rot } \vec{F} = e_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = e_{ijk} F_{k,j}.$$

1.2.10 Identidad “e – δ”

En la manipulación de ciertas expresiones indiciales, es de gran utilidad hacer uso de la siguiente identidad:

$$e_{ijk} e_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}.$$

Esta identidad podría verificarse considerando que, en general se tiene:

$$e_{ijk} \cdot e_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}.$$

Si $r = k$:

$$\begin{aligned} e_{ijk} \cdot e_{pqk} &= \delta_{ip} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} - \delta_{iq} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kk} \end{vmatrix} + \delta_{ik} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}, \\ &= \delta_{ip} (\delta_{jq} \delta_{kk} - \delta_{kq} \delta_{jk}) - \delta_{iq} (\delta_{jp} \delta_{kk} - \delta_{kp} \delta_{jk}) + \delta_{ik} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{kp} \delta_{jq}), \\ &= \delta_{ip} (\delta_{jq} - \delta_{jq}) - \delta_{iq} (\delta_{jp} - \delta_{jp}) + \delta_{ik} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{kp} \delta_{jq}), \\ &= \delta_{ik} \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{ik} \delta_{kp} \delta_{jq}, \\ &= \delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jq}. \end{aligned}$$

1.3 Transformación de Coordenadas

Un punto medular del análisis tensorial es el estudio de la **transformación de un sistema de coordenadas a otro**.

Si el conjunto de variables independientes x_i **son las coordenadas de un punto en un sistema de referencia**, y \bar{x}_i **son las coordenadas del mismo punto en otro sistema**, la transformación de un sistema a otro, esta especificada por las relaciones:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \text{ y}$$

$$x_i = g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

Para asegurar que esta **transformación es reversible** y que existe una **correspondencia biunívoca** entre las variables de una **Región R**, es necesario que:

- 1 Las funciones que relacionan los dos sistemas sean **únicas, continuas** y que posean **primeras derivadas parciales continuas** en **R**.

- 2 El **determinante del Jacobiano**, $J = \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right|$, debe ser **distinto de cero** para todos los puntos de la Región **R**, es decir:

$$J = \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si J es positivo la transformación es **“propia”**, es decir, transforma un sistema **dextrógiro** en otro **dextrógiro**, y si es negativo, se llama **“impropia”** y transforma un sistema **dextrógiro** en **levógiro**.

1.3.1 El Tensor Métrico

Lo primero que nos interesa conocer acerca de un sistema de coordenadas es como se mide la **longitud** o **distancia** entre dos puntos. Esta información nos la da el tensor métrico del sistema.

Sea una transformación admisible $\theta_i = \theta_i(x_1, x_2, x_3)$, y sea su inversa $x_i = x_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Si las coordenadas x_1 , x_2 y x_3 se asumen **coordenadas cartesianas rectangulares**, la longitud del elemento ds viene dada por:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j.$$

Las diferenciales dx_i pueden expresarse en referencia al sistema θ_i por:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} d\theta_j.$$

Si reemplazamos esta ecuación en la anterior, se obtiene:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_t} d\theta_k d\theta_t.$$

Si definimos la función:

$$g_{kt}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_t},$$

entonces, el **cuadrado del elemento de línea** en el sistema general de coordenadas θ_i se obtiene:

$$ds^2 = g_{kt} d\theta_k d\theta_t.$$

El desarrollo de la expresión anterior establece que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(d\theta_1)^2 + g_{12}d\theta_1 d\theta_2 + g_{13}d\theta_1 d\theta_3 \\ &+ g_{21}d\theta_1 d\theta_2 + g_{22}(d\theta_2)^2 + g_{23}d\theta_2 d\theta_3 \\ &+ g_{31}d\theta_1 d\theta_3 + g_{32}d\theta_2 d\theta_3 + g_{33}(d\theta_3)^2 \end{aligned}$$

Este tensor es **siempre simétrico** ya que $g_{kt} = g_{tk}$.

Las funciones g_{kt} son llamadas las **Componentes del Tensor Métrico Euclidiano** en el sistema de coordenadas θ_i .

Sea $\bar{\theta}_i$ otro sistema general de coordenadas tal que la transformación de coordenadas desde $\bar{\theta}_i$ hacia θ_i viene dada por:

$$\theta_i = \theta_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3).$$

Ahora las diferenciales pueden expresarse como:

$$d\theta_k = \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_t} d\bar{\theta}_t,$$

y utilizando la expresión para ds^2 , el elemento de distancia viene dado por:

$$ds^2 = g_{kt} d\theta_k d\theta_t = g_{kt} \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_m} d\bar{\theta}_m \right) \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial \bar{\theta}_n} d\bar{\theta}_n \right) = \left(g_{kt} \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_m} \frac{\partial \theta_t}{\partial \bar{\theta}_n} \right) d\bar{\theta}_m d\bar{\theta}_n,$$

$$ds^2 = \bar{g}_{mn} d\bar{\theta}_m d\bar{\theta}_n.$$

Coherentemente, llamaremos a las funciones \bar{g}_{mn} las **Componentes del Tensor Métrico Euclidiano en el sistema de coordenadas $\bar{\theta}_i$** .

Esta última **forma diferencial cuádrlica** es de importancia fundamental ya que define la **longitud de cualquier elemento de línea** en sistemas de coordenadas generales.

Se concluye que, si θ_i y $\bar{\theta}_i$ son dos conjuntos de coordenadas generales, entonces los **Tensores Métricos Euclidianos** g_{mn} y \bar{g}_{mn} se relacionan por medio de **Leyes Específicas de Transformación**.

1.3.2 Tensor Métrico en Coordenadas Polares

Determinación del **Tensor Métrico Euclidiano en coordenadas polares planas** ($\theta_1 = r$; $\theta_2 = \theta$) y su correspondiente expresión para la **longitud de un elemento de línea**.

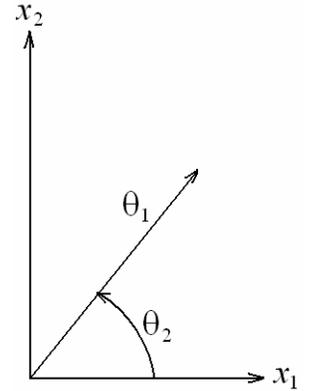
Considerando las siguientes relaciones con un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (ver figura):

$$x_1 = x_1(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$x_2 = x_2(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \sin \theta_2,$$

$$\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\theta_2 = \theta_2(x_1, x_2) = \sin^{-1} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right),$$



se pueden establecer las componentes del tensor métrico como:

$$g_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \right)^2 = \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = (\cos \theta_2)(-\theta_1 \sin \theta_2) + (\sin \theta_2)(\theta_1 \cos \theta_2) = 0,$$

$$g_{22} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \right)^2 = (-\theta_1 \sin \theta_2)^2 + (\theta_1 \cos \theta_2)^2 = \theta_1^2,$$

y la longitud de un elemento de línea como:

$$ds^2 = g_{11}d\theta_1d\theta_1 + g_{12}d\theta_1d\theta_2 + g_{21}d\theta_1d\theta_2 + g_{22}d\theta_2d\theta_2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1d\theta_2)^2.$$

Esta última expresión, no es sino, la familiar expresión de coordenadas polares:

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2.$$

1.3.3 Tensor Métrico en Coordenadas Esféricas

Análogamente al ejemplo anterior, es posible establecer el **Tensor Métrico Euclidiano en coordenadas esféricas** y su correspondiente expresión para la **longitud de un elemento de línea**.

Para esto, se debe considerar la siguiente **transformación directa**:

$$\theta_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right),$$

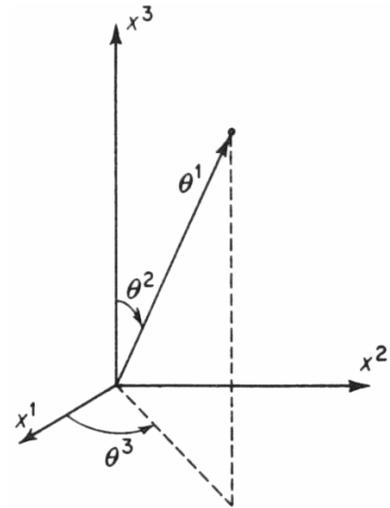
$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right),$$

y su correspondiente **transformación inversa**:

$$x_1 = \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$x_2 = \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3,$$

$$x_3 = \theta_1 \cos \theta_2.$$



La aplicación de la misma metodología de cálculo utilizada en el caso de las coordenadas polares, permite obtener las **componentes del tensor métrico Euclidiano en el caso de las coordenadas esféricas**, las que en este caso corresponden a:

$$g_{11} = 1,$$

$$g_{22} = (\theta_1)^2,$$

$$g_{33} = (\theta_1)^2 (\sin \theta_2)^2,$$

con todos los otros componentes nulos ($g_{ij} = 0; \forall i \neq j$). El **cuadrado del elemento de línea** por lo tanto es:

$$ds^2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1)^2 (d\theta_2)^2 + (\theta_1)^2 (\sin \theta_2)^2 (d\theta_3)^2.$$

1.4 Ley de Transformación de un Vector

1.4.1 Sistemas de Referencia “sin prima” y “con prima”

Consideremos un vector \vec{A} dibujado a partir de un punto arbitrario P en el espacio.

El vector \vec{A} puede ser descrito en función del sistema de ejes cartesianos “**sin primas**”, con origen en O y también en función del sistema de ejes cartesianos “**con primas**”, con origen en O' .

Ambos conjuntos de ejes pueden ser **trasladados sin rotación** al origen común en P , sin pérdida de generalidad.

La proyección de \vec{A} sobre los ejes “**sin prima**” da los componentes A_i , y la proyección sobre los ejes “**con prima**” da las componentes A'_i .

Se desea entender como se relacionan los componentes “con prima” con los componentes “sin prima” y viceversa.

1.4.2 Cosenos Directores

Introduciendo la noción de **cosenos directores** entre los dos conjuntos de ejes como:

(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = cosenos directores del eje y'_1 respecto de los ejes (y_1, y_2, y_3)

(a_{21}, a_{22}, a_{23}) = cosenos directores del eje y'_2 respecto de los ejes (y_1, y_2, y_3)

(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = cosenos directores del eje y'_3 respecto de los ejes (y_1, y_2, y_3)

Resumiendo esto en forma tabular, donde el **primer subíndice indica los ejes con prima** y el **segundo subíndice indica los ejes sin prima**:

	y_1	y_2	y_3
y'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Ejemplo: a_{31} es el coseno del ángulo entre el eje y'_3 y el eje y_1 .

