EJERCICIO N°9

1. Torsión: Método Semi-Inverso de Saint - Venant

i) Considere las siguientes funciones de desplazamientos: $u_1 = -\theta\, x_2$, $u_2 = \theta\, x_1$, $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ y la condición $\theta = \chi\, x_3$, deduzca expresiones para las ***deformaciones unitarias***.

ii) Considerando las relaciones obtenidas en el punto anterior, obtenga ahora relaciones para las ***tensiones*** correspondientes. Generalice estas mismas relaciones en ***términos vectoriales*** utilizando las siguientes definiciones: $\vec{r} = x_1\,\hat{k}_1 + x_2\,\hat{k}_2$ y $\vec{\sigma}_3 = \sigma_{13}\hat{k}_1 + \sigma_{23}\hat{k}_2$.

iii) Reemplace las componentes de tensiones en las ecuaciones de equilibrio $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$, y obtenga una ecuación para la ***función de alabeo*** u_3. ¿Cómo se ***denomina*** la función obtenida?

iv) Considere que la condición de borde, de la superficie cilíndrica libre de tensiones, puede expresarse como $\hat{\nu} \cdot \vec{\sigma}_3 = 0$. Reemplace en esta ecuación la expresión vectorial para $\vec{\sigma}_3$, obteniendo una ***expresión para la derivada*** de u_3 en la dirección normal a la curva $u_{3,n}$.

v) Considere las siguientes expresiones para las tensiones internas en las caras perpendiculares al manto cilíndrico: $p_1 = G(u_{3,1} - \chi\, x_2)$, $p_2 = G(u_{3,2} + \chi\, x_1)$ y $p_3 = 0$. Verifique que las ***resultantes de corte son nulas*** realizando las siguientes integraciones:

$$Q_1 = G\chi \iint_A p_1 dA = 0 \text{ y } Q_2 = G\chi \iint_A p_2 dA = 0. \qquad \textbf{\textit{Hint:}} \iint_A (P_{2,1} - P_{1,2}) dA = \oint_C (P_1 dx_1 + P_2 dx_2) = \oint_C \vec{P} \cdot d\vec{r}$$

vi) Considere que el momento torsional esta dado por $\vec{M} = \iint_A \vec{r} \times \vec{\sigma}_3 dA$, reemplace en esta ecuación la expresión para $\vec{\sigma}_3$ y obtenga una ***expresión para el momento*** en función de la ***inercia polar*** de la sección y la ***integral de línea de la función de alabeo***.

2. Torsión: Función de Tensiones de Prandtl

i) Suponga una función $\phi(x_1, x_2)$ tal que las tensiones estén dadas por las derivadas parciales de éstas, del siguiente modo: $\sigma_{31} = G\chi\phi_{,2} = G(-\chi x_2 + u_{3,1})$ $\sigma_{32} = -G\chi\phi_{,1} = G(\chi x_1 + u_{3,2})$. Utilice las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de compatibilidad de desplazamiento para obtener una ***expresión para la función*** $\phi(x_1, x_2)$.

ii) Al igual que en el problema anterior, el momento torsor esta dado por $\vec{M} = \iint_A \vec{r} \times \vec{\sigma}_3 dA$. Reemplace en esta ecuación los esfuerzos en función de la función $\phi(x_1, x_2)$ y obtenga una expresión para la ***inercia torsional***. Suponiendo que la sección es ***multiconexa***, ¿Cómo podrían ***interpretarse*** los términos que describen la inercia torsional J?

iii) La tensión de corte puede expresarse como $\vec{\sigma}_3 = G\chi\,\hat{k}_3 \times \nabla\phi = G\chi\,(\phi_{,2}\hat{k}_1 - \phi_{,1}\hat{k}_2)$. Considere una sección transversal del cuerpo cilíndrico y establezca en ella un sistema de ***coordenadas curvilíneas*** siguiendo la trayectoria de un punto que se desplaza por esta sección. ***Re-escriba*** la expresión para la tensión de corte en estas coordenadas, e ***identifique*** cada unos de los términos que las componen. ¿Cuál es la ***interpretación geométrica*** que podría dársele a algunos de estos términos?

3. Torsión: Secciones Multiconexas

Considérese un cuerpo cilíndrico sometido a torsión, en el caso de secciones multiconexas sometidos a cortes.

i) ¿Cómo se expresa matemáticamente la condición de ***no existencia de desplazamientos relativos*** entre las caras de cada corte?

ii) Establezca la forma que adquiere la ***deformación unitaria por corte*** entre las direcciones ***3*** y ***s***, en función de las ***derivadas de los corrimientos***.

iii) Establezca la ***expresión para el giro*** de las secciones como cuerpo rígido, en función de su distancia al centro de giro de la tangente.

iv) Utilice las tres relaciones anteriores para establecer cuanto vale $\oint e_{3s} ds$.

v) Establezca la ***relación tensión - deformación*** en el plano 3.

vi) En la definición de la función de Prandtl en ***coordenadas curvilíneas*** identifique el término σ_{3s}.

vii) Utilice estas dos últimas relaciones para establecer el valor de e_{3s} en función de ϕ.

viii) Finalmente, utilice los resultados de los puntos **iv)** y **vii)** para establecer el valor de $\oint_C \phi_{,s} ds$.