

## 7 TORSIÓN DE ELEMENTOS PRISMÁTICOS

### 7.1 Introducción

En este capítulo analizaremos los **esfuerzos y deformaciones** para miembros sometidos a **pares de torsión** respecto a sus ejes longitudinales.

Primero se realizará una presentación del problema, desarrollándose las soluciones clásicas conocidas como el **método semi inverso de Saint Venant** y el **método de la función de tensiones de Prandtl**.

El método de la función de Prandtl se extenderá de secciones **simplemente conexas** a **secciones multiconexas**. Se describirá una posible **interpretación geométrica** y se establecerá una **analogía con una membrana** sometida a una tensión interna constante y a una presión normal uniforme.

Luego se estudiará la torsión de una barra de **sección rectangular**, resultado que se utilizara para establecer una **aproximación** para la evaluación de las constantes torsionales de las secciones de **paredes delgadas abiertas**.

Finalmente, se estudiará la torsión de perfiles **cerrados de pared delgada**, ya sean **unicelulares** o **multicelulares**. En este caso, se presentará una analogía con circuitos eléctricos de corriente continua.

### 7.2 Presentación del problema

Consideraremos un cuerpo cilíndrico de material **homogéneo** e **isotrópico** limitado por dos caras perpendiculares a las generatrices rectas.

Este cuerpo está sometido a la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio en sus caras planas, estáticamente equivalente a un **momento de torsión** sobre el cuerpo.

La **superficie cilíndrica** se encuentra **libre de tensiones externas** y sus puntos pueden moverse libremente. Las **fuerzas de volumen son nulas** en todos los puntos del cuerpo.

#### Condiciones de borde:

- No existen tensiones en el manto cilíndrico:  $\sigma_{vv} = \sigma_{vt} = \sigma_{v3} = 0$ .
- No existen tensiones normales en las caras planas:  $\sigma_{33} = 0$ .

### 7.3 Método Semi-Inverso de Saint Venant

Este método consiste en “**suponer**” parcialmente una solución al problema de torsión, y luego “**completarla**” de modo que satisfaga las condiciones de éste.

### 7.3.1 Funciones de corrimientos:

Supongamos una solución al problema recién planteado dada por las siguientes funciones de corrimientos:

$$u_1 = -\theta x_2,$$

$$u_2 = \theta x_1,$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2),$$

donde  $\theta$  es el **ángulo de rotación** de la sección y  $u_3 = u_3(x_1, x_2)$  se denomina **función de alabeo**.

El giro relativo de las secciones  $\theta$ , puede determinarse a través de la constante  $\chi$ , que representa el **giro por unidad de longitud**, del siguiente modo:

$$\theta = \chi x_3.$$

### 7.3.2 Deformaciones unitarias

Considerando las funciones de corrimientos supuestas ( $u_i$ ), las **deformaciones unitarias** resultan:

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0,$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}(u_{3,1} - \chi x_2),$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}(u_{3,2} + \chi x_1).$$

### 7.3.3 Tensiones

Las **tensiones** correspondientes son:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{13} = G(u_{3,1} - \chi x_2)$$

$$\sigma_{23} = G(u_{3,2} + \chi x_1),$$

Si se definen los vectores  $\vec{r} = x_1 \hat{k}_1 + x_2 \hat{k}_2$  y  $\vec{\sigma}_3 = \sigma_{13} \hat{k}_1 + \sigma_{23} \hat{k}_2$ , las relaciones para las tensiones pueden resumirse vectorialmente como:

$$\vec{\sigma}_3 = G(\nabla u_3 + \chi \hat{k}_3 \times \vec{r}).$$

### 7.3.4 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ , toman en este caso la forma:

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0.$$

Las correspondientes derivadas de las tensiones valen:

$$\sigma_{13,1} = \sigma_{31,1} = G(u_{3,1} - \chi x_2)_{,1} = Gu_{3,11},$$

$$\sigma_{23,2} = \sigma_{32,2} = G(u_{3,2} + \chi x_1)_{,2} = Gu_{3,22},$$

las que reemplazadas en la ecuación de equilibrio resultan:

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = Gu_{3,11} + Gu_{3,22} = 0.$$

Si simplificamos por la constante  $G$  la parte derecha de la igualdad, se reconoce el Laplaciano de  $u_3$ :

$$\nabla^2 u_3 = 0,$$

es decir, la **función de alabeo**  $u_3$  es una función **armónica**.

### 7.3.5 Condiciones de borde

Dado que la **superficie cilíndrica esta libre de tensiones**, se tiene que:

$$\hat{\nu} \cdot \vec{\sigma}_3 = 0.$$

Esta condición establece que la **tensión de corte por flexión es tangente a la curva de borde** de la sección.

Si en la ecuación anterior se reemplaza la expresión vectorial para  $\vec{\sigma}_3$ , se obtiene:

$$\hat{\nu} \cdot \vec{\sigma}_3 = \hat{\nu} \cdot G(\nabla u_3 + \chi \hat{k}_3 \times \vec{r}) = 0,$$

donde se pueden **identificar** los siguientes términos:

$$\hat{\nu} \cdot \nabla u_3 = u_{3,n}, \quad (\text{derivada de } u_3 \text{ en la dirección normal a la curva})$$

$$\hat{\nu} \cdot \hat{k}_3 \times \vec{r} = \hat{\nu} \times \hat{k}_3 \cdot \vec{r} = -\hat{t} \cdot \vec{r} = -\vec{r}_{,s} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{r})_{,s} = -rr_{,s}.$$

Con esto, la **condición de borde** queda:

$$u_{3,n} = \chi rr_{,s}.$$

La determinación de la función de alabeo  $u_3$  con la condiciones  $\nabla^2 u_3 = 0$  y  $u_{3,n} = -rr_{,s}$  se conoce como el **Problema de Neumann** en la **teoría de potenciales**.

### 7.3.6 Relaciones entre $\vec{M}$ , $\chi$ y $\vec{u}_3$

En las caras perpendiculares al manto cilíndrico, las condiciones de borde establecen el equilibrio con las tensiones internas:

$$p_1 = G(u_{3,1} - \chi x_2),$$

$$p_2 = G(u_{3,2} + \chi x_1), \text{ y}$$

$$p_3 = 0.$$

Las tensiones sobre estas caras solo tienen por resultante un **momento de torsión puro, no poseyendo resultantes de corte**.

La verificación de las **tensiones de corte nulas** se puede realizar mediante la evaluación de la siguiente integral:

$$Q_1 = G\chi \iint_A p_1 dA = 0,$$

la que, luego de algunos cálculos y sustituciones puede transformarse en:

$$Q_1 = G\chi \iint_A \left\{ \left[ x_1 \left( \frac{u_{3,1}}{\chi} - x_2 \right) \right]_{,1} + \left[ x_1 \left( \frac{u_{3,2}}{\chi} + x_1 \right) \right]_{,2} \right\} dA, \text{ ó}$$

$$Q_1 = G\chi \oint_C x_1 \left[ \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{u_3}{\chi} \right) + \vec{v} \cdot \hat{k}_3 \times \vec{r} \right] ds.$$

En esta última ecuación, el paréntesis cuadrado corresponde a la expresión para la **condición de borde en el contorno**, y **vale cero**, por lo tanto:

$$Q_1 = 0.$$

Análogamente, se puede demostrar también que  $Q_2 = 0$ .

Considerando que el **momento torsional** esta dado por:

$$\vec{M} = \iint_A \vec{r} \times \vec{\sigma}_3 dA = G\chi \left[ \vec{r} \times \nabla \left( \frac{u_3}{\chi} \right) + \vec{r} \times (\hat{k}_3 \times \vec{r}) \right] dA,$$

se puede obtener una **expresión para el momento** en función de la **inercia polar** de la sección y la **integral de línea de la función de alabeo**, como:

$$\bar{M} = G\chi \left[ I_p - \oint_c \left( \frac{u_3}{\chi} \right) \vec{r} \cdot d\vec{r} \right].$$

Tomando solo la magnitud de la relación anterior, se puede establecer que el **momento** esta dado por  $\chi$  veces la **“rigidez torsional”**  $GJ$ , donde  $J$  es la **“inercia torsional”**, tal como:

$$M = G\chi J \quad J = \left[ I_p - \oint_c \left( \frac{u_3}{\chi} \right) \vec{r} \cdot d\vec{r} \right].$$

Si consideramos la función  $\left( \frac{u_3}{\chi} \right)$  como **variable independiente**, se tiene que:

- $\nabla^2 \left( \frac{u_3}{\chi} \right) = 0$ , al interior de la sección, y
- $\left( \frac{u_3}{\chi} \right)_{,n} = rr_{,s}$ , en el contorno.

Algunos autores expresan la inercia torsional como una **fracción del momento de inercia polar** de la sección, pudiendo expresarse  $\chi$  como:

$$M = G\chi J \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{M}{GJ} = \frac{M}{G(I_p/\beta)} = \frac{\beta M}{GI_p}.$$

### Ejemplo: Sección circular

Consideremos una **barra cilíndrica circular** sometida a un momento de torsión  $M$ .

La solución está dada por una función  $u_3$  tal que **dentro del círculo**  $\nabla^2 u_3 = 0$  y **en el contorno**  $u_{3,n} = \chi rr_{,s} = 0$ .