1.4.3 Leyes de Transformación para Componentes Cartesianos

Recordando que la proyección del vector \vec{A} sobre el eje y'_1 , es igual a la **suma de las proyecciones de los componentes** A_i sobre el mismo eje:

$$A'_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3.$$

Similarmente:

$$A'_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3,$$

$$A'_3 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3.$$

Intercambiando ahora los roles de los ejes con prima por los ejes sin prima, y repitiendo el mismo procedimiento:

$$A_1 = a_{11}A'_1 + a_{12}A'_2 + a_{13}A'_3,$$

$$A_2 = a_{21}A'_1 + a_{22}A'_2 + a_{23}A'_3,$$

$$A_3 = a_{31}A'_1 + a_{32}A'_2 + a_{33}A'_3.$$

Estos dos conjuntos de ecuaciones son las **leyes de transformación para los componentes cartesianos de un tensor**, y pueden pensarse como la definición de un vector.

Ejemplo:

Las componentes de un vector \vec{A} en un sistema de ejes cartesianos **“sin prima”** son $A_i = (1, 1, 0)$. Considere un conjunto de ejes cartesianos **“con prima”**, obtenido a partir de la **rotación en un ángulo** de 30° alrededor del eje y_1 . ¿Cuales son los componentes “con prima” \vec{A}'_i de este vector?

Los cosenos directores a_{ij} , entre los ejes con prima y sin prima, están dados como sigue:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, a partir de la ley de transformación:

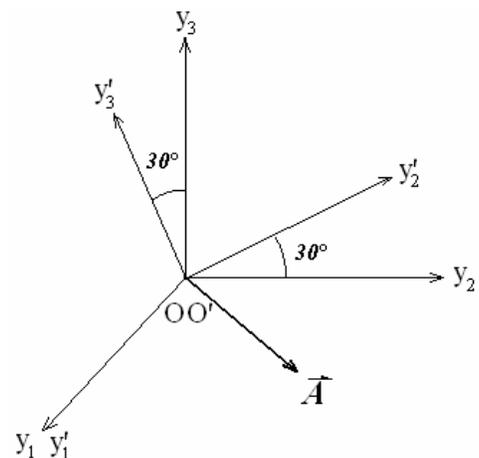
$$A'_i = a_{ij}A_j,$$

se obtiene:

$$A'_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = A_1 = 1.$$

$$A'_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 = \cos 30^\circ A_2 = \sqrt{3}/2,$$

$$A'_3 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = -\sin 30^\circ A_2 = -1/2.$$



1.4.4 Leyes de Transformación en Notación Indicial

Consideremos ahora, el expresar estas leyes de transformación de tensores, en notación indicial:

$$A'_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}A_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A'_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 \\ A'_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 \\ A'_3 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 \end{pmatrix}.$$

Así, en su forma mas compacta:

$$A'_i = a_{ij}A_j.$$

De manera similar:

$$A_r = a_{rs}A'_s.$$

1.4.5 Matriz de Rotación

Estas relaciones entre vectores correspondientes a dos sistemas de coordenadas, puede también pensarse como la **“rotación”** o **“transformación”** de un sistema a otro.

Esta transformación puede ser entendida como una **“matriz de rotación”** que **“aplica”** sobre un sistema y lo transforma en otro.

Lo anterior se entiende comúnmente, como que el **vector original es premultiplicado por la matriz de rotación para obtener el vector “rotado”**:

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

1.4.6 Propiedades de la matriz de rotación

Las matrices de rotación poseen las siguientes propiedades de **ortogonalidad**:

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}, \quad (\text{Ortogonalidad de filas})$$

y

$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}. \quad (\text{Ortogonalidad de columnas})$$

Esto significa en palabras, que el **producto punto** de cada fila (o columna) consigo misma es **unitario**, ya que obviamente son paralelas, y que el producto punto de una fila (o columna) con otra fila (o columna), es **cero**, ya que son perpendiculares.

Otra propiedad de las matrices de rotación, que se desprende de la manera en que se definen los ángulos de los cosenos directores, es que la **inversa de la matriz de rotación es su traspuesta**.

1.4.7 Invarianza del Producto Escalar

Utilizando la ley de transformación de un vector, se puede demostrar la **invarianza del producto escalar** $w = u_i v_i$ como:

$$w' = (a_{ik} u_k)(a_{il} v_l) = (a_{ik} a_{il})(u_k v_l) = \delta_{kl} u_k v_l = u_k v_k = w.$$

1.4.8 Invarianza de la Forma Bilineal

Dado un tensor t_{ij} y dos vectores x_i e y_j , se defina la forma bilineal $2F$ como:

$$2F = t_{ij} x_i y_j.$$

Esta expresión es lineal en x_i e y_j , y es invariante para una transformación de coordenadas:

$$2F' = t'_{ij} x'_i y'_j = (a_{ik} a_{jl} t_{kl})(a_{im} x_m)(a_{jn} y_n) = t_{mn} x_m y_n = 2F$$

1.4.9 Tensores Simétricos y Antimétricos

Un tensor t_{ij} es **simétrico** si $t_{ij} = t_{ji}$. Es decir, los elementos **“sobre”** la diagonal principal son iguales a los elementos **“bajo”** la diagonal principal. En el caso de tensores de segundo orden, los componentes del tensor se reducen a 6 elementos.

Este tensor cumple con la ley de transformación de coordenadas:

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl} = a_{ik} a_{ji} t_{lk} = t'_{ji}.$$

Por otra parte, un tensor t_{ij} es **antimétrico** si $t_{ij} = -t_{ji}$. Este tipo de tensores tiene sólo 3 componentes diferentes, ya que los términos de la diagonal principal deben ser nulos para que se cumpla la condición de antimetría.

Es posible definir el siguiente vector equivalente al tensor antimétrico:

$$t_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} t_{jk} = \begin{bmatrix} t_{32} \\ t_{13} \\ t_{21} \end{bmatrix}.$$

La relación inversa es:

$$t_{ij} = -e_{ijk} t_k = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4.10 Representación gráfica de un Tensor Simétrico

Si en la forma bilineal de un tensor t_{ij} , los vectores x_i e y_j se consideran dos veces el mismo vector x_i , y se toma en cuenta la simetría de éste, se obtiene la forma cuadrática:

$$2F = t_{ij} x_i x_j = t_{11} x_1^2 + t_{22} x_2^2 + t_{33} x_3^2 + 2(t_{12} x_1 x_2 + t_{23} x_2 x_3 + t_{31} x_3 x_1)$$

Esta expresión corresponde a una **cuádrica centrada en el origen** en un espacio cartesiano tri-ortogonal, donde si se tienen las componentes del tensor y el valor de F, la superficie queda unívocamente definida.

Sobre esta superficie es posible definir un vector que siempre es normal a ésta. Este vector se denomina **gradiente de F** y puede ser expresado en términos del tensor y del vector posición del punto como:

$$F_{,i} = t_{ij} x_j.$$

1.4.11 Direcciones y Valores Principales

Estamos interesados en encontrar las direcciones en las cuales la cuádrica quedaría orientada **"justo"** en las direcciones de los nuevos ejes coordenados.

Esto podría lograrse utilizando las propiedades de invarianza de la forma bilineal, de modo que las componentes del tensor original, se transformen de acuerdo a la ley de cambio de sistemas coordenados de un tensor.

Las direcciones buscadas podrían determinarse tomando en cuenta que, **el vector que une el origen del sistema de coordenadas con un punto de la superficie, debe apuntar en la misma dirección, que el vector normal a la superficie en ese punto.**

Lo anterior significa que el **vector posición** de un punto sobre la superficie, debe ser **colineal** con el **vector normal** a la superficie en ese punto, lo que matemáticamente se expresa como:

$$F_{,i} = t_{ij}x_j = \lambda x_i = \lambda \delta_{ij}x_j.$$

Reordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij})x_i = 0.$$

La solución de este sistema de ecuaciones homogéneas corresponde a las 3 **direcciones principales** buscadas. Los correspondientes valores de λ se denominan los **valores principales**.

Los valores principales se obtienen de la condición para la existencia de **soluciones no nulas**, lo que nos conduce a establecer la ecuación característica del tensor.

1.4.12 Ecuación Característica

La resolución de la ecuación anterior nos permite definir la **ecuación característica** de un tensor como:

$$\left| t_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right| = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3,$$

donde los parámetros I_1, I_2, I_3 son los invariantes principales del tensor, definidos a continuación.

1.4.13 Invariantes Principales

Los **invariantes principales** de un tensor se definen como:

$$I_1 = t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \text{traza}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ji}) = \frac{1}{2}(t_{ii}t_{(i+1)(i+1)} - t_{i(i+1)}^2) = (t_{22}t_{33} - t_{23}^2) + (t_{11}t_{33} - t_{13}^2) + (t_{11}t_{22} - t_{12}^2)$$

$$I_3 = \left\| t_{ij} \right\| = e_{ijk}t_{1i}t_{2j}t_{3k}$$

1.4.14 Direcciones Principales Entendidas como Problema de Valores Extremos

Otra forma para encontrar las direcciones principales de un tensor, consiste en considerar la situación como un **problema de valores extremos**.

En este caso, consideraremos la magnitud de los valores de los elementos de la diagonal principal, **como un funcional**, al que debe determinársele sus valores extremos.

Esto puede realizarse mediante herramientas estándares del cálculo en varias variables, como el **Método de los Multiplicadores de Lagrange**. En este método se plantea el maximizar o minimizar una **función objetivo**, sujeta a ciertas **restricciones**.

Esta metodología puede resumirse como sigue:

La **componente de la diagonal principal del tensor (funcional)** para una nueva dirección coordenada esta dada por:

$$t'_{kk} = x_i x_j t_{ij}$$

donde el vector unitario x_i corresponde a los términos de la matriz de rotación del nuevo eje k . La **norma de este vector unitario (restricción)** puede escribirse como:

$$x_i x_i = \delta_{ij} x_i x_j = 1.$$

Los valores de x_i para los que t'_{kk} es máximo o mínimo, sujeto a la condición $\delta_{ij} x_i x_j = 1$, se puede establecer utilizando los Multiplicadores de Lagrange:

$$F(x_i, \lambda) = x_i x_j t_{ij} - \lambda (\delta_{ij} x_i x_j - 1).$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = x_j t_{ij} - \lambda \delta_{ij} x_j = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \delta_{ij} x_i x_j - 1 = 0,$$

queda:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow (t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0.$$

Por lo tanto, **los valores extremos de la diagonal principal ocurren en las direcciones principales**.