La solución esta dada en este caso por  $u_3 = cte = 0$ , por lo que la **inercia torsional** vale:

$$J = I_p - \oint_c \left( \frac{u_3}{\chi} \right) \vec{r} \cdot d\vec{r} = I_p = \frac{\pi a^4}{2}.$$

La **torsión**  $\chi$  de la barra vale:

$$\chi = \frac{M}{GJ} = \frac{2M}{G\pi a^4} .$$

La **tensión de corte**  $\vec{\sigma}_3$  vale:

$$\|\vec{\sigma}_3\| = \|G(\nabla u_3 + \chi \hat{k}_3 \times \vec{r})\| = G\chi r = \frac{2M}{\pi a^4} r .$$

## 7.4 Función de Tensiones de Prandtl

### 7.4.1 Funciones de tensiones

Suponga una función  $\phi(x_1, x_2)$  tal que las **tensiones** estén dadas por las **derivadas parciales** de ésta, del siguiente modo:

$$\sigma_{31} = G\chi\phi_{,2} = G(-\chi x_2 + u_{3,1}) ,$$

$$\sigma_{32} = -G\chi\phi_{,1} = G(\chi x_1 + u_{3,2}) .$$

Estas expresiones pueden escribirse en **forma vectorial** como:

$$\vec{\sigma}_3 = -G\chi \hat{k}_3 \times \nabla \phi .$$

### 7.4.2 Ecuaciones de equilibrio

En este caso, las **ecuaciones de equilibrio** se satisfacen idénticamente:

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = G\chi(\phi_{,21} + \phi_{,12}) = 0 .$$

### 7.4.3 Compatibilidad de desplazamiento

La definición de la función  $\phi(x_1, x_2)$  permite establecer las siguientes **relaciones para las segundas derivadas**:

$$G\chi\phi_{,2} = G(-\chi x_2 + u_{3,1}) \Rightarrow u_{3,1} = \chi\phi_{,2} + \chi x_2 \Rightarrow u_{3,12} = \chi\phi_{,22} + \chi ,$$

$$-G\chi\phi_{,1} = G(\chi x_1 + u_{3,2}) \Rightarrow u_{3,2} = -\chi\phi_{,1} - \chi x_1 \Rightarrow u_{3,21} = -\chi\phi_{,11} - \chi ,$$

las que, en conjunto con las condiciones de **compatibilidad de desplazamiento**  $u_{3,12} = u_{3,21}$ , conducen a una ecuación para  $\phi(x_1, x_2)$ :

$$u_{3,12} = u_{3,21} \Rightarrow \chi\phi_{,22} + \chi = -\chi\phi_{,11} - \chi ,$$

o lo que es lo mismo que:

$$\chi(\phi_{,11} + \phi_{,22}) + \chi(1+1) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi + 2 = 0.$$

#### 7.4.4 Condiciones de borde

Al igual que en el caso anterior, la condición de **tensiones tangenciales y normales nulas** sobre la superficie cilíndrica, se expresa como:

$$\hat{\nu} \cdot \vec{\sigma}_3 = 0.$$

Reemplazando en esta ecuación la expresión vectorial para  $\vec{\sigma}_3$  se obtiene:

$$\hat{\nu} \cdot \vec{\sigma}_3 = -G\chi(\hat{\nu} \cdot \hat{k}_3 \times \nabla \phi) = -G\chi(\hat{\nu} \times \hat{k}_3 \cdot \nabla \phi) = -G\chi(-\hat{t} \cdot \nabla \phi) = G\chi\phi_{,s} = 0,$$

donde  $\phi_{,s}$  corresponde a la **derivada espacial respecto de la trayectoria o camino recorrido sobre la curva**, por lo tanto, se concluye que  $\phi$  **debe ser constante** sobre esta curva.

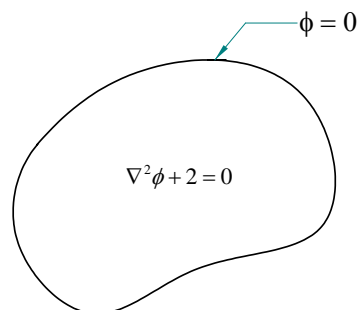
Lo anterior se resume en:

- $\nabla^2 \phi + 2 = 0$ , al interior de la sección, y
- $\phi = cte$ , en el contorno.

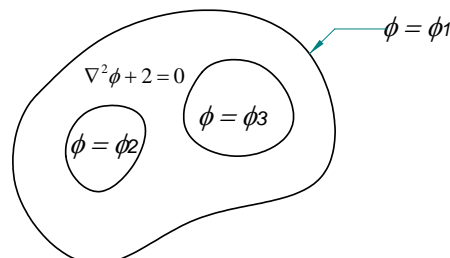
#### 7.4.5 Secciones multiconexas

Las condiciones que acabamos de establecer en el punto anterior, podrían corresponder al caso de **secciones simplemente conexas** o al caso de **secciones multiconexas**.

En el caso de secciones multiconexas la función  $\phi$  puede tomar **diferentes valores en cada contorno**, pero en **cada uno de ellos** su valor debe ser **constante**.



(a)



(b)

#### 7.4.6 Relaciones entre el momento $\vec{M}$ y la torsión $\chi$

Al igual que en el método semi inverso, las **tensiones tangenciales en las caras normales al manto cilíndrico** deben ser **equivalentes a un momento de torsión** según la dirección  $\hat{k}_3$ . Esta condición conduce a una relación entre el momento aplicado y el ángulo de torsión por unidad de longitud  $\chi$ .

El **momento torsor** en este caso es:

$$\vec{M} = \iint_A \vec{r} \times \vec{\sigma}_3 dA = \hat{k}_3 \iint_A (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dA.$$

Si en esta ecuación reemplazamos las tensiones por la definición de la función  $\phi$ , se tiene:

$$M = \iint_A (x_1 (-G\chi\phi_{,1}) - x_2 (G\chi\phi_{,2})) dA = -G\chi \iint_A (x_1 \phi_{,1} + x_2 \phi_{,2}) dA,$$

lo que se puede transformar en:

$$M = -G\chi \iint_A [(x_1 \phi)_{,1} + (x_2 \phi)_{,2} - 2\phi] dA,$$

$$M = -G\chi \iint_A [(x_1 \phi)_{,1} + (x_2 \phi)_{,2}] dA + 2G\chi \iint_A \phi dA,$$

$$M = -G\chi \iint_A [(x_1 \phi)_{,1} - (-x_2 \phi)_{,2}] dA + 2G\chi \iint_A \phi dA,$$

y utilizando el **teorema de Green**:

$$M = -G\chi \oint_C [(-x_2 \phi) dx_1 + (x_1 \phi) dx_2] + 2G\chi \iint_A \phi dA,$$

$$M = G\chi \oint_C \phi [x_2 dx_1 - x_1 dx_2] + 2G\chi \iint_A \phi dA,$$

$$M = -G\chi \oint_C \phi \vec{r} \times d\vec{r} \cdot \hat{k}_3 + 2G\chi \iint_A \phi dA.$$

Si ahora se **discretiza** esta integral de línea para considerar los  $n$  posibles contornos diferentes, en cada uno de los cuales  $\phi = \phi_i$ , se tiene:

$$M = -G\chi \sum_{i=1}^n \phi_i \hat{k}_3 \oint_C d\vec{r} \times \vec{r} \cdot + 2G\chi \iint_A \phi dA,$$



y teniendo presente que el área asociada a esta integral de línea es el **doblo de las áreas encerradas por los contornos**  $A_i$ , se puede escribir:

$$M = -G\chi 2\hat{k}_3 \sum_{i=1}^n \phi_i A_i + 2G\chi \iint_A \phi dA.$$

Con esto, finalmente se puede establecer la relación entre **momento aplicado**  $M$  y el **ángulo de torsión por unidad de longitud**  $\chi$ , como:

$$M = G\chi J \quad \text{con} \quad J = 2 \iint_A \phi dA + 2(\phi_1 A_1 + \phi_2 A_2 + \cdots + \phi_n A_n).$$

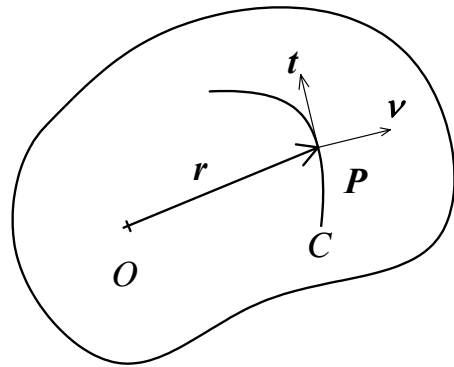
#### 7.4.7 Distribución de las tensiones de corte

La tensión de corte expresada en forma **vectorial** es:

$$\vec{\sigma}_3 = -G\chi \hat{k}_3 \times \nabla \phi.$$

Utilizaremos ahora **coordenadas curvilíneas** para establecer esta misma ecuación.

Consideremos un punto  $P$  recorriendo una trayectoria curvilínea  $C$ , sobre una sección cualquiera del cuerpo cilíndrico.



En cada posición instantánea del punto  $P$ , es posible definir un **vector unitario tangente**  $\hat{t}$  y otro **normal**  $\hat{v}$ , a la curva  $C$ . Sea  $s$  la **distancia recorrida** en la dirección  $\hat{t}$  y  $n$  la **distancia** en la dirección  $\hat{v}$ , entonces es posible re-escribir la ecuación anterior en coordenadas curvilíneas como:

$$\vec{\sigma}_3 = G\chi (\phi_{,s} \hat{v} - \phi_{,n} \hat{t}).$$

Esta expresión indica que **la componente de  $\vec{\sigma}_3$  según la tangente a la curva es proporcional a la derivada de  $\phi$  respecto a la dirección normal a ella**, y que **la componente según la normal es proporcional a la derivada de  $\phi$  respecto a la dirección tangente**.

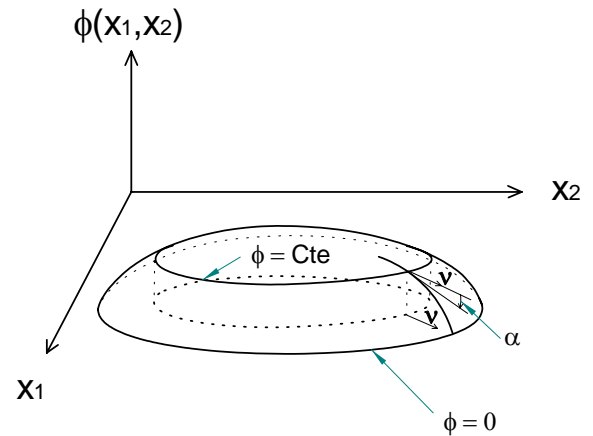
Un caso particular es cuando la curva corresponde a una función  $\phi = cte$ . En este caso, la derivada respecto de la tangente vale cero y la tensión de corte tiene la dirección de la curva. Además, el valor de la tensión de corte es proporcional a la derivada de  $\phi$  respecto de la longitud en la dirección normal.

### 7.4.8 Interpretación geométrica

Considérese la superficie  $x_3 = \phi(x_1, x_2)$  representada en la figura.

En ésta se aprecia que la **derivada**  $-\phi_{,n}$  en el punto  $P$  es igual a la **tangente del ángulo**  $\alpha$  que forma la **curva de máxima pendiente** que pasa por  $P$  con la dirección de  $\hat{v}$ .