1.5 Ley de Transformación de un Tensor de 2^{do} Orden

Análogamente al caso de un **vector o tensor de 1^{er} orden**, es posible establecer una ley de transformación para **tensores de 2^{do} orden**.

Esta ley puede ser enunciada como:

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl},$$

donde, de acuerdo a la **convención de Einstein**, se debe realizar una **doble sumatoria** sobre los subíndices k y l .

La **transformación inversa** puede ser establecida como:

$$t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl}.$$

1.6 Leyes de Transformación de Tensores cartesianos de orden N

Considerando las leyes de transformación de un tensor de 1^{er} orden (vector), y de transformación de un tensor de 2^{do} orden (matriz), es posible generalizar estos resultados para establecer la **ley de transformación de un tensor de orden cualquiera N**.

En resumen, las leyes de transformación de un tensor de orden n son:

$$A' = A \quad (N = 0: \text{Escalar})$$

$$A'_r = a_{ri} A_i \quad (N = 1: \text{Vector})$$

$$A'_{rs} = a_{ri} a_{sj} A_{ij} \quad (N = 2: \text{Matriz})$$

$$A'_{rst\dots} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} \dots A_{ijk\dots} \quad (N = N: \text{Tensor de orden N})$$

1.7 Notación Indicial e Implementación en Ordenadores

Una de las principales fortalezas de la teoría de tensores es su aplicación a la resolución de problemas prácticos de ingeniería.

En particular, esta teoría puede ser enfocada a materias como el análisis de estructuras, resistencia de materiales o a cualquier medio continuo que pueda ser modelado mediante elementos finitos.

La implementación de esta teoría se puede realizar mediante el análisis matricial con calculadoras portátiles o mediante la programación de subrutinas en lenguajes de programación de ordenadores.

Algunos lenguajes clásicos de programación, en los cuales se podrían implementar la teoría de tensores y su notación indicial asociada, son: FORTRAN, PASCAL, C++, etc.

Algunos softwares más “**amigables**” donde estas subrutinas se pueden desarrollar con facilidad son: VISUAL BASIC, MATHCAD, MATLAB, etc.

En estos lenguajes de programación, debido a la manera en que la compilación del código fuente establece las instrucciones en lenguaje de maquina, es que la **notación indicial** adquiere gran potencia por ser el lenguaje “**natural**” de comunicación entre el programador en notación indicial y el modo en como esto se implementa a nivel de hardware.

2 TENSOR DE TENSIONES

2.1 Introducción:

Ahora consideraremos el estudio más detallado de un caso particular de tensor de segundo orden: el **Tensor de Tensiones**. Se subentenderá que lo desarrollado para este tensor en particular, **será aplicable a cualquier otro tensor de segundo orden**.

El **tensor de tensiones** es uno de los más importantes tensores en el **análisis de tensiones en un medio continuo**, y corresponde al concepto que le dio originalmente el nombre a esta rama de la matemática.

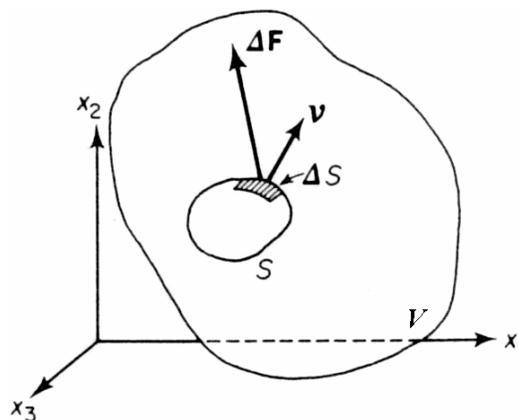
La característica principal de este tensor, es que permite definir el **“campo de tensiones”** en un punto al interior de un sólido.

En este capítulo estableceremos primero la definición y las características específicas de este tensor, y luego veremos la forma que adquieren algunas de las propiedades de los tensores de segundo orden, en este caso en particular.

2.2 Definición de Tensiones, Hipótesis Euler-Cauchy

Consideremos un cuerpo ocupando un volumen V en un tiempo t dentro de una superficie cerrada S . Nos interesa conocer la interacción entre el material interior y el exterior a esta superficie S . A partir de esta consideración, surge la definición del concepto básico de mecánica del continuo: el **Principio de Tensiones de Euler-Cauchy**.

Consideremos un elemento diferencial de superficie ΔS , sobre la superficie S , y su normal positiva ν_i hacia fuera de S . La parte de fuera de S ejerce sobre la de adentro una fuerza ΔF_i , que estará en función del área y orientación de la superficie considerada.



Si al tender $\Delta S \rightarrow 0$, el cociente $\Delta F_i / \Delta S$ tiende a un límite definido dF_i / dS , y si el momento de las fuerzas actuando sobre la superficie ΔS desaparece en el límite ($\Delta M_i / \Delta S \rightarrow 0$), entonces el límite al que tiende este cociente se define como:

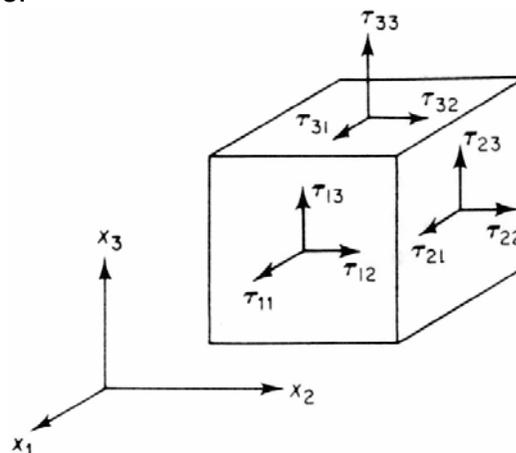
$$\overset{v}{T}_i = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S} = \frac{dF_i}{dS}.$$

Este límite recibe el nombre de “**vector de tensiones**” o “**tracción**”, y posee dimensiones de fuerza por unidad de superficie.

El vector de tensiones que representa **la acción del material exterior al elemento de superficie sobre el interior**, es igual en magnitud pero en dirección contraria, al que representa la acción del interior sobre el exterior.

2.3 Componentes Cartesianas de Tensiones. Fórmula de Cauchy

Consideremos ahora un caso particular, en el que las superficies planas ΔS_k son normales a los ejes cartesianos x_i , o lo que es lo mismo, que sus normales V_i son paralelas a los ejes dados.



En cada superficie tenemos un tensor de tensiones $\overset{1}{T}_i, \overset{2}{T}_i, \overset{3}{T}_i$, donde el índice superior representa la superficie sobre la cual actúa. Si descomponemos este vector en sus componentes tendremos:

$$\left(\overset{1}{T}_1, \overset{1}{T}_2, \overset{1}{T}_3 \right) = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$$

$$\left(\overset{2}{T}_1, \overset{2}{T}_2, \overset{2}{T}_3 \right) = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})$$

$$\left(\overset{3}{T}_1, \overset{3}{T}_2, \overset{3}{T}_3 \right) = (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$$

El conjunto de las nueve componentes de los tres vectores puede considerarse, como ya sabemos, un **tensor de segundo orden**, τ_{ij} , denominado **tensor de tensiones**.

Si conocemos los esfuerzos a través de tres planos perpendiculares entre si, T_i^a , T_i^b , T_i^c , podemos escribir el esfuerzo a través de **un plano cualquiera** cuya normal es V_i en función de estos esfuerzos.

Si escogemos los tres planos normales a los tres ejes coordenados, ellos definen las nueve componentes del tensor τ_{ij} y el esfuerzo T_i^v a través del plano cuya normal viene dado por:

$$T_i^v = V_j \tau_{ji}.$$

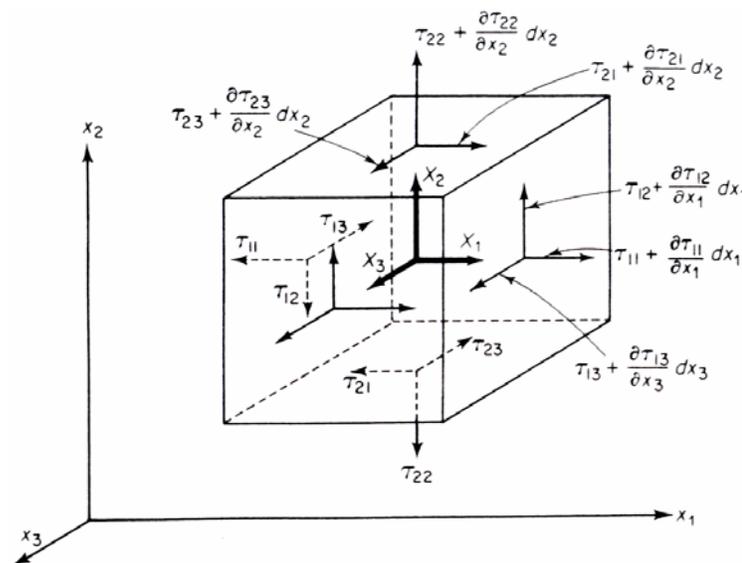
Si utilizamos la letra σ para **referirnos específicamente al tensor de tensiones**, y utilizamos las convenciones de notación indicial, la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\sigma_{vi} = V_k \sigma_{ki}.$$

2.4 Ecuaciones de Equilibrio

Consideremos un paralelepípedo infinitesimal de lados dx_i . El volumen es $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ y las áreas de las caras son $dS_1 = dx_2 dx_3$, $dS_2 = dx_1 dx_2$, etc.

Si los componentes del esfuerzo a través de la cara dS_2 son τ_{21} , τ_{22} y τ_{23} , y a través de la cara opuesta son: $\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2$, $\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2$, $\tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2$.