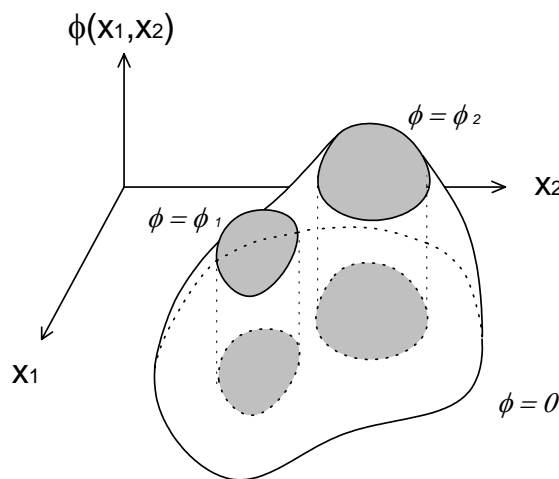
Esto significa que la magnitud de la **tensión de corte** en un punto cualquiera de la sección es **proporcional a la pendiente de superficie**  $\phi = \phi(x_1, x_2)$  en el punto correspondiente.



Si se consideran ahora las proyecciones de líneas  $\phi = cte$ , para incrementos iguales de la constante, la **magnitud de la tensión de corte es inversamente proporcional a la distancia entre ellas** es decir, mientras más juntas se encuentren mayor es el valor de la tensión de corte.

Esta descripción es análoga a lo que sucede en el caso del **análisis de planos topográficos**. En este caso, la distancia entre las curvas de nivel indica cuan empinado es el terreno en una zona. Así mismo, la dirección perpendicular a estas curvas, indican la dirección de máxima pendiente del terreno.

El caso presentado en la figura corresponde a una **sección simplemente conexa**. Para **secciones multiconexas** se producen zonas donde la función  $\phi$  tiene un valor constante, las que corresponden a **mesetas horizontales** en la superficie  $\phi = \phi(x_1, x_2)$ , tal como se aprecia en la figura a continuación.



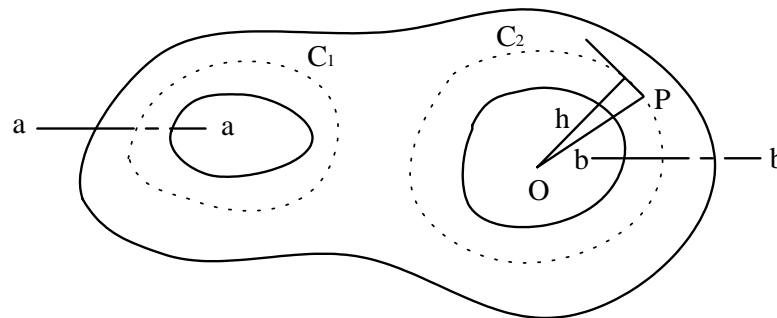
La **constante torsional**, en el caso de **secciones multiconexas** puede expresarse como:

$$J = 2 \iint_A \phi dA + 2(\phi_1 A_1 + \phi_2 A_2 + \cdots + \phi_n A_n).$$

Si se considera que la función  $\phi$  **se extiende también sobre las zonas de los huecos**, donde toma en cada uno de ellos el valor constante correspondiente, el valor de la **constante torsional** se puede entender como equivalente a **dos veces el volumen comprendido entre el plano  $\phi = 0$  y la superficie  $\phi = \phi(x_1, x_2)$** .

#### 7.4.9 Condición de univalencia de $u_3$ en secciones multiconexas

Una sección con huecos en su interior es **multiconexa** pues se le pueden hacer cortes tales como a-a ó b-b **sin que la sección pierda su unicidad**.



Es evidente que al tener dichos cortes, el cuerpo cilíndrico sometido a torsión se va a comportar en forma diferente a si no los tuviera, debido en el primer caso a la **posibilidad de desplazamiento relativo** entre las caras de los cortes.

Las condiciones de **no existencia de desplazamientos relativos** entre las caras de cada corte equivaldrán a sendas relaciones que permitirán determinar los valores constantes de la función  $\phi$  en los huecos.

En forma matemática la condición anterior se puede poner como:

$$\oint_{C_i} u_{3,s} ds = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N^\circ \text{ huecos},$$

donde  $C_i$  son curvas alrededor de los huecos.

Considerando un punto  $P$  de la curva  $C_i$ , la **deformación unitaria de corte** entre las direcciones 3 y s vale:

$$e_{3s} = \frac{1}{2}(u_{3,s} + u_{s,3}).$$

Como la sección gira en su plano como **cuerpo rígido**,  $u_s = \theta h$ , donde  $\theta$  es el **ángulo de giro** de la sección y  $h$  es la **distancia del centro de giro a la tangente a la curva**  $C_i$  en  $P$ :

$$u_{s,3} = \frac{d\theta}{dx_3} h = \chi h .$$

Reemplazando esta expresión en la anterior se obtiene:

$$u_{3,s} = 2e_{3s} - \chi h .$$

Por lo tanto;

$$\oint_{C_i} u_{3,s} ds = \oint_{C_i} (2e_{3s} - \chi h) ds = 0 ,$$

pero:

$$\oint_{C_i} h ds = 2\Omega_i \quad \Omega_i = \text{área encerrada por la curva } C_i .$$

Luego, la **condición de univalencia de**  $u_3$  se puede expresar como:

$$\oint_{C_i} e_{3s} ds = \chi \Omega_i \quad i = 1, 2, \dots, N^\circ \text{ de huecos} .$$

Esta condición se puede transformar en una relación para la **función de Prandtl**:

$$e_{3s} = \frac{\sigma_{3s}}{2G} = \frac{-\chi G \phi_{,n}}{2G} = -\frac{1}{2} \chi \phi_{,n} ,$$

reemplazando esta ecuación en la anterior, resulta finalmente:

$$\oint_{C_i} \phi_{,n} ds = -2\Omega_i .$$

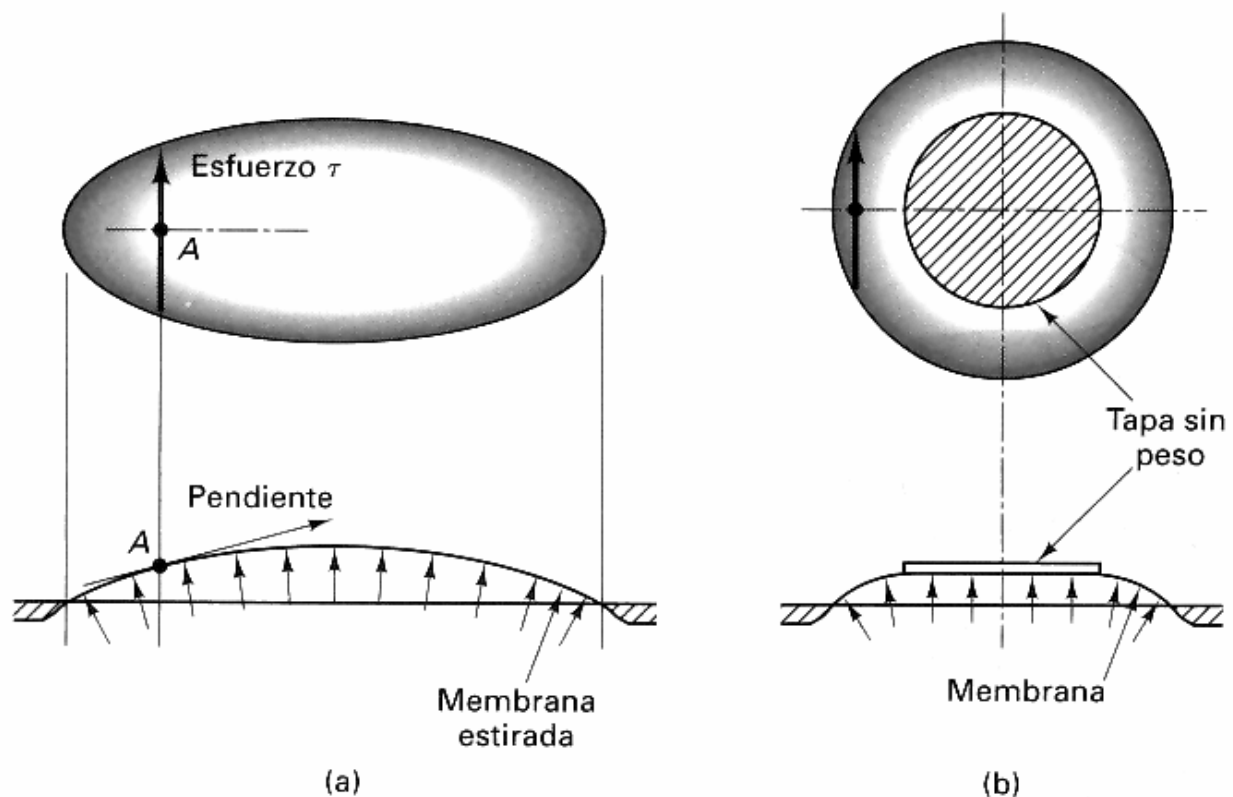
Como se vio anteriormente, la función  $\phi$  tiene valores constantes, diferentes entre sí, en el contorno de los huecos. Habrá que determinar, por lo tanto, **tantas constantes como huecos haya en la sección**. Esto se consigue utilizando esta última relación para cada uno de los huecos, y **resolviendo luego el sistema de ecuaciones** resultantes para las constantes.

#### 7.4.10 Analogía de la membrana

El **problema matemático** que surge de la determinación de la función de Prandtl en la **torsión pura de un cuerpo cilíndrico**, es el mismo que surge de la determinación de la **deformación transversal de una membrana** sometida a una tensión interna constante y a una presión normal uniforme.

Esta similitud ha sido utilizada en el pasado para visualizar experimentalmente los esfuerzos y determinar las capacidades de torsión de cuerpos cilíndricos.

En las siguientes figuras se grafica esta analogía para el caso de una sección simplemente conexa **(a)** y una región multiconexa **(b)**.



En el caso **(a)** se presenta el caso de un **cilindro macizo de sección elíptica** y en el caso **(b)** un **tubo hueco de sección circular**.

Como ya se ha mencionado, el **esfuerzo de corte** en cualquier punto de la sección (por ejemplo el punto A de la figura **(a)**), es **proporcional a la pendiente de la membrana** en ese punto.

En este caso, se observa que la mayor pendiente se produce justo en los bordes de la membrana, por lo tanto, será en la superficie del cilindro donde se desarrollaran los mayores esfuerzos de corte.

**Ejemplo:** A continuación se estudiará el problema de **Torsión de Saint Venant** para el caso de **cilindros con secciones elípticas**.

En el caso general, la función de Prandtl se puede establecer como el **lugar geométrico del borde de la sección multiplicado por una constante**.

Este lugar geométrico deberá expresarse como una **función idénticamente nula**, es decir, **una función igualada a cero**.