La ecuación de equilibrio del paralelepípedo, considerando que actúan fuerzas de volumen f_i , puede establecerse para una de las componentes como:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0,$$

y para las tres componentes como:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0.$$

Por tanto, la ecuación de **equilibrio de fuerzas** queda:

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0.$$

Análogamente, puede establecerse la **ecuación de equilibrio de momentos** considerando el momento de las fuerzas externas en torno al centro de gravedad del cuerpo, lo que queda:

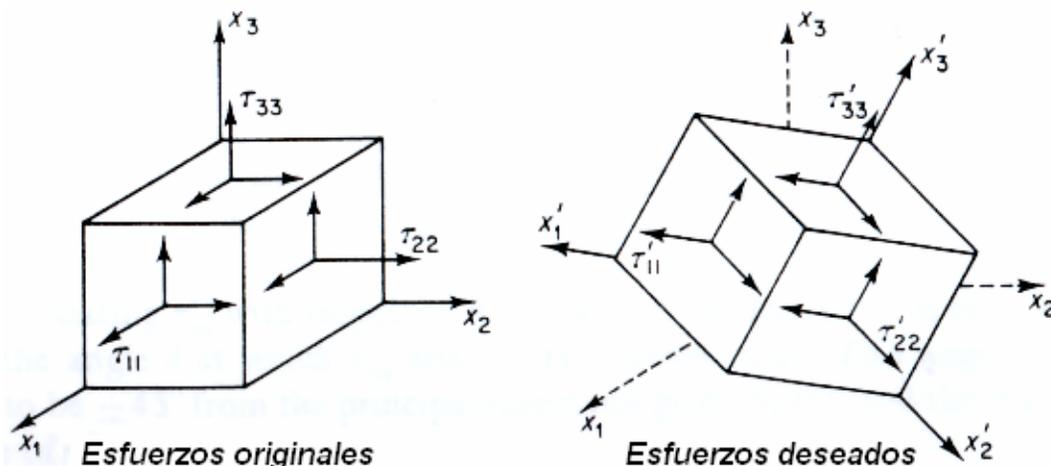
$$e_{ijk} \delta_{ij} \tau_{ik} = 0 \Leftrightarrow e_{ijk} \tau_{jk} = 0 \Leftrightarrow \tau_{jk} = \tau_{kj}.$$

Esta relación significa que en ausencia de momentos externos resultantes, **el tensor de tensiones es simétrico**.

2.5 Transformación de Coordenadas

Al igual que en secciones anteriores consideremos que las componentes del tensor de tensiones están definidas con respecto a un sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

Consideremos ahora, un segundo sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares $\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3$ con el **mismo origen** pero orientado en **diferente dirección** (ver figura).



Consideremos las componentes del tensor de tensiones en este nuevo sistema de referencia. Como sabemos, la relación entre los ejes de coordenadas de ambos sistemas esta dada por:

$$x'_k = \beta_{ki} x_i,$$

donde los β_{ij} son los **cosenos directores** del eje \vec{x}'_k con respecto al eje \vec{x}_i .

Dado que τ_{ij} es un tensor, podríamos escribir inmediatamente la ley de transformación, sin embargo, para enfatizar la importancia de este resultado, vamos a derivar esta ley basándonos en la **fórmula de Cauchy** derivada con anterioridad.

Esta fórmula establece que si dS es un elemento de superficie cuyo vector unitario normal \hat{v} tiene componentes v_i , entonces la fuerza por unidad de área actuando sobre la superficie dS es un vector \vec{T} con componentes:

$$T_i^v = \tau_{ji} v_j.$$

Si la normal \hat{v} se elige paralela a los ejes \vec{x}'_k , entonces:

$$v_1 = \beta_{k1}, \quad v_2 = \beta_{k2}, \quad v_3 = \beta_{k3},$$

entonces:

$$T_i^k = \tau_{ji} \beta_{kj}.$$

Las componentes del vector T_i^k en la dirección del eje x'_m esta dado por el producto de T_i^k y β_{mi} . De aquí, las componentes pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \tau'_{km} &= \sum_i \text{proy. de } T_i^k \text{ sobre } x'_m \\ &= T_1^k \beta_{m1} + T_2^k \beta_{m2} + T_3^k \beta_{m3} \\ &= \tau_{11} \beta_{m1} \beta_{k1} + \tau_{12} \beta_{m1} \beta_{k2} + \dots, \end{aligned}$$

es decir:

$$\tau'_{km} = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi}.$$

Como se puede apreciar, las **componentes del tensor de tensiones se transforman como un tensor cartesiano de segundo orden**. Así, el concepto físico de tensión descrito por τ_{ij} coincide con la definición matemática de un tensor de segundo orden en un espacio Euclidiano.

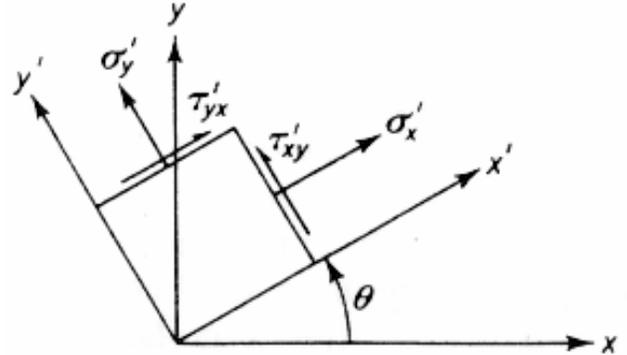
2.6 Estado Plano de Tensiones. Diagrama de Mohr en 2D

Consideremos un estado de tensiones en que:

$$\tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0.$$

Este estado se denomina “**estado plano de tensiones**” en el plano $x_1 - x_2$.

Consideremos la expresión que toman los esfuerzos al girar el sistema de coordenadas un ángulo θ .



Si τ_{11} , τ_{22} y τ_{33} son los valores de los esfuerzos en el sistema $x_1 x_2$, en el sistema $x'_1 x'_2$ serán τ'_{11} , τ'_{22} y τ'_{33} .

Veamos la forma que toman los esfuerzos al girar los ejes. Las coordenadas de un punto referidas al nuevo sistema vienen dadas por:

$$x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j,$$

y en nuestro caso:

$$x'_i = \beta_{ij} x_j,$$

donde los β_{ij} son los **cosenos directores** de los ejes x'_i referidos a x_j .

Para un **giro de coordenadas** la relación entre las coordenadas es:

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta,$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta.$$

La **fórmula de transformación** para un tensor de segundo orden es en general:

$$\tau'_{ij}(x'_1, x'_2, x'_3) = \tau_{lk}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k},$$

y en el caso de **una rotación de ejes cartesianos**:

$$\tau'_{ij} = \tau_{lk} \beta_{il} \beta_{jk}.$$

Desarrollando y poniendo los valores de β_{ij} en función del ángulo θ obtenemos las siguientes expresiones para las **componentes de los esfuerzos**:

$$\tau'_{11} = \tau_{11} \cos^2 \theta + \tau_{22} \sin^2 \theta + 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau'_{22} = \tau_{11} \sin^2 \theta + \tau_{22} \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta$$

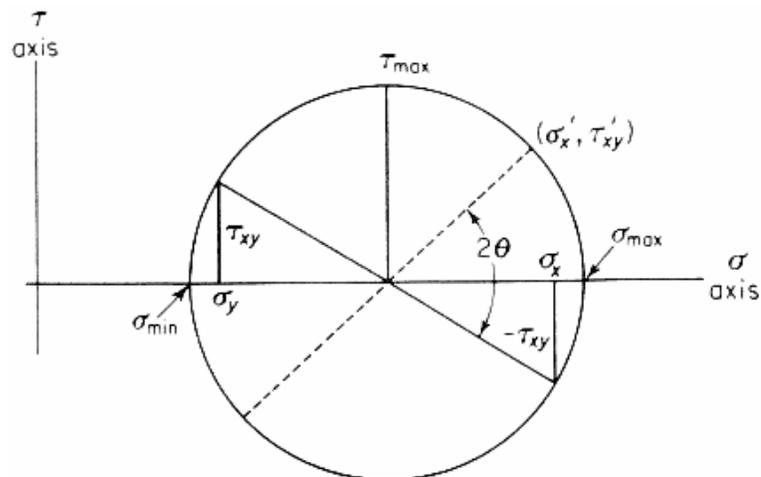
$$\tau'_{21} = (-\tau_{11} + \tau_{22}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{21} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Considerando las relaciones trigonométricas para el **ángulo doble**, $\sin^2 \theta = 1/2(1 - \cos 2\theta)$, $\cos^2 \theta = 1/2(1 + \cos 2\theta)$, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en función del ángulo θ en la forma:

$$\tau'_{11} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta + \tau_{21} \sin 2\theta,$$

$$\tau'_{22} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} - \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta - \tau_{21} \sin 2\theta,$$

$$\tau'_{21} = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \sin 2\theta + \tau_{21} \cos 2\theta.$$



Notar que, sumando las dos primeras expresiones anteriores se obtiene:

$$\tau'_{11} + \tau'_{22} = \tau_{11} + \tau_{22},$$

lo que demuestra, una vez más, la **invarianza de la traza del tensor** ante una transformación de coordenadas.

Buscamos ahora para qué valor del ángulo θ los esfuerzos normales τ'_{11} y τ'_{22} toman valores máximos o mínimos.

Para ésto derivamos τ'_{11} y τ'_{22} con respecto a θ :

$$\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial \theta} = -(\tau_{11} - \tau_{22}) \sin 2\theta + 2\tau_{21} \cos 2\theta = 2\tau'_{21},$$

$$\frac{\partial \tau'_{22}}{\partial \theta} = (\tau_{11} - \tau_{22}) \sin 2\theta - 2\tau_{21} \cos 2\theta = -2\tau'_{21}.$$

La condición para un máximo o un mínimo es que la **derivada sea cero**, lo que implica que para este caso los **esfuerzos de cizalle deben ser nulos**.

El ángulo para el que se cumple ésto, lo podemos deducir de la primera expresión anterior igualándola a cero. El valor de θ que corresponde es:

$$\tan 2\theta^* = \frac{2\tau_{21}}{\tau_{11} - \tau_{22}}.$$

Estas relaciones nos dicen que:

a) la suma de los esfuerzos normales es invariante bajo la rotación del sistema de coordenadas.

b) existe una orientación de los ejes definida por θ^* para la que los esfuerzos de cizalle se anulan.

Los ejes definidos por esta orientación reciben el nombre de **“ejes principales de esfuerzos”** y los esfuerzos normales correspondientes son los **“esfuerzos principales”**.

Los valores que toman los esfuerzos en la dirección de los ejes principales son máximos, o mínimos.