En la práctica, esta función puede corresponder a una sola ecuación que describe el contorno de la sección, o a una **"pitatoria"** de ellas, tal que cada una describa una parte del contorno.

La constante que multiplica a esta función, o a este producto de funciones, deberá determinarse a continuación, de modo que satisfaga la ecuación de equilibrio.

Para el caso de una **sección elíptica**, la función de Prandtl puede establecerse como:

$$\phi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

la que, reemplazada en la ecuación de equilibrio da:

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow m = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

La **constante torsional** queda en este caso:

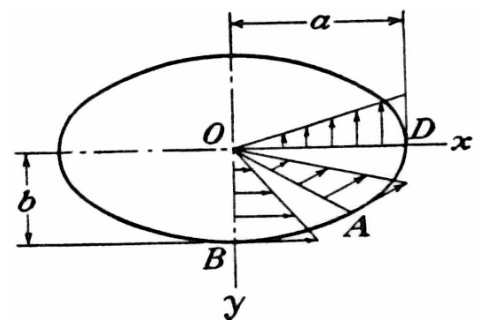
$$J = 2 \iint_A \phi dA = 2 \left[ -\frac{a^2}{a^2 b^2} \left( \frac{1}{a^2} \cdot I_Y + \frac{1}{b^2} \cdot I_X - A_{\text{Elipse}} \right) \right] = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

y por tanto puede establecerse que:

$$M_t = G \chi J \Rightarrow G \chi = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} M_t.$$

Considerando la definición de la función de tensiones, los **esfuerzos de corte** pueden expresarse como:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{31} = G \chi \phi_{,2} \\ \sigma_{32} = -G \chi \phi_{,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\sigma}_3 = \frac{2M_t}{\pi ab} \left( \frac{-y}{b^2} \hat{i} + \frac{x}{a^2} \hat{j} \right)$$



A partir de la **definición de la función de alabeo** y su relación con las tensiones, se pueden obtener las siguientes **expresiones para los corrimientos**:

$$\sigma_{31} = G(u_{3,1} - \chi x_2) \Leftrightarrow G\chi\phi_{,2} = G(u_{3,1} - \chi x_2) \Rightarrow u_{3,1} = \chi(\phi_{,2} + x_2),$$

$$\sigma_{32} = G(u_{3,2} - \chi x_1) \Leftrightarrow -G\chi\phi_{,1} = G(u_{3,2} - \chi x_1) \Rightarrow u_{3,2} = -\chi(\phi_{,1} + x_1),$$

$$u_{3,1} = \chi \left( \frac{-2a^2 x_2}{a^2 + b^2} + x_2 \right) \Rightarrow u_3 = \chi x_2 \left( 1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) x_1 + f(x_2) \quad (1),$$

$$u_{3,2} = -\chi \left( \frac{-2b^2 x_1}{a^2 + b^2} + x_1 \right) \Rightarrow u_3 = -\chi x_1 \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) x_2 + g(x_1) \quad (2),$$

Estas relaciones permiten realizar el siguiente desarrollo para establecer finalmente la **función de alabeo** de Saint Venant como:

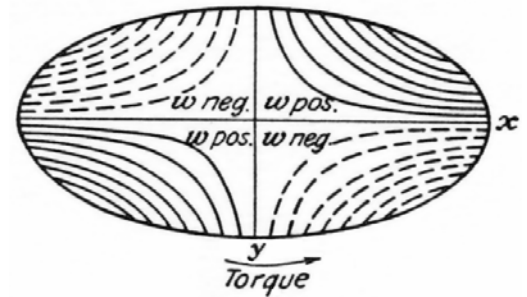
$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \chi x_2 \left( 1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) x_1 + f(x_2) = -\chi x_1 \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) x_2 + g(x_1),$$

$$\chi x_1 x_2 \left( 1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} + 1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) = g(x_1) - f(x_2),$$

$$g(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_i \Rightarrow \therefore g(x_1) = f(x_2) = 0,$$

$$\therefore u_3(x_1, x_2) = -\chi x_1 x_2 \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right).$$

Como se aprecia en la figura, esta ecuación corresponde al lugar geométrico de un **paraboloide hiperbólico**.

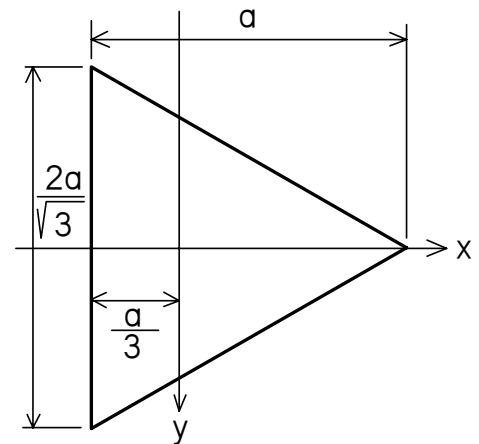


**Ejemplo:** Se plantea el estudio de la torsión de una barra de **sección triangular equilátera**.

Si se considera el sistema de referencia indicado en la figura, la función  $\phi$  se puede establecer como el **producto** de los lugares geométricos de **cada una de las rectas** que forman el contorno del triángulo, tal como:

$$\phi = m \left[ \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a \right) \left( x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a \right) \left( x + \frac{1}{3}a \right) \right].$$

La determinación de la constante  $m$  y de las **expresiones para los esfuerzos** se deja como ejercicio para el lector.



## 7.5 Torsión de una Barra de Sección Rectangular

A continuación se resumirá el desarrollo de la determinación de la constante torsional de una **barra de sección rectangular**.

Se realizará una presentación del problema y luego se describirá en forma resumida una metodología clásica para la resolución de éste.

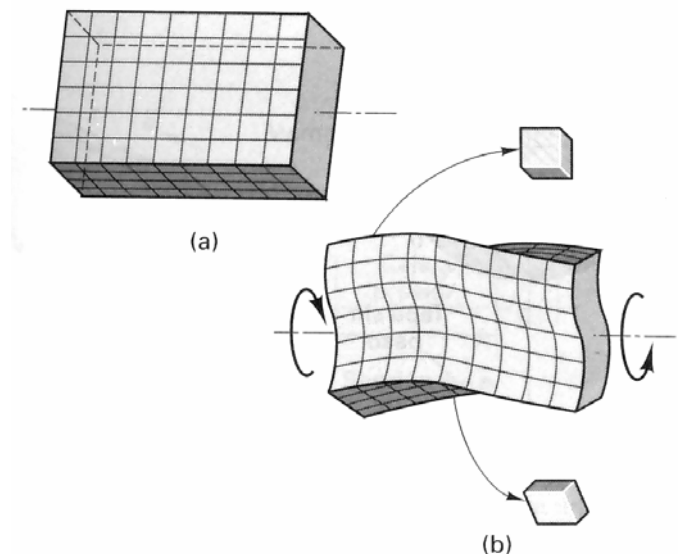
Esta solución, se utilizará en la sección siguiente para determinar la constante torsional de **perfiles abiertos de pared delgada**.

### 7.5.1 Presentación del problema

En secciones pasadas estudiamos el caso de una **barra cilíndrica circular**.

En ese caso vimos que las secciones **no se alabeaban**, siendo el esfuerzo de corte en la sección una **función lineal con respecto a su distancia al centro de torsión** y que poseía su **valor máximo en el borde de la sección**.

En el caso de una sección rectangular **si existe alabeo**, tal como se muestra en la figura.



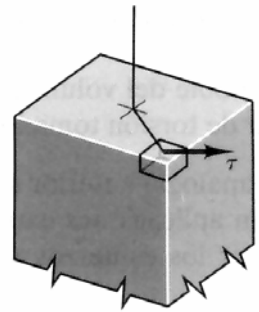
En este caso, los **elementos de las esquinas no se distorsionan en absoluto**, siendo los esfuerzos cortantes en este sitio nulos.



Para entender **porqué los esfuerzos cortantes son nulos en las esquinas** consideremos el análisis de un elemento de esquina como el indicado en la figura.

Si existiese un momento cortante  $\tau$  en la esquina, este podría **descomponerse en dos componentes paralelas a los bordes de la barra**.

Sin embargo, como los esfuerzos de corte **siempre ocurren en pares** actuando sobre planos mutuamente perpendiculares, esos componentes tendrían que ser **equilibrados por esfuerzos de corte** actuando en los planos de las superficies exteriores.



Esta última situación es imposible ya que las **superficies exteriores están libres de todo esfuerzo**, por lo tanto  $\tau$  debe ser cero.

Obsérvese que, como se aprecia en la figura siguiente, **los esfuerzos de corte máximos se producen en los puntos medios de los lados largos**.

### 7.5.2 Solución de Levy mediante series de funciones trigonométricas

Este método de solución consiste en **desarrollar la función incógnita en una serie de senos** en una dirección, transformando el problema original **bidimensional** en uno **unidireccional**.

En el presente desarrollo se considerará el **sistema de referencia** y las **dimensiones geométricas** de la figura adjunta.

La ecuación diferencial a resolver en es caso es:

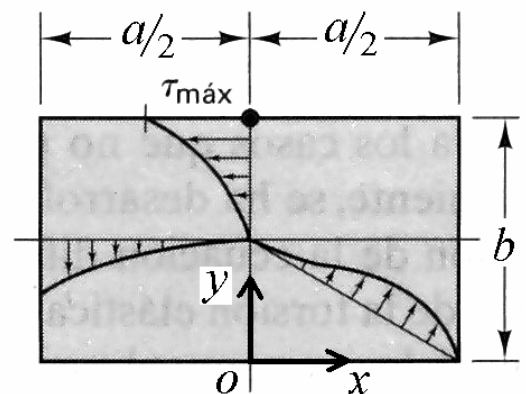
$$\nabla^2 \phi = -2,$$

cuya solución puede establecerse como la **suma de una solución particular más la solución homogénea**:

$$\phi = \phi_P + \phi_H.$$

La **solución particular** se puede elegir suponiendo que  $\phi$  **es independiente de  $x$** , los que es aproximadamente correcto cuando  $a$  es mayor que  $b$ . Entonces:

$$\nabla^2 \phi_P = \phi_{P,yy} = -2.$$



**Integrando** e imponiendo las **condiciones de borde**  $\phi_p = 0$  para  $y = 0, b$ , resulta:

$$\phi_p = -y(y-b).$$

Como **solución homogénea** se elige un **desarrollo en serie de senos** tal como:

$$\phi_H = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación homogénea, se obtiene una ecuación cuya **solución general** es:

$$Y_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + B_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$$

Como la función  $\sinh$  es **antimétrica**, por **simetría** se tiene que  $A_n = 0$ , y por tanto la **función de Prandtl completa** vale:

$$\phi(x, y) = -y(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Las condiciones de borde  $\phi = 0$  para  $x = \pm a/2$ , permiten determinar las constantes  $B_n$ :

$$y(y-b) = \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} B_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Esta ecuación puede interpretarse como el desarrollo en serie de senos de la función  $y(y-b)$  en el intervalo  $(0, b)$ , tal como:

$$B_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b y(y-b) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy,$$

de donde se obtiene:

$$B_n = -\frac{8b^2}{n^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} \quad \text{con } n = \text{impar}.$$

Luego la **expresión completa** para la función  $\phi$  es:

$$\phi(x, y) = -y(y-b) - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n^3 \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}.$$

La **constante torsional**  $J$  se obtiene por **integración de la función**  $\phi$ :

$$J = 2 \iint_A \phi \, dA = 2 \int_0^b \left( \int_{-a/2}^{a/2} \phi \, dx \right) dy,$$

resultando:

$$J = \frac{ab^3}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}{n^5} \right).$$

Cuando  $b \ll a$ ,  $J \rightarrow \frac{ab^3}{3}$ . En otros casos basta con unos pocos términos de la serie, pues ésta converge rápidamente.