2.7 Componentes Normal y Tangencial de la Tensión

Consideremos ahora el problema de determinar la tensión en un punto P en una dirección determinada. Para esto, haremos pasar un plano imaginario por el punto, de modo que la normal a este plano ($\hat{\nu}$), sea la dirección de interés.

Para establecer el vector tensión en el plano elegido, deberemos “proyectar” el tensor que define el estado tensional en el punto, “sobre” el plano. Esto se logra

“multiplicando” el tensor de tensiones σ_{ij} , por el vector unitario direccional del plano \hat{V} , obteniéndose el vector tensión $\vec{\sigma}_v$ como:

$$\vec{\sigma}_v = \sigma_{vi} \cdot \hat{v} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|\hat{v}\|} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{v1} \\ \sigma_{v2} \\ \sigma_{v3} \end{Bmatrix}$$

Este vector a su vez, puede ser “descompuesto” en sus componentes normal y tangencial al plano \hat{V} , escribiéndose como:

$$\vec{\sigma}_v = \sigma_{vn} \hat{v} + \sigma_{vt} \hat{t}$$

La magnitud de la componente normal σ_{vn} , puede obtenerse proyectando el vector $\vec{\sigma}_v$ sobre la dirección perpendicular al plano, como:

$$\|\sigma_{vn}\| = \vec{\sigma}_v \cdot \hat{v} = (\sigma_{v1} \quad \sigma_{v2} \quad \sigma_{v3}) \cdot (\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3),$$

y la magnitud de la componente tangencial puede obtenerse a partir de:

$$\|\vec{\sigma}_v\|^2 = \|\sigma_{vn}\|^2 + \|\sigma_{vt}\|^2.$$

2.8 Esfuerzos Principales

En el caso general, el estado tensional en un punto depende de la dirección considerada en el análisis. Esta dirección determina el vector de tensiones actuando sobre este plano.

Ahora estamos interesados en **encontrar la dirección de un plano**, de tal modo, que la proyección tangencial del vector de tensiones sea nula, es decir, **no exista esfuerzo de corte**. Esta situación se produce exactamente cuando el vector de tensiones es **perpendicular** al plano buscado.

Los planos así determinados se denominan **planos principales**, y las direcciones que los definen, se denominan **direcciones principales**.

Los valores de las tensiones actuando sobre los planos principales se denominan **tensiones o esfuerzos principales**.

Como ya vimos en secciones anteriores, la expresión matemática que permite encontrar las direcciones de los planos principales buscados, se puede escribir en este caso como:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})v_i = 0.$$

Las soluciones **no triviales** de este sistema de ecuaciones homogéneas corresponden a las tres direcciones principales buscadas, y sus correspondientes valores de σ , a los valores principales.

Se debe recordar de la teoría de matrices que, dado que la matriz σ_{ij} es real y simétrica, la solución de este problema de valores propios posee tres **valores reales de esfuerzos principales** y un **conjunto ortonormal de ejes principales**.

A continuación se describen algunos conceptos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones descrito como solución al problema de determinar los esfuerzos principales.

2.8.1 Invariantes del Tensor de Tensiones

Existe un número de combinaciones escalares algebraicas de los componentes del tensor de tensiones, que no son alteradas por la rotación de los ejes coordenados. Estas combinaciones se denominan **“invariantes de tensiones”**.

Las **invariantes principales** del tensor de tensiones corresponden a:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{Traza}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{(i+1)(i+1)} - \sigma_{i(i+1)}^2) = (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)$$

$$I_3 = e_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} = \|\sigma_{ij}\|$$

2.8.2 Ecuación Característica

Considerando los valores de los invariantes principales del tensor, es posible establecer la **ecuación característica** de éste como:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0.$$

Esta ecuación surge de considerar las soluciones no triviales del sistema, dado por la condición del **determinante nulo**: $|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$.

2.8.3 Valores de las Tensiones Principales

La resolución de la ecuación anterior, mediante métodos numéricos, permite establecer los **valores propios** o **principales** de este tensor.

Las **“raíces”** o soluciones de esta ecuación, corresponden siempre a 3 valores reales. El ordenamiento de estos valores de **mayor a menor**, permite identificar las tensiones principales como:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

2.8.4 Determinación de las Direcciones Principales:

Cada valor principal del tensor tiene asociado una dirección principal. Estas direcciones principales pueden ser determinadas a partir de considerar las condiciones de **ortogonalidad** y de **magnitud unitaria** de los vectores considerados:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) \cdot n_{jk} = 0,$$

$$n_i n_i = 1.$$

2.9 Tensor Desviatorio

Un tensor que merece especial atención debido a sus propiedades singulares, es el **tensor desviatorio**. Este tensor es muy importante en teoría de plasticidad. En esta sección, realizaremos una breve presentación de él.

Siempre es posible descomponer un tensor arbitrario en un término de **tensión (ó compresión) uniforme** (parte **“esférica”**) y un término de **corte puro** (parte **“desviatoria”**), como sigue:

$$\text{Tensor} = \text{Esférico} + \text{Desviatorio}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \sigma_{ij}^d$$

El tensor desviatorio es definido por tanto como:

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

donde el término $\frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$ se denomina a veces **“estado de tensiones hidrostático puro”**.

También se acostumbra utilizar la siguiente convención para establecer el tensor desviatorio:

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$$

donde el término σ_o se denomina “**tensión media**” y puede expresarse como:

$$\sigma_o = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} I_1.$$

El tensor desviatorio posee la importante propiedad de que **su primera invariante es siempre nula** ($I_1^d = 0$), y que sus otras invariantes están relacionadas de la siguiente forma con las invariantes del tensor original:

$$I_2^d = I_2 - 3\sigma_o^2,$$

$$I_3^d = I_3 - I_2\sigma_o + 2\sigma_o^3.$$

2.10 Tensor Esférico

Considerando la definición de la tensión media, el tensor esférico puede establecerse como el tensor que esta conformado por “**tensiones medias**” en los elementos de su **diagonal principal** y por **valores nulos** en las **otras posiciones**:

$$\sigma_{ij}^{esf} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Se considerará el siguiente tensor en coordenadas cartesianas ortogonales para establecer lo que se indica:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 6.5 & -2.0 & 1.5 \\ -2.0 & 8.1 & -1.0 \\ 1.5 & -1.0 & 7.5 \end{pmatrix}.$$

Invariantes Principales:

$$I_1 = t_{ii} = 6.5 + 8.1 + 7.5 = 22.1$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= (t_{22} \cdot t_{33} - t_{23}^2) + (t_{11} \cdot t_{33} - t_{13}^2) + (t_{11} \cdot t_{22} - t_{12}^2) \\
 &= (8.1 \cdot 7.5 - 1.0 \cdot 1.0) + (6.5 \cdot 7.5 - 1.5 \cdot 1.5) + (6.5 \cdot 8.1 - 2.0 \cdot 2.0) = 59.75 + 46.50 + 48.65 = 154.90 \\
 I_3 &= \left\| t_{ij} \right\| = 6.5(8.1 \cdot 7.5 - 1.0 \cdot 1.0) - (-2.0)(-2.0 \cdot 7.5 + 1.0 \cdot 1.5) + 1.5(2.0 \cdot 1.0 - 8.1 \cdot 1.5) \\
 &= 388.375 - 27.000 - 15.225 = 346.150
 \end{aligned}$$

Ecuación Característica:

$$\begin{aligned}
 -t^3 + I_1 \cdot t^2 - I_2 \cdot t + I_3 &= 0 \\
 -1 \cdot t^3 + 22.1 \cdot t^2 - 154.90 \cdot t + 346.150 &= 0
 \end{aligned}$$

Valores Principales:

$$\Rightarrow (t_1 \quad t_2 \quad t_3) = (10.4331 \quad 6.7560 \quad 4.9109)$$

Direcciones Principales:

Las direcciones principales se establecen resolviendo el sistema: $(t_{ij} - t_k \delta_{ij}) \cdot n_{jk} = 0$ para cada uno de los valores propios t_k (ver ejemplo resuelto a continuación). En este caso se obtiene, para las **direcciones principales expresadas como vectores columnas** lo siguiente:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} -0.7932 & 1.0000 & 0.0037 \\ 1.0000 & 0.5069 & 0.7495 \\ -0.7466 & -0.3836 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Comprobar, usando la ley de transformación de coordenadas, que al hacer una rotación de manera que los nuevos ejes coincidan con las direcciones principales, el tensor toma su forma canónica:

En general, la ley de transformación de coordenadas de un tensor puede escribirse en **términos matriciales** como:

$$[t'] = [A] \cdot [t] \cdot [A]^T.$$

En este caso de estudio, estamos interesados en que los nuevos ejes coincidan con las direcciones principales. Para hacer esto, la matriz $[A]$ debe estar confeccionada a partir de las direcciones principales como los **vectores filas** de la matriz

transformación, estando estos **previamente normalizados**, tal como se señala a continuación:

$$[t'] = \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.6763 & -0.5049 \\ 0.8440 & 0.4278 & -0.3237 \\ 0.0030 & 0.5997 & 0.8002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.5 & -2.0 & 1.5 \\ -2.0 & 8.1 & -1.0 \\ 1.5 & -1.0 & 7.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.8440 & 0.0030 \\ 0.6763 & 0.4278 & 0.5997 \\ -0.5049 & -0.3237 & 0.8002 \end{bmatrix}$$

$$[t'] = \begin{bmatrix} -5.5966 & 4.1449 & 0.0204 \\ 7.0557 & 2.1009 & 4.0514 \\ -5.2677 & -1.5896 & 5.4063 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.8440 & 0.0030 \\ 0.6763 & 0.4278 & 0.5997 \\ -0.5049 & -0.3237 & 0.8002 \end{bmatrix}$$

$$[t'] = \begin{bmatrix} 10.4334 & 0.0001 & -0.0006 \\ 0.0001 & 4.9115 & 0.0004 \\ -0.0006 & 0.0004 & 6.7558 \end{bmatrix}.$$

A partir de este resultado, salvo errores de redondeo debido a haber trabajado con 4 cifras decimales, se aprecia que se obtiene la forma canónica del tensor, donde en la diagonal principal se encuentran los valores principales o propios, y los elementos fuera de la diagonal son nulos. ■

NOTA:

Algunas calculadoras tienen implementados algoritmos que permiten realizar en forma rápida los cálculos realizados en este ejemplo. Por ejemplo, las calculadoras **Hewlett Packard 48GX** poseen las siguientes subrutinas:

Para hallar las raíces de la ecuación característica puede utilizarse el “**solucionador**” de raíces de un polinomio:

SOLVE POLY COEFFICIENTS $[A_N \dots A_1 A_0]$

En nuestro caso: $[-1 \ 22.1 \ -154.9 \ 346.15] \Rightarrow [4.9109 \ 6.7560 \ 10.4331]$

Para hallar los valores y vectores propios de una matriz cuadrada:

MATH MATR NXT EGV, devuelve en el **nivel 2** una matriz de $n \times n$ **vectores propios** y en el **nivel 1** un vector de n elementos de **valores propios**. Las **columnas** de la matriz del nivel 2 representan los **vectores propios** correspondientes a los **valores propios** del nivel 1.