Por ejemplo, si consideramos la **torsión de una lámina de acero**, cuando el espesor de la plancha  $b$ , es mucho menor que su ancho  $a$ , la constante torsional de la plancha puede estimarse como **un tercio del ancho por el cubo del espesor**.

La constante torsional  $J$  puede también expresarse con bastante aproximación **considerando el valor de la sumatoria de la expresión anterior igual a 1**, con lo cual resulta:

$$J = \frac{ab^3}{3} k_1 = \frac{ab^3}{3} \left( 1 - 0.63 \frac{b}{a} \right).$$

La **tensión máxima de corte** se produce en los puntos  $x=0$  e  $y=0, b$ :

$$\sigma_{3\max} = (G\chi\phi_{,2})_{x=y=0} = G\chi b \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} \right).$$

Cuando  $a/b \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{3\max} \rightarrow G\chi b$ .

Al igual que la constante torsional, la tensión máxima puede expresarse como  $\sigma_{3\max} = G\chi b k_2$ , donde  $k_2$  es función  $a/b$ .

Considerando que  $\chi = \frac{M}{GJ}$ , la **tensión máxima de corte** en función del momento vale:

$$\sigma_{3\max} = 3 \frac{k_2}{k_1} \frac{M}{ab^2}.$$

## 7.6 Secciones de Pared Delgada

Primero en esta sección utilizaremos los resultados de la sección anterior para obtener la constante torsional de **perfiles abiertos de pared delgada**.

Luego estudiaremos la torsión de **perfiles cerrados de paredes delgada**. Para esto, presentaremos una **analogía con circuitos eléctricos** de corriente continua, distinguiendo los casos de **perfiles unicelulares** y **perfiles multicelulares**.

### 7.6.1 Perfiles abiertos de pared delgada

Como se vio anteriormente, cuando una **sección rectangular es esbelta**, se pueden hacer las siguientes aproximaciones:

$$J = \frac{1}{3} ab^3,$$

$$\sigma_{3\max} = G\chi b.$$

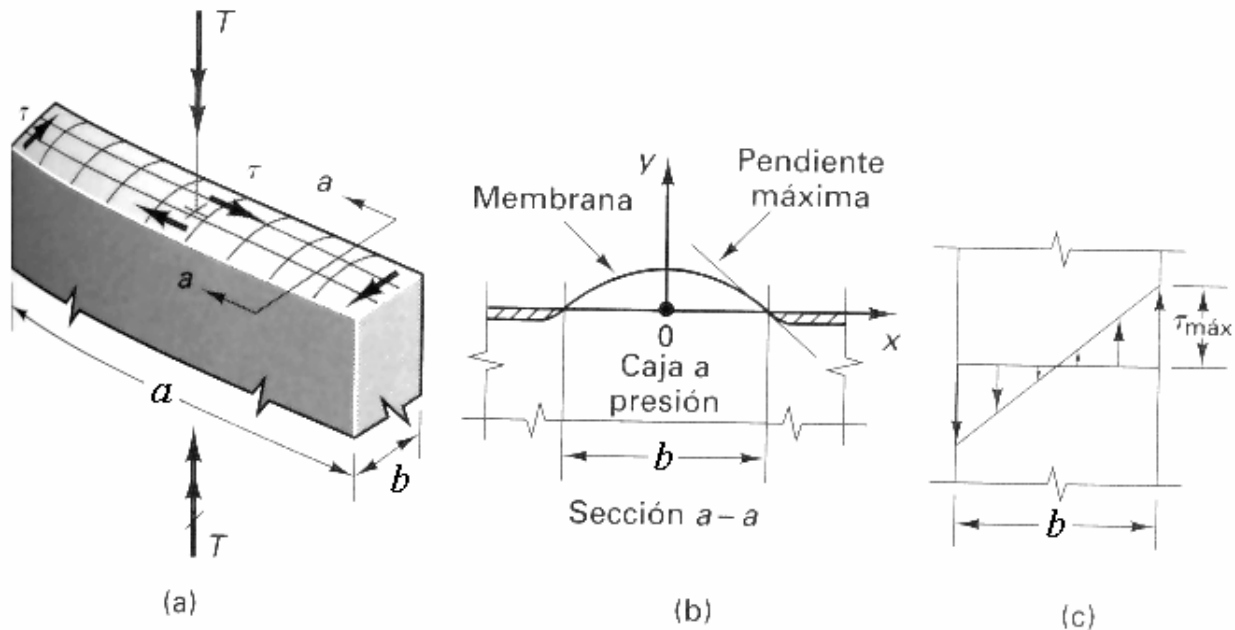
Estas aproximaciones son equivalentes a suponer que la **función de Prandtl es una superficie cilíndrica**, donde se desprecia el efecto de los extremos.

En la figura siguiente se representa la correspondiente **analogía con una membrana**.

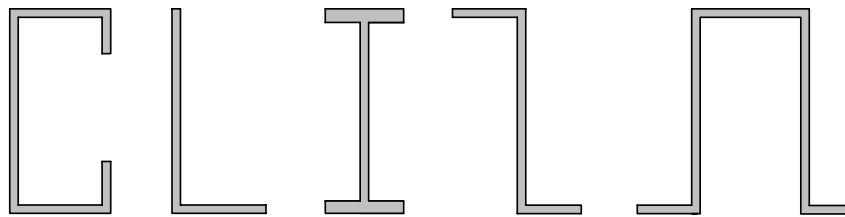
En la parte **(a)** se muestra la forma que toma la membrana, la cual es similar a un **cilindro parabólico**, a excepción de los extremos.

En la parte **(b)** de la figura se muestra una sección transversal (sección a-a), donde aprecia que la **máxima pendiente ocurre en los bordes de la membrana**.

En la parte **(c)** se muestra la correspondiente **distribución de esfuerzos de corte**.



En el caso de **secciones abiertas** formadas por varios elementos rectangulares esbeltos, se puede suponer que en cada elemento  $\phi$  es **cilíndrico**, despreciando el efecto de sus extremos. En la siguiente figura se muestran algunos ejemplos.



La **constante torsional**, que es igual a **dos veces volumen bajo la superficie**  $\phi$ , resulta así igual a la **suma** de las constantes torsionales de los elementos rectangulares que forman el perfil:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N^{\circ}Elem.} (a_i b_i^3).$$

Además, la **tensión de corte máxima** en cada elemento vale:

$$\sigma_{3maxi} = \frac{M b_i}{J}.$$

Esto es válido para **secciones abiertas de pared delgada** en general, no necesariamente constituidas por elementos rectangulares, sino éstos pueden ser también curvos de espesor constante.

En este caso, la magnitud “**a**” es **la longitud de la línea central del elemento curvo** y “**b**” es el **espesor**.

### 7.6.2 Perfiles cerrados de pared delgada

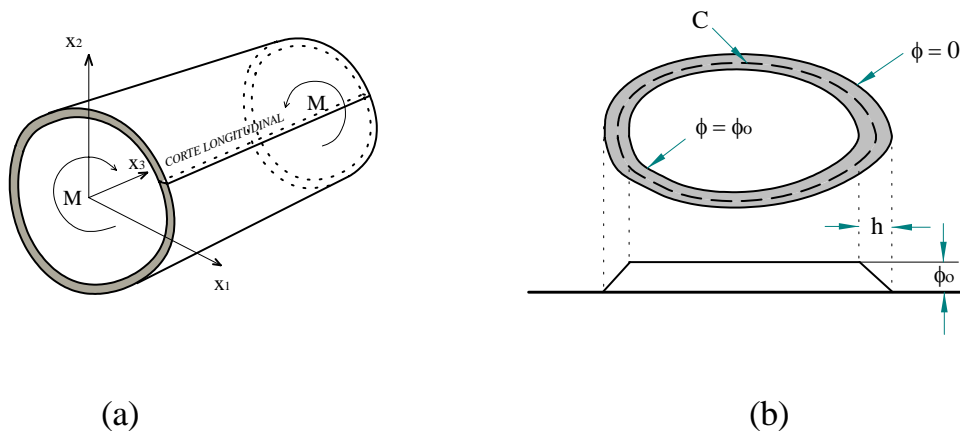
**Perfiles unicelulares:** Un perfil unicelular es de sección **doblemente conexa**, pues un **corte longitudinal no lo separa en dos cuerpos** (figura siguiente, parte (a)). Debe, entonces, satisfacerse la **condición de univalencia del corrimiento** en la dirección longitudinal:

$$\oint_C u_{3,s} ds = 0.$$

Como se vio anteriormente cuando se estudiaron las secciones multiconexas, la condición de univalencia se puede utilizar para establecer una relación entre la función  $\phi$  y el área de una sección.

Esta relación indica que **la integral de línea sobre el contorno** de la sección, de la **variación de la función  $\phi$  en la dirección normal**,  $\phi_{,n}$ , es igual a **menos dos veces el área de la sección**,  $\Omega_C$ , tal como lo indica la siguiente expresión:

$$\oint_C \phi_{,n} ds = -2\Omega_C.$$



Analizando el diagrama que muestra la función  $\phi$  de Prandtl para la torsión de un tubo unicelular (parte (b) de la figura), se aprecia que la **variación de esta función en la dirección normal al borde es prácticamente lineal**, y por lo tanto, se puede **aproximar como la pendiente** de ésta, tal como:

$$\phi_{,n} = \frac{-\phi_0}{h}.$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación anterior, se puede establecer el valor constante que adquiere la **función  $\phi$  en el borde**,  $\phi_o$  como:

$$\phi_o = \frac{2\Omega_c}{\oint_C \frac{ds}{h}}.$$

La **inercia torsional** en este caso puede establecerse como:

$$J = 2\Omega_c \phi_o = 2\Omega_c \frac{2\Omega_c}{\oint_C \frac{ds}{h}} = \frac{4\Omega_c^2}{\oint_C \frac{ds}{h}},$$

y la **tensión de corte, uniforme a través de la pared**, queda:

$$\sigma_{3s} = \tau = -G\chi\phi_{,n} = -G\chi\left(\frac{-\phi_o}{h}\right) = \frac{G\chi\phi_o}{h}.$$

Si se define el **flujo de corte**  $q$  como  $q = \tau \cdot h$ , se puede escribir:

$$q = \tau \cdot h = \frac{G\chi\phi_o}{h} h = G\chi\phi_o = \frac{2\Omega_c G\chi}{\oint_C \frac{ds}{h}}.$$

El análisis de la forma de las relaciones anteriores permite establecer una **analogía** con las ecuaciones que describen el comportamiento de un **circuito eléctrico de corriente continua**.

En esta **“analogía eléctrica”**, se pueden identificar las siguientes asociaciones:

- el **flujo de corte**  $q$ , se asocia con la **intensidad de corriente**  $i$ .
- **dos veces el área de la sección**  $2\Omega_c$ , se asocia con el **voltaje** o caída de tensión de la fuente  $V$ .
- la **integral de línea del inverso del espesor**  $\oint_C \frac{ds}{h}$ , dividido por la constante  $G\chi$ , se asocia con la **resistencia**  $R$  del circuito.
- El **momento torsional**  $M = G\chi J = 2\Omega_c q$ , se asocia con la **potencia**  $W = V \cdot i$  desarrollada por el circuito.

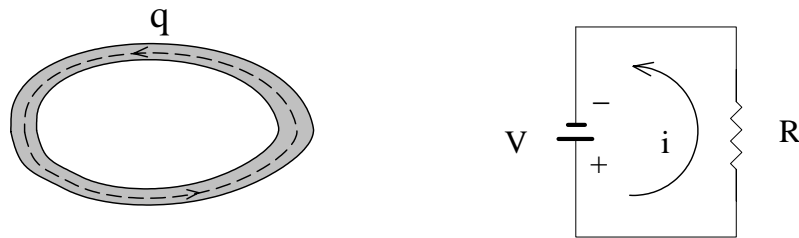
En ecuaciones:

$$q \Leftrightarrow i$$

$$2\Omega_c \Leftrightarrow V$$

$$\frac{1}{G\chi_c} \oint \frac{ds}{h} \Leftrightarrow R$$

$$M = G\chi J = 2\Omega_c q \Leftrightarrow V \cdot i = \text{potencia}$$



Para determinar la tensión en el tubo, suponiendo que está sometido a un momento conocido, no es necesario calcular la constante  $\phi_o$ , basta con determinar la inercia torsional  $J$ , luego el término  $G\chi$  y con éste el flujo  $q$ . La tensión se obtiene finalmente como el flujo  $q$ , dividido por el espesor de la sección  $h$ .

**Perfiles multicelulares:** En tubos unicelulares el flujo de corte es constante a lo largo de la sección y proporcional al valor constante de  $\phi$  en el contorno del hueco  $\phi_o$ .

En tubos multicelulares, los **flujos son constantes en cada rama pero difieren de una rama a otra**.

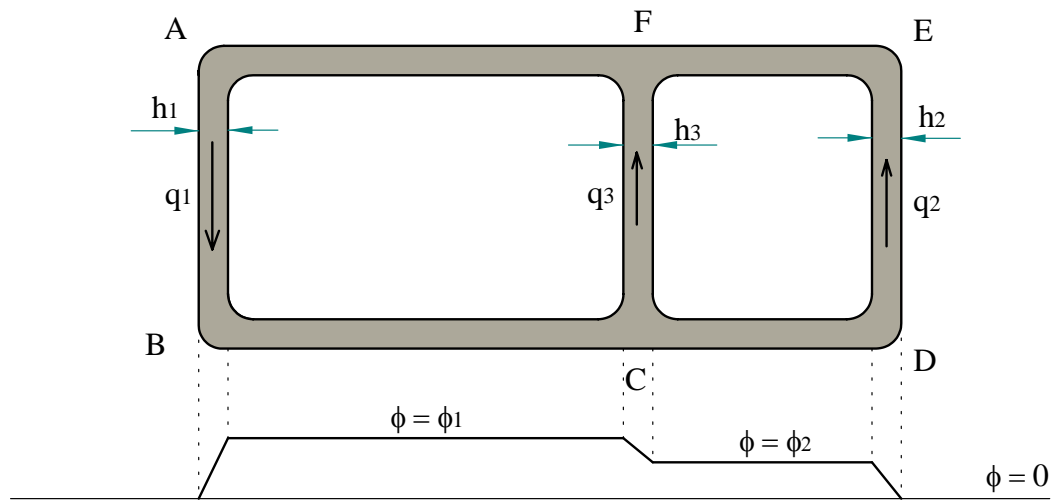
Análogamente al caso de los tubos unicelulares, el análisis del diagrama siguiente, que muestra la función  $\phi$  de Prandtl para la torsión de un tubo multicelular, permite observar que en este caso **los flujos en cada rama son proporcionales a la diferencia de los valores de  $\phi$  en los huecos** separados por la rama, es decir:

$$q_1 = G\chi\phi_1,$$

$$q_2 = G\chi\phi_2,$$

$$q_3 = G\chi(\phi_1 - \phi_2) = q_1 - q_2.$$





Considerando nuevamente la similitud con un circuito eléctrico, la última relación anterior corresponde a la **Ley de los Nudos de Kirchhoff**, la cual establece que **la suma algebraica de los flujos que llegan a un nudo, debe ser cero**.

La **Ley de las Mallas de Kirchhoff** en cambio, establece que las **caídas de potencial, en un recorrido cerrado cualquiera del circuito, debe sumar cero**. Esta ley es equivalente a la ley de univalencia de  $u_3$ , según la cual en un recorrido cerrado  $C$  debe tenerse:

$$\oint_C \tau ds = 2G\chi\Omega_C,$$

es decir:

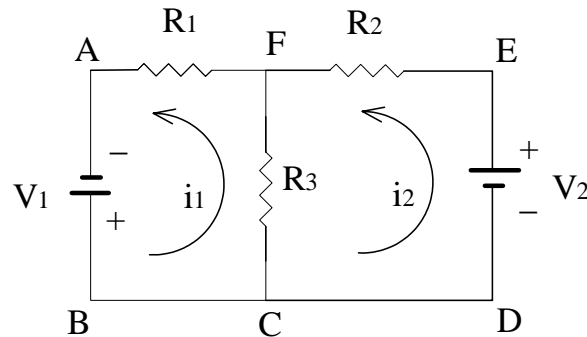
$$\sum_n \left( q_n \frac{1}{G\chi} \oint_C \frac{1}{h_n} \right) - 2\Omega_C = 0,$$

donde la sumatoria se extiende sobre las ramas del recorrido  $C$ . La ecuación eléctrica equivalente es:

$$\sum_n i_n R_n - V = 0.$$

Se concluye por tanto, que **el problema de torsión de tubos multicelulares es equivalente al de un circuito de corriente continua**.

El circuito equivalente a la sección con dos celdas, descrito en el diagrama anterior, es el que se presenta a continuación.

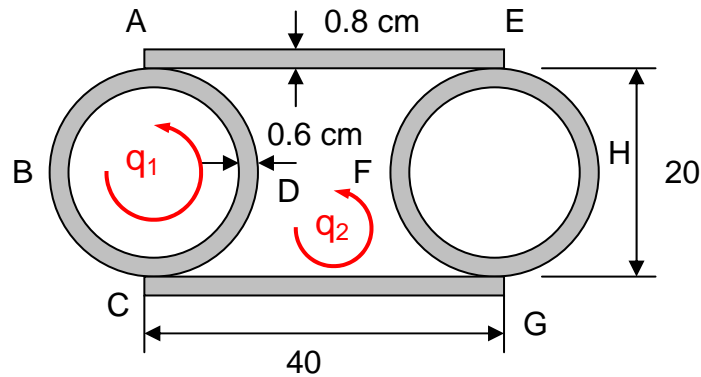


Estos **resultados son generalizables a tubos multicelulares de varios huecos**. En este caso, es necesario **asignar flujos incógnitos a cada una de las células** (no de las ramas), **uno a cada una**.

De este modo las ecuaciones de los nudos se satisfacen idénticamente y el problema se reduce entonces a **resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de tantas incógnitas como huecos tenga la sección**.

Estos conceptos se aclararán con los ejemplos desarrollados a continuación.

**Ejemplo:** Resolver el problema de torsión del tubo multicelular de la figura mediante analogía con un circuito de corriente continua equivalente. Dado un momento torsor  $M = 12 \text{ [tonf} \cdot \text{m]}$ , determine las tensiones en cada una de las ramas:



**Solución:**

**Rama ABCDA:**

$$q_1 \frac{1}{G\chi} \oint_{ABC} \frac{ds}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{1}{G\chi} \oint_{CDA} \frac{ds}{0.6} = 2\pi(10)^2,$$

$$q_1 \frac{10\pi}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{10\pi}{0.6} = 2\pi(10)^2 \cdot G\chi,$$

$$2q_1 - q_2 = 12 \cdot G\chi \quad (1).$$

**Rama ADCGFDEA:**

$$(q_2 - q_1) \frac{1}{G\chi} \oint_{ADC} \frac{ds}{0.6} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{CG} \frac{ds}{0.8} + (q_2 - q_1) \frac{1}{G\chi} \oint_{GFE} \frac{ds}{0.6} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{EA} \frac{ds}{0.8} = 2(40 \cdot 20 - \pi(10)^2),$$

$$(q_2 - q_1) \frac{10\pi}{0.6} + q_2 \frac{40}{0.8} + (q_2 - q_1) \frac{10\pi}{0.6} + q_2 \frac{40}{0.8} = 2(40 \cdot 20 - \pi(10)^2) \cdot G\chi,$$

$$-2q_1 + 3.9099q_2 = 18.5577 \cdot G\chi \quad (2),$$

$$(1) \quad y \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 10.5015 \cdot G\chi \\ q_2 = 11.2507 \cdot G\chi \end{cases}$$