Ejemplo:

Considerando que en un punto dado de un continuo las componentes del tensor de esfuerzo son las que se indican, se puede calcular lo siguiente:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Invariantes Principales:

$$I_1 = \sigma_{ii} = 1/4 + 2 + 3/4 = 3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)$$

$$= (3/2 - 2) + (3/16 - 3/16) + (1/2 - 6) = -6$$

$$I_3 = |\sigma_{ij}| = \frac{1}{4}(3/2 - 2) + \sqrt{6}(-3\sqrt{6}/4 - \sqrt{6}/4) + \frac{-\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3} - \sqrt{3}/2) = -1/8 - 6 - 15/8 = -8$$

Ecuación Característica:

$$-\sigma^3 + I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma + I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sigma^3 + 3 \cdot \sigma^2 + 6 \cdot \sigma - 8 = 0$$

Tensiones Principales:

$$-\sigma^3 + 3 \cdot \sigma^2 + 6 \cdot \sigma - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) = (4 \quad 1 \quad -2)$$

Direcciones Principales:

Direcciones del esfuerzo principal para $\sigma_1 = 4$: $(\sigma_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) \cdot n_{j1} = 0$

$$\begin{pmatrix} -15/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & -13/4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -15/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} \cdot n_{11} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \\ -\sqrt{3}/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{2} \cdot n_{21} & -13/4 \cdot n_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el subsistema $\begin{pmatrix} -15/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} \cdot n_{11} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ con $n_{11} = 1$ tenemos:

$$\begin{vmatrix} -15/4 & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad n_{i1}^t = [1 \quad -2\sqrt{6}/3 \quad \sqrt{3}/3]$$

$$\Rightarrow \quad n_{i1}^t = [1/2 \quad -\sqrt{6}/3 \quad \sqrt{3}/6]$$

Análogamente, para $\sigma_2 = 1$ y $\sigma_3 = -2$:

$$n_{i2}^t = [1/2 \quad 0 \quad -\sqrt{3}/2] \quad \text{y} \quad [\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/3 \quad \sqrt{6}/6].$$

NOTA:

Una forma de comprobar que sus cálculos están correctos, es realizar el **producto cruz** entre dos cualquiera de estos vectores y verificar que se obtiene el tercero (eventualmente este podría resultar con un cambio de signo).

Esfuerzos Máximos de Cizalle:

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} |1 - (-2)| = \frac{3}{2}$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| = \frac{1}{2} |-2 - 1| = \frac{3}{2}$$

$$\tau_{23} = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| = \frac{1}{2} |1 - (-2)| = \frac{3}{2}$$

Tensor Desviatorio o de Desviación:

Descontando del tensor dado, el tensor de **esfuerzo esférico**, se obtiene el tensor desviatorio como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} = \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & 3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & -1/4 \end{bmatrix}.$$

2.11 Elipsoide de Lamé

Estudiaremos ahora una forma de **representar gráficamente el tensor de tensiones**. Esta representación fue desarrollada por **Cauchy** y **Lamé** en los inicios del desarrollo de la **Teoría de la Elasticidad** (1820-1830).

Consideraremos que se elige un **sistema de coordenadas que coincide con las direcciones de las tensiones principales** del tensor de tensiones en un punto.

En este caso, el tensor adquiere su **forma canónica**, es decir, con los valores de las tensiones principales en la diagonal y con elementos nulos fuera de ésta.

Las **componentes del vector tensión** para un plano de dirección cualquiera de normal \vec{v} , se pueden escribir como:

$$T_i^v = v_k \sigma_{ki} = v_i \sigma_i \quad (\text{sin suma sobre } i)$$

ó, término a término como:

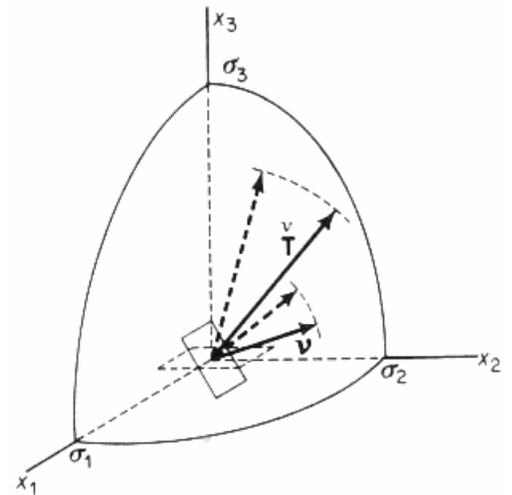
$$T_1^v = v_1 \sigma_1, \quad T_2^v = v_2 \sigma_2, \quad T_3^v = v_3 \sigma_3.$$

Considerando además, que \vec{v} es un vector unitario:

$$v_k v_k = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1,$$

las componentes del vector tensión deben satisfacer la relación:

$$\left(\frac{T_1^v}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2^v}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{T_3^v}{\sigma_3}\right)^2 = 1.$$



Esta ecuación corresponde al **lugar geométrico de un elipsoide** con respecto al sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares T_i^v , donde los **semi-ejes** poseen los valores $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

En este caso, las **invariantes del tensor de tensiones** adquieren los siguientes **significados geométricos**:

- $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ es la suma de los 3 principales **radios** del elipsoide.
- $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{\pi}(A_1 + A_2 + A_3)$ es proporcional a la suma de las 3 **áreas** de las elipses principales.
- $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \frac{3}{4\pi}V$ es proporcional al **volumen** del elipsoide.

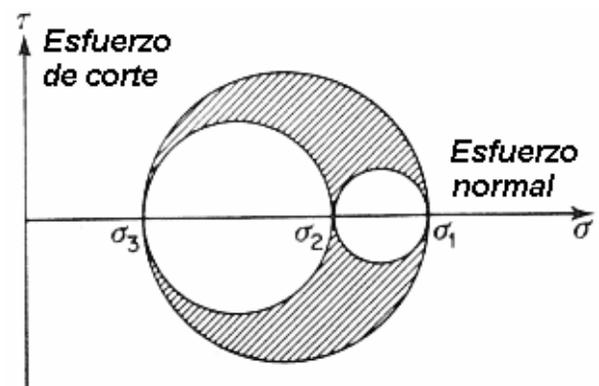
2.12 Diagrama de Mohr en 3D

Consideraremos ahora la **representación gráfica del tensor de tensiones en 3 dimensiones**. Esta representación es análoga a la desarrollada anteriormente para el caso de 2 dimensiones.

Esta manera de representar el estado tensional en un punto, fue desarrollada por **Otto Mohr** en una serie de trabajos publicados entre 1882 y 1900.

El **diagrama** o **círculo de Mohr en 3D**, considera la representación de los esfuerzos que actúan en una sección cualquiera, representados en un espacio de ejes $\sigma - \tau$ (**esfuerzo normal vs. esfuerzo tangencial**).

En este diagrama se considera que la representación de los 3 esfuerzos principales existentes en un punto, permiten definir 3 círculos, mediante el cálculo de los **centros** y **radios** de éstos.



El análisis de las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales, que resuelven el problema de encontrar los esfuerzos máximos, permite establecer la **factibilidad** física del estado tensional dado.

El lugar geométrico donde estas soluciones son posibles, corresponde a la zona achurada en la figura. Esta zona comprende a los puntos que están **directamente sobre los círculos**, y a los puntos que están **simultáneamente al exterior de los círculos $\sigma_1 - \sigma_2$ ó $\sigma_2 - \sigma_3$, y al interior del círculo $\sigma_1 - \sigma_3$** .

Las direcciones v_i , sobre las cuales ocurren los esfuerzos máximos normales y los máximos tangenciales, pueden determinarse a partir de:

$$v_i^2 = \frac{\sigma_v^2 + (\sigma_{vv} - \sigma_{i+1})(\sigma_{vv} - \sigma_{i+2})}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})(\sigma_i - \sigma_{i+2})}$$

3 ANÁLISIS DE DEFORMACIÓN

3.1 Introducción:

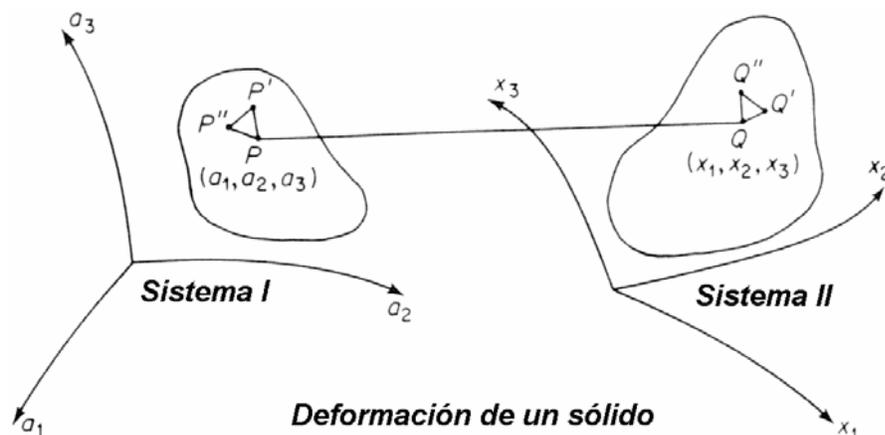
En este capítulo consideraremos la deformación de un cuerpo como el “*mapeo*” de un cuerpo desde un **estado original (Sistema I)** a un **estado deformado (Sistema II)**.

Se utilizarán los **Tensores Métricos Euclidianos** para definir **la longitud del elemento de línea** en cada sistema y se utilizará esto para medir deformaciones.

La manera de “*medir*” deformaciones, nos permitirá establecer dos definiciones del tensor de deformación: un tensor en **Coordenadas Lagrangianas**, denominado **Tensor de Deformación de Green**, y un tensor en **Coordenadas Eulerianas**, denominado **Tensor de Deformación de Almansi**.

3.2 Deformación

Consideremos un sistema de coordenadas a_i (**Sistema I**) en el que se describe la **posición** de un punto P de un cuerpo. En un instante posterior de tiempo, el cuerpo se **mueve (deforma)** a una nueva configuración, en la cual el punto P se mueve al punto Q de coordenadas x_i en el **Sistema II**.



Las ecuaciones de transformación entre ambos sistemas pueden ser escritas como:

$$x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3),$$

$$a_i = \hat{a}_i(x_1, x_2, x_3).$$

Nos interesa conocer la **descripción de la deformación del sólido**, es decir, su “*alargamiento*” y su “*distorsión*”. Para analizar esto, consideraremos tres puntos vecinos formando un triángulo en la configuración original del sólido, puntos P , P' y P'' que se transformaron en los puntos Q , Q' y Q'' en la configuración deformada.

La **descripción del cambio de distancia** entre dos puntos cualesquiera del cuerpo es la clave para el análisis de la deformación.

Consideremos **un elemento de línea infinitesimal** conectando el punto $P(a_1, a_2, a_3)$ con el punto vecino $P'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$.

El **cuadrado de la longitud** ds_o de PP' en la **configuración original** puede escribirse como:

$$ds_o^2 = a_{ij} da_i da_j$$

donde a_{ij} , evaluado en el punto P , es el **tensor métrico Euclidiano** para el sistema de coordenadas a_i .

Cuando los puntos P y P' se deforman a los puntos $Q(x_1, x_2, x_3)$ y $Q'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, respectivamente, el cuadrado de la longitud ds del nuevo elemento QQ' es:

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j,$$

donde g_{ij} es el **tensor métrico Euclidiano** para el sistema de coordenadas x_i .

Utilizando las **ecuaciones de transformación**, los cuadrados de las longitudes pueden establecerse como:

$$ds_o^2 = a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx_l dx_m,$$

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l da_m.$$

La **diferencia entre los cuadrados de los elementos de longitud** puede ser escrita, luego de algunos cambios en los subíndices mudos, ya sea como:

$$ds^2 - ds_o^2 = \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij} \right) da_i da_j,$$

o como:

$$ds^2 - ds_o^2 = \left(g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j .$$

Se pueden definir entonces los **Tensores de Deformación de Green y de Almansi** como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij} \right) ,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) ,$$

de modo que:

$$ds^2 - ds_o^2 = 2E_{ij} da_i da_j ,$$

$$ds^2 - ds_o^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j .$$

Los tensores E_{ij} y e_{ij} son tensores en los sistemas de coordenadas a_i y x_i , respectivamente, y satisfacen las ecuaciones de transformación descritas en cada uno de los sistemas coordenados.

3.3 Tensores de Deformación en Coordenadas Cartesianas

Si se utiliza el **mismo** sistema de **coordenadas rectangulares Cartesianas (rectilíneo y ortogonal)**, para describir tanto el sistema original como la configuración deformada del cuerpo, entonces:

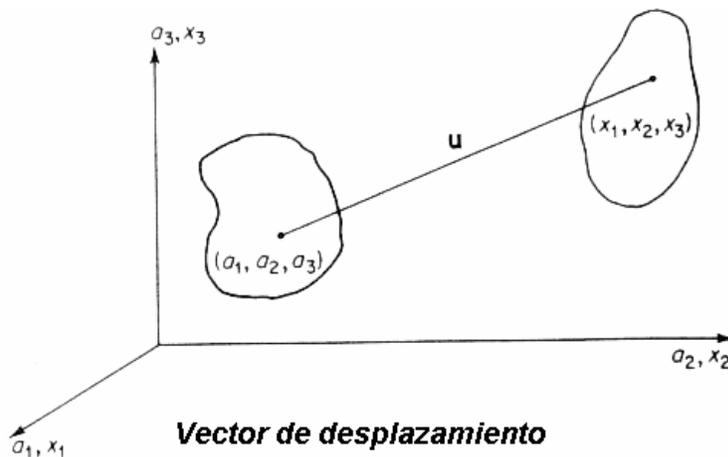
$$g_{ij} = a_{ij} = \delta_{ij} .$$

Además, si se introduce el vector de desplazamiento \vec{u} con componentes:

$$u_i = x_i - a_i ,$$

entonces:

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i} , \quad \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} ,$$



y los **tensores de deformación** se reducen a las formas simples siguientes:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right],$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right],$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right],$$

y:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right],$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(-\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j} \right) \right],$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right].$$

Si consideramos el siguiente **cambio de notación**:

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \rightarrow (x \quad y \quad z),$$

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3) \rightarrow (u \quad v \quad w),$$

los tensores de deformación pueden escribirse como:

$$E_{ab} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} \right) \right],$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].$$

Notar que cuando el **tensor de deformación Lagrangiano** se evalúa, se considera que u, v, w son funciones de a, b, c , que son la posición de los puntos en el cuerpo en la **configuración no deformada**, mientras que cuando se evalúa el tensor de deformación **Euleriano**, son funciones de x, y, z , que son la posición de los puntos en la **configuración deformada**.

Si se considera que las componentes del desplazamiento u_i son tales que, sus **primeras derivadas son pequeñas** y que los **cuadrados y los productos de las derivadas parciales son despreciables**, el Tensor de **Green** se reduce al **Tensor de Deformación Infinitesimal de Cauchy**:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right].$$

En notación sin subíndices:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = e_{yx}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = e_{zx}, \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = e_{zy}. \end{aligned}$$

NOTA: En el caso de desplazamientos infinitesimales, la distinción entre tensores de deformación Lagrangianos y Eulerianos, desaparece.

3.4 Interpretación Geométrica de los Componentes de Deformación Infinitesimales

Sea x, y, z un conjunto de **coordenadas rectangulares Cartesianas**. Consideremos un elemento de línea de longitud dx paralelo al **eje x** ($dy = dz = 0$).

El cambio en el cuadrado de la longitud de este elemento debido a la deformación es:

$$ds^2 - ds_o^2 = 2e_{xx}(dx)^2,$$

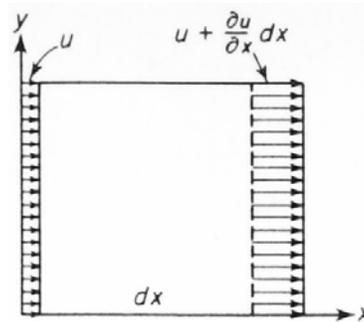
de aquí:

$$ds - ds_o = \frac{2e_{xx}(dx)^2}{ds + ds_o},$$

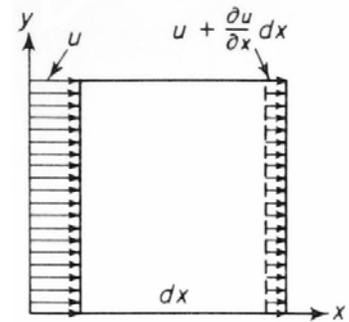
pero $ds = dx$ en este caso, y ds_o difiere de ds solo en una pequeña cantidad de segundo orden, entonces:

$$\frac{ds - ds_o}{ds} = e_{xx}.$$

Se aprecia que e_{xx} representa una **extensión** o **cambio de longitud por unidad de longitud** del vector paralelo al *eje*- x (casos 1).



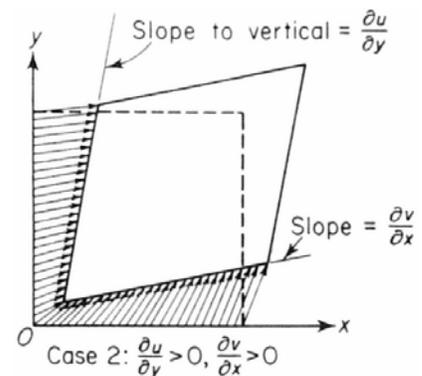
Case 1: $\frac{\partial u}{\partial x} > 0, v = 0$



Case 1: $\frac{\partial u}{\partial x} < 0, v = 0$

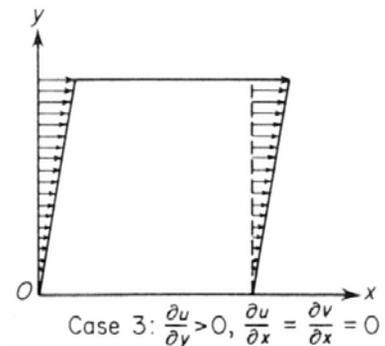
El significado de e_{xy} puede entenderse como el **cambio de ángulo** xOy , el que originalmente estaba en ángulo recto (casos 2, 3 y 4):

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\text{cambio en ángulo } xOy).$$



Case 2: $\frac{\partial u}{\partial y} > 0, \frac{\partial v}{\partial x} > 0$

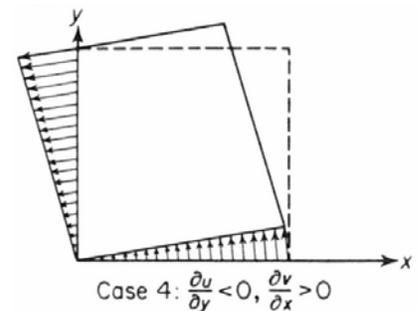
En usos de ingeniería, el doble de las componentes de deformación, es decir, $2e_{ij}$ ($i \neq j$) se denominan **deformaciones por corte**. Este título es especialmente sugestivo en el caso 3, de corte puro.



Case 3: $\frac{\partial u}{\partial y} > 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

La cantidad: $w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, se denomina la **rotación infinitesimal** del elemento $dx dy$. Esta terminología se sugiere en el caso 4.

Si $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ entonces $e_{xy} = 0$, y w_z es en realidad el ángulo al cual el elemento es rotado como un **cuerpo rígido**.



Case 4: $\frac{\partial u}{\partial y} < 0, \frac{\partial v}{\partial x} > 0$

3.5 Tensor de Rotación: Teorema de Helmholtz

Considerando un campo de desplazamiento infinitesimal $u_i(x_1, x_2, x_3)$, se puede definir el **tensor de rotación** como:

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Dado que este tensor es **antisimétrico** ($w_{ij} = -w_{ji}$), siempre es posible escribirlo en forma equivalente como:

$$w_k = \frac{1}{2} e_{kij} w_{ij}, \quad \left(\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \right),$$

o bien:

$$w_k = \begin{cases} w_{23} \\ w_{31} \\ w_{12} \end{cases}.$$

Dado que w_{ij} es antisimétrico, posee una **inversa única**:

$$w_{ij} = e_{ijk} w_k = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para entender el **significado físico** de estas cantidades, realizaremos el ejercicio siguiente.