**Constante torsional** (2 veces el volumen encerrado bajo la función  $\phi$ ):

$$J = 2 \sum \Omega_i \phi_i = \frac{2}{G\chi} \sum \Omega_i q_i ,$$

$$J = \frac{2}{G\chi} [2\pi(10)^2 \cdot 11.2507 \cdot G\chi + (40 \cdot 20 - \pi(10)^2) \cdot 10.5051 \cdot G\chi] = 24.342 [cm^4].$$

Dado el **momento torsional aplicado**, se obtiene:

$$G\chi = \frac{M}{J} = \frac{1.200.000}{24.342} = 49.30 \left[ \frac{kg}{cm^3} \right].$$

Por lo tanto los **flujos de corte** valen:

$$q_1 = 11.2507 \cdot 49.30 = 554.63 \left[ \frac{kg}{cm} \right],$$

$$q_2 = 10.5015 \cdot 49.30 = 517.69 \left[ \frac{kg}{cm} \right].$$

Por lo tanto las **tensiones** valen:

**Rama ABC y GHE:**

$$\tau = \frac{q_1}{h_1} = \frac{554.63}{0.6} = 924.38 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

**Rama CG y EA:**

$$\tau = \frac{q_2}{h_2} = \frac{517.67}{0.8} = 647.16 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right],$$

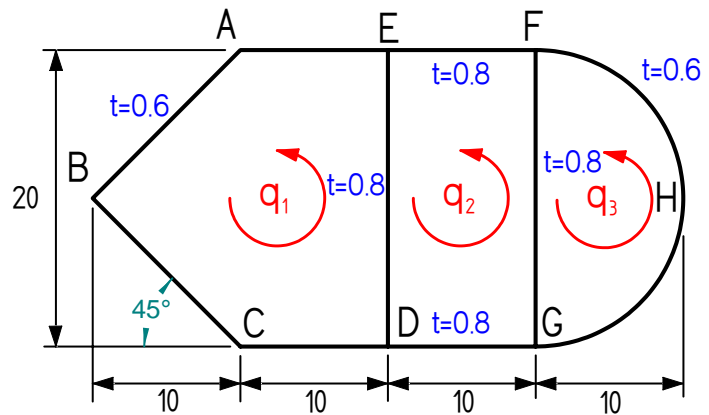
**Rama ADC y GFE:**

$$\tau = \frac{q_1 - q_2}{h_1} = \frac{554.63 - 517.67}{0.6} = 61.56 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

**Ejemplo:** Considere la sección de la figura.

Se pide determinar la tensión de corte en una barra de esa sección sometida a un momento torsor  $M = 7 [\text{tonf} \cdot \text{m}]$  y el valor de la constante torsional.

**Solución:** Considerando una analogía con las leyes de Kirchhoff se tiene:



$$\sum_n \left( q_n \cdot \frac{1}{G\chi} \oint_C \frac{ds}{t_n} \right) = 2\Omega_C, \quad \text{donde los } q_n \text{ son los } \textbf{flujos de corte} \text{ a determinar en cada una de las células.}$$

**Rama EABCD:**

$$q_1 \frac{1}{G\chi} \oint_{EABCD} \frac{ds}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{1}{G\chi} \oint_{DE} \frac{ds}{0.8} = 2 \left( \frac{20 \cdot 10}{2} + 20 \cdot 10 \right),$$

$$1.4142 q_1 - q_2 = 18 \cdot G\chi \quad (1).$$

**Malla EDGFE:**

$$(q_2 - q_1) \frac{1}{G\chi} \oint_{ED} \frac{ds}{0.8} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{DG} \frac{ds}{0.8} + (q_2 - q_3) \frac{1}{G\chi} \oint_{GF} \frac{ds}{0.8} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{FE} \frac{ds}{0.8} = 2(20 \cdot 10),$$

$$-q_1 + 3q_2 - q_3 = 16 \cdot G\chi \quad (2).$$

**Malla FGHF:**

$$(q_3 - q_2) \frac{1}{G\chi} \oint_{FG} \frac{ds}{0.8} + q_3 \frac{1}{G\chi} \oint_{GHF} \frac{ds}{0.6} = 2 \left( \frac{\pi \cdot 10^2}{2} \right),$$

$$-q_2 + 3.0944 q_3 = 12.566 \cdot G\chi \quad (3).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$(1), (2) \text{ y } (3) \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 24.499 \cdot G\chi \\ q_2 = 16.6465 \cdot G\chi \\ q_3 = 9.4404 \cdot G\chi \end{cases}.$$

**Constante torsional** (2 veces el volumen encerrado bajo la función  $\phi$ ):

$$J = 2 \sum \Omega_i \phi_i = \frac{2}{G\chi} \sum \Omega_i q_i.$$

$$J = \frac{2}{G\chi} \left[ \left( \frac{20 \cdot 10}{2} + 20 \cdot 10 \right) \cdot 24.499 G\chi + 20 \cdot 10 \cdot 16.6465 G\chi + \left( \frac{\pi \cdot 10^2}{2} \right) \cdot 9.4404 G\chi \right] = 24324 [cm^4].$$

Dado el **momento torsional** aplicado se obtiene:

$$G\chi = \frac{M}{J} = \frac{700.000}{24324.8} = 28.78 \left[ \frac{kg}{cm^3} \right].$$

Por lo tanto **los flujos de corte** valen:

$$q_1 = 24.449 \cdot 28.78 = 703.60 \left[ \frac{kg}{cm} \right],$$

$$q_2 = 16.6465 \cdot 28.78 = 479.06 \left[ \frac{kg}{cm} \right],$$

$$q_3 = 9.4404 \cdot 28.78 = 271.68 \left[ \frac{kg}{cm} \right].$$

Por lo tanto las **tensiones** valen:

$$\text{Rama EABCD: } \tau = \frac{q_1}{t_1} = \frac{703.60}{0.6} = 1172.67 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

$$\text{Rama DE: } \tau = \frac{q_1 - q_2}{t_2} = \frac{703.60 - 479.06}{0.8} = 280.68 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

$$\text{Rama DG y FE: } \tau = \frac{q_2}{t_2} = \frac{479.06}{0.8} = 598.82 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

$$\text{Rama GF: } \tau = \frac{q_2 - q_3}{t_2} = \frac{479.06 - 271.68}{0.8} = 259.22 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

$$\text{Rama GHF: } \tau = \frac{q_3}{t_3} = \frac{271.68}{0.6} = 452.80 \left[ \frac{kg}{cm^2} \right].$$

## 8 MÉTODOS DE ENERGÍA

### 8.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha planteado la **teoría de elasticidad a través de ecuaciones tensionales**, que relacionan las componentes de las **diferentes cantidades** que definen el comportamiento mecánico de un cuerpo sólido.

En este capítulo se hará un **planteamiento alternativo** en que las leyes de comportamiento se expresan a través de **condiciones sobre cantidades escalares**.

Así, las **ecuaciones de equilibrio** por ejemplo, quedan dadas en términos de la condición de **estacionariedad de la energía potencial total**, esto es, **la energía de deformación del cuerpo más la energía potencial de las fuerzas externas**.

Los principios básicos de este planteamiento son, como se verá a continuación el **Principio de los Trabajos Virtuales** y el **Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios**.

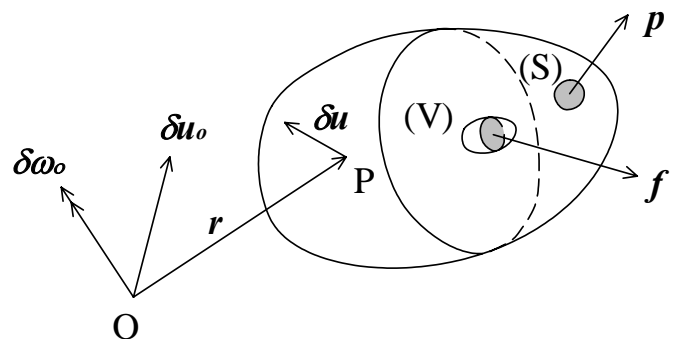
### 8.2 Principio de los Trabajos Virtuales para un Cuerpo Indeformable

Se denomina **Trabajo Virtual (TV)** al que realiza un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo para un **desplazamiento arbitrario** de éste, **que no guarde relación con las deformaciones** provocadas por dichas fuerzas.

Así, si una fuerza  $F$  se desplaza  $\delta u$ , el **trabajo virtual** desarrollado será  $F \cdot \delta u$ .

Para distinguir las **cantidades virtuales** de las reales se les antepone la letra griega  $\delta$ .

Consideremos un cuerpo indeformable sometido a un sistema de fuerzas  $\vec{f}$  en  $(V)$  y  $\vec{p}$  en  $(S)$ , como se muestra en la figura.



Al ser indeformable, los **corrimientos** de todos los puntos del cuerpo quedan definidos, **para pequeños desplazamientos**, en términos del **corrimiento** y **giro** de un punto de referencia  $O(x_j)$  del cuerpo,  $\delta \vec{u}_o$  y  $\delta \vec{\omega}_o$ , de la siguiente forma:

$$\delta \vec{u} = \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\omega}_o \times \vec{r}.$$

El **TV total de las fuerzas externas sobre el cuerpo** vale:

$$\delta W_T = \iiint_V \vec{f} \cdot (\delta \vec{u}_o + \delta \vec{w}_o \times \vec{r}) dV + \iint_S \vec{p} \cdot (\delta \vec{u}_o + \delta \vec{w}_o \times \vec{r}) dS,$$

expresión que puede transformarse en:

$$\delta W_T = \delta \vec{u}_o \cdot \left[ \iiint_V \vec{f} dV + \iint_S \vec{p} dS \right] + \delta \vec{w}_o \cdot \left[ \iiint_V \vec{r} \times \vec{f} dV + \iint_S \vec{r} \times \vec{p} dS \right].$$

El primer paréntesis de esta relación es igual a la **resultante** de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo, mientras el segundo paréntesis es el **momento resultante** de las fuerzas externas con respecto al punto  $O(x_j)$ .

Si el sistema de fuerzas está en equilibrio, ambos paréntesis son nulos y el **TV<sub>Total</sub>**,  $\delta W_T$  es nulo. A la inversa, si el **TV<sub>Total</sub>** realizado por las fuerzas externas para desplazamientos arbitrarios  $\delta \vec{u}_o$  y  $\delta \vec{w}_o$ , es cero, cada paréntesis debe anularse y, en consecuencia, el cuerpo está en equilibrio.