Consideremos un punto $P(x_i)$ al interior de un cuerpo en equilibrio, en el cual el **corrimiento** es u_i^P . En un punto $Q(x_i + dx_i)$ cercano a P , el corrimiento será $u_i^Q = u_i^P + du_i$. Como $u_i = u_i(x_j)$, el **cambio de la función corrimiento** se puede expresar como $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$, con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_i^Q &= u_i^P + w_{ij} dx_j \\
 &= u_i^P + \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dx_j - \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) dx_j \\
 &= u_i^P + e_{ij} dx_j - w_{ij} dx_j \\
 &= u_i^P - e_{ijk} w_k dx_j + e_{ij} dx_j \\
 &= \text{traslación} + \text{giro} + \text{deformación}
 \end{aligned}$$

Teorema de Helmholtz: “Para pequeñas deformaciones y rotaciones, el campo de corrimientos en el entorno del punto P , se puede descomponer en una traslación u_i^P , una rotación w_{ij} y una deformación propiamente tal e_{ij} ”.

3.6 Componentes de Compatibilidad de Deformaciones

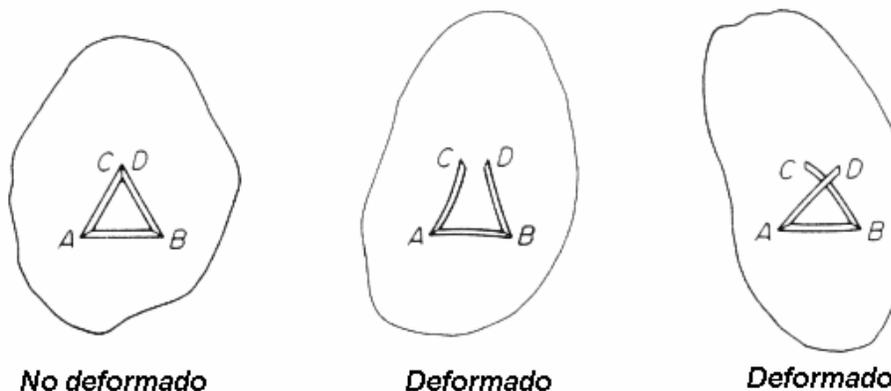
Si conocemos las 6 componentes del tensor de deformación, que son función de las derivadas de las 3 componentes de corrimientos, tenemos un sistema de 6 ecuaciones para resolver 3 funciones desconocidas.

Este sistema de ecuaciones, **en el caso general, no posee solución única** si es que las deformaciones no satisfacen ciertas condiciones.

Las condiciones que deben poseer las deformaciones, para poder resolver este sistema de ecuaciones, se denominan **relaciones de compatibilidad**.

Estas relaciones de compatibilidad reflejan la **integridad física del sólido**, es decir, que el cuerpo no se “rompa”.

Para ilustrar este concepto, consideremos el análisis de la figura.



En esta figura, se observa un triángulo continuo en un cuerpo no deformado. Si deformamos el cuerpo a través de un **campo de deformación**, partiendo desde el punto **A**, podríamos finalizar en el punto **C** y en el **D**, ya sea con un “**gap**” entre estos puntos, o con un “**traslape**” del material (posiciones deformadas en la figura).

Para que el sistema de ecuaciones planteado, posea una solución única, los puntos finales **C** y **D** **deben coincidir perfectamente** en la configuración deformada del cuerpo.

Lo anterior no puede ser garantizado a menos que el **campo de deformaciones**, a lo largo de las aristas de los triángulos, **obedezcan** las **condiciones de compatibilidad**.

Para resolver este sistema de ecuaciones (**ecuaciones diferenciales no lineales**), debemos considerar primero el **caso de deformación lineal infinitesimal**:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad \text{ó} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Diferenciando la expresión anterior, e intercambiando subíndices, se puede obtener:

$$e_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}),$$

$$e_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}),$$

$$e_{jl,ik} = \frac{1}{2} (u_{j,tik} + u_{l,jik}),$$

$$e_{ik,jl} = \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}).$$

El análisis de las expresiones anteriores, nos permite establecer la **ecuación de compatibilidad de Saint Venant** (establecida por él, en 1860) como:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0.$$

En esta ecuación, los 4 subíndices representan 81 ecuaciones, pero de éstas, solo hay 6 independientes, las demás ecuaciones corresponden a identidades, o toman en cuenta la simetría de los tensores e_{ij} y e_{kl} .

Las 6 ecuaciones, escritas en notación sin subíndices, son:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right),$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2},$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2},$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}.$$

3.7 Componentes de Deformaciones Finitas

Cuando los componentes de deformación no son pequeños, ya no es posible dar interpretaciones geométricas simples de los componentes del tensor de deformaciones.

3.7.1 Deformación Extensional

Consideremos un conjunto de coordenadas Cartesianas ortogonales, tal como lo hicimos al inicio de este capítulo. Sea $da_1 = ds_o$, $da_2 = 0$, $da_3 = 0$ un elemento de línea antes de la deformación. La deformación extensional de este elemento esta definida por:

$$E_1 = \frac{ds - ds_o}{ds_o}, \quad \text{o} \quad ds = (1 + E_1)ds_o.$$

Considerando la **definición del tensor de deformación de Almansi**, se puede establecer que:

$$ds^2 - ds_o^2 = (1 + E_1)^2 ds_o^2 - ds_o^2 = 2E_{11}da_1da_1 = 2E_{11}ds_o ds_o,$$

lo que se transforma en:

$$(1 + E_1)^2 - 1 = 2E_{11}, \quad \text{o} \quad E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1.$$

Si se consideran pequeñas deformaciones, el término $2E_{11}$ es pequeño comparado con 1, y podemos hacer un **desarrollo de Taylor** de la función raíz, conservando sólo el primer término de la expansión, obteniendo:

$$E_1 = E_{11}.$$

Si generalizamos este resultado considerando direcciones paralelas a los otros ejes coordenados, podemos decir que, **para pequeñas deformaciones, las componentes del tensor de deformaciones representan las deformaciones extensionales en las direcciones de coordenadas.**

3.7.2 Deformación Angular

Consideremos ahora el caso de determinar la deformación angular en un punto de un cuerpo, cuyas direcciones originales se encontraban perpendiculares entre si.

Para esto, consideraremos dos elementos de línea $d\vec{s}_o$ y $d\vec{s}_o$ que se encontraban en ángulo recto en el estado original, dados por:

$$d\vec{s}_o: \quad da_1 = ds_o, \quad da_2 = 0, \quad da_3 = 0$$

$$d\vec{s}_o: \quad da_1 = 0, \quad da_2 = ds_o, \quad da_3 = 0$$

Después de la deformación, estos elementos de línea se transforman en $d\bar{s}$ y $d\bar{s}^{\vec{}}$. Si se realiza el producto escalar de los elementos deformados, se obtiene:

$$ds d\bar{s} \cos \theta = dx_k d\bar{x}_x = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} da_i \frac{\partial x_k}{\partial a_j} d\bar{a}_j = \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial a_2} ds_o d\bar{s}_o.$$

Considerando la expresión de la definición del tensor de deformación de Almansi, se obtiene:

$$ds d\bar{s} \cos \theta = 2E_{12} ds_o d\bar{s}_o,$$

lo que, en conjunto con la forma que adquieren los elementos de línea en este caso:

$$ds = \sqrt{1 + 2E_{11}} ds_o, \quad d\bar{s} = \sqrt{1 + 2E_{22}} d\bar{s}_o,$$

finalmente resulta:

$$\cos \theta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}}.$$

Este ángulo θ corresponde al ángulo entre los elementos de línea $d\bar{s}$ y $d\bar{s}^{\vec{}}$ **después** de la deformación. El **cambio del ángulo** entre los elementos de línea, los que en el **estado original** eran $d\bar{s}_o$ y $d\bar{s}_o^{\vec{}}$ ortogonales, corresponde a $\alpha_{12} = \pi/2 - \theta$:

$$\sin \alpha_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}}.$$

La expresión anterior, en el caso de deformaciones infinitesimales, puede reducirse a:

$$\alpha_{12} = 2E_{12}.$$

NOTA: Todas la derivaciones anteriores, de las fórmulas de deformación extensional y angular, se desarrollaron considerando el **tensor de deformación de Almansi (interpretación Lagrangeana)**. Una interpretación completamente análoga, puede derivarse para el caso del **tensor de deformación de Green (interpretación Euleriana)**:

La extensión e_1 por unidad de longitud **“deformada”** puede definirse como:

$$e_1 = \frac{ds - ds_o}{ds},$$

encontrándose que:

$$e_1 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{11}}.$$

Aún más, si la desviación a partir de un ángulo recto de dos elementos de línea en el estado original, los cuales después de la deformación son ortogonales, se denota por β_{12} , se tiene:

$$\sin \beta_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1 - 2e_{11}} \sqrt{1 - 2e_{22}}}.$$

Esto nuevamente se puede reducir, en el caso de deformaciones infinitesimales, a los resultados conocidos de:

$$e_1 = e_{11} \quad \text{y} \quad \beta_{12} = 2e_{12}.$$

3.7.3 Deformación Volumétrica o Dilatación

Consideremos un elemento infinitesimal de volumen como un paralelepípedo rectangular con sus lados paralelos a las direcciones principales de deformación.

Sean la longitud de sus lados antes de la deformación dx_1, dx_2, dx_3 , y después de la deformación $(1 + e_1)dx_1, (1 + e_2)dx_2, (1 + e_3)dx_3$, el cambio de volumen será entonces:

$$dV = [(1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3)]dx_1dx_2dx_3,$$

y el cambio unitario de volumen:

$$\frac{dV}{dx_1dx_2dx_3} = \theta = e_1 + e_2 + e_3 + e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2e_3 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Considerando que las deformaciones son pequeñas, cuando dx_1, dx_2, dx_3 tienden a cero se obtiene:

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = u_{i,i} = \text{div } u_k = I_1.$$

Como I_1 es invariante, para un sistema que no esté en las direcciones principales se tiene:

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \text{traza } e_{ij}.$$