Se puede decir entonces que:

*“La condición necesaria y suficiente para que un **cuerpo indeformable**, sometido a un sistema de fuerzas  $\vec{f}$  en  $(V)$  y  $\vec{p}$  en  $(S)$ , esté en equilibrio, es que el **trabajo de dichas fuerzas**, para un desplazamiento virtual arbitrario  $\delta \vec{u}_o$  y  $\delta \vec{w}_o$  **sea igual a cero**”.*

### 8.3 Principio de los TV para un Mecanismo

Mecanismo es un **sistema de cuerpos rígidos interconectados** a través de puntos comunes a dos o más cuerpos.

Considerando las fuerzas de interacción entre los cuerpos, se puede **aplicar el principio de los TV a cada uno de los cuerpos en forma separada**, con las fuerzas externas y las de interacción actuando sobre él.

En cada cuerpo el **trabajo virtual total de las fuerzas externas debe ser nulo**, incluyendo las de interacción.

Si se suma ahora **el trabajo virtual sobre todos los cuerpos del mecanismo**, ocurre que el trabajo de las fuerzas de interacción es nulo pues la acción de un cuerpo, digamos A, sobre otro cuerpo B es igual y contraria a la del cuerpo B sobre el A, siendo el desplazamiento virtual de ambas fuerzas el mismo, pues **debe haber compatibilidad de desplazamiento en los vínculos**.

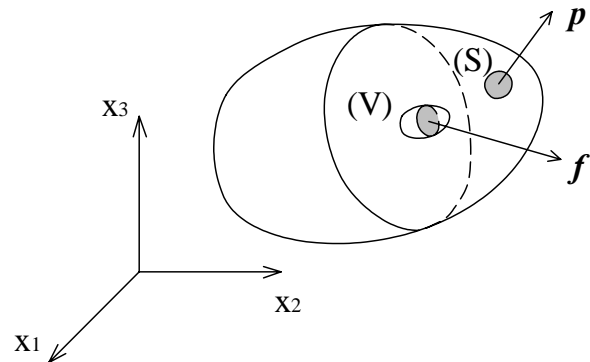
Se tiene entonces que el **trabajo total de las fuerzas externas debe ser nulo**. Por lo tanto:



“La condición necesaria y suficiente para que un **mecanismo** sometido a un sistema de fuerzas externas esté en equilibrio, es que **el trabajo total de las fuerzas externas** debido a un desplazamiento virtual compatible con los vínculos **sea igual a cero**”.

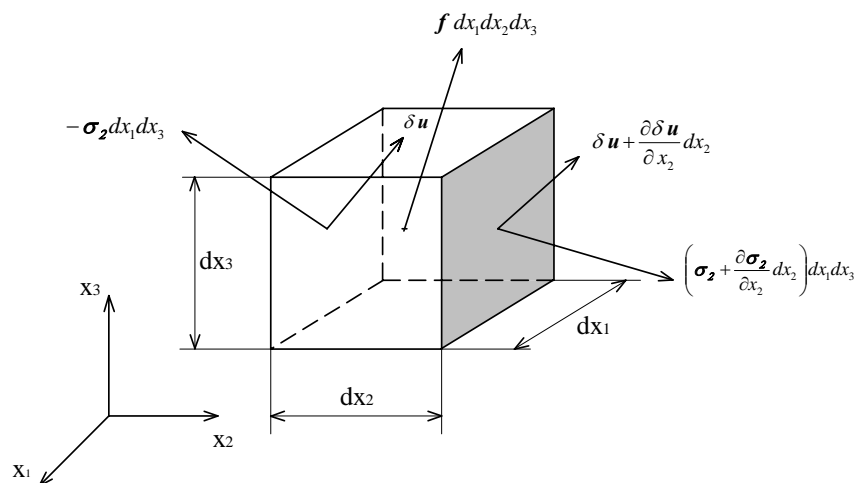
#### 8.4 Principio de los Trabajos Virtuales para Cuerpos Deformables

Sea un cuerpo de volumen  $(V)$  y superficie  $(S)$  sometido a la acción de **fuerzas externas**  $\vec{f}$  en  $(V)$  y  $\vec{p}$  en  $(S)$ , y **tensiones internas**  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .



Consideremos un **elemento infinitesimal** de lados  $dx_1, dx_2, dx_3$  del interior del cuerpo, como se muestra en la figura.

Supongamos que el cuerpo es sometido a un **desplazamiento virtual**  $\delta \vec{u}$  arbitrario pero que vale 0 en  $S_d$ , es decir, donde hay **condiciones de borde de desplazamiento**.



El **trabajo virtual neto** de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento, **dividido por el volumen del elemento**, es:

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \cdot u) + f \cdot \delta u,$$

en consecuencia, el **trabajo virtual total** en el cuerpo vale:

$$\delta W_T = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \cdot \delta u) dV + \iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV. \quad (*)$$

La primera integral de volumen de esta expresión puede transformarse en una integral de superficie mediante el **teorema de la divergencia**, con la cual se obtiene:

$$\delta W_T = \iint_{S_t} \nu_i \sigma_i \cdot \delta u dS + \iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV,$$

donde  $\nu_i$  es el **vector unitario normal** a la superficie y  $\delta u = 0$  en  $S_d$ .

Si las fuerzas están en equilibrio, en la superficie se tiene  $\nu_i \sigma_i = \mathbf{p}$ , con lo cual:

$$\delta W_T = \iint_{S_t} \mathbf{p} \cdot \delta u dS + \iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta u dV = \delta W_T^{EXT}.$$

Es decir, el **trabajo virtual total** en el cuerpo es igual al **trabajo de las fuerzas externas**.

Por otra parte, desarrollando la expresión (\*) se tiene:

$$\delta W_T = \iiint_V \sigma_i \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{f} \right) \cdot \delta u dV.$$

Si el cuerpo está en equilibrio,  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{f} = 0$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\delta W_T = \iiint_V \sigma_i \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{j,i} dV = \iiint_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV \quad (**)$$

es decir:

$$\delta W_T = \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = \text{trabajo virtual interno} = \delta W_T^{INT}.$$

En resumen, se ha demostrado que cuando se somete un cuerpo en equilibrio a un desplazamiento virtual arbitrario, el **TV de las fuerzas externas es igual al TV de las tensiones internas**.

A la inversa, suponiendo que **si se cumple que para  $\delta u$  arbitrario los trabajos totales externo e interno son iguales, entonces el cuerpo está en equilibrio**.

En efecto, en este caso se tiene que:

$$\iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV ,$$

y transformando el segundo miembro en sentido inverso a (\*\*), se obtiene:

$$\iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \iiint_V \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x_i} dV ,$$

es decir:

$$\iiint_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \cdot \delta \mathbf{u}) dV - \iiint_V \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \cdot \delta \mathbf{u} dV .$$

Si se aplica el **teorema de la divergencia** para transformar la primera integral del segundo miembro, se obtiene finalmente:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{f} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iint_S (\mathbf{p} - \nu_i \sigma_i) \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 .$$

Para que esta ecuación sea válida para  $\delta \mathbf{u}$  arbitrario, **necesariamente los paréntesis deben anularse**, de donde se concluye que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{f} &= 0 \quad \text{en } (V) \\ \mathbf{p} &= \nu_i \sigma_i \quad \text{en } (S_t) \end{aligned} .$$

Es decir, hay **equilibrio** entre **fuerzas externas de volumen** y **tensiones internas**, y entre **fuerzas externas de superficie** y **tensiones internas en la superficie**.

En resumen, se puede anunciar el siguiente principio o teorema:

**“Dado un cuerpo sometido a fuerzas  $\mathbf{f}$  en  $(V)$  y  $\mathbf{p}$  en  $(S_t)$ , y seis funciones de tensiones  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  en  $(V)$ , la condición necesaria y suficiente para que esté en equilibrio es que, para desplazamientos virtuales arbitrarios  $\delta \mathbf{u}$ , el trabajo virtual total externo e interno sean iguales  $(\delta W_T^{INT} = \delta W_T^{EXT})$ ”.**

### 8.5 Aplicación del PTV: Método del Desplazamiento Unitario Ficticio (MDUF)

Sea un cuerpo cuyas tensiones internas  $\sigma_{ij}$  son conocidas. Se desea saber qué fuerza externa puntual  $P$  debe existir en un punto dado y dirección dada del cuerpo para que éste esté en equilibrio.

Para ello se puede emplear el **PTV** con un **corrimiento virtual**  $\delta u^1$ , tal que la fuerza  $P$  sea la única que trabaje y que en su punto de aplicación y dirección, se tenga que  $\delta u^1 = 1$ . Con ello, considerando que  $\delta u^1$  produce deformaciones internas  $\delta e_{ij}^1 = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j}^1 + \delta u_{j,i}^1)$ , se tiene, igualando el **TV externo** con el **TV interno**:

$$P = \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij}^1 dV .$$

### 8.6 Teorema de la Energía Potencial Estacionaria (T.E.P.E.)

Suponiendo un cuerpo es elástico, es decir, que un proceso de carga y descarga en él es **reversible**, aunque **no necesariamente lineal**, la **energía de deformación** almacenada en el cuerpo **por unidad de volumen**, que **es igual al trabajo interno** entre el inicio de la deformación y el estado final, puede ser **expresado en función de la deformación final**.

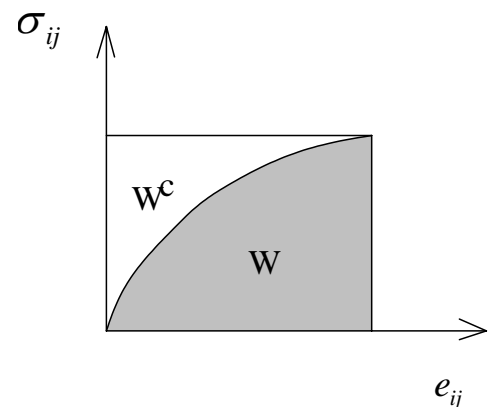
Esta energía es **igual al área encerrada bajo la curva** de la figura.

Es decir:

$$W = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij} de_{ij} = W(e_{ij}) ,$$

lo cual significa:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} .$$



Considerando el Principio de los **TV**, con un **desplazamiento virtual infinitesimal compatible con ( $S_d$ )** y el resultado anterior, se tiene:

$$\iiint_V \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} dV - \iiint_V f_i \delta u_i dV - \iint_{S_t} p_i \delta u_i dS = 0 ,$$

lo cual es equivalente a la **primera variación del funcional**:

$$\pi = \iiint_V W(e_{ij}) \, dV - \iiint_V f_i u_i \, dV - \iint_{S_t} p_i u_i \, dS .$$

Definiendo:

$$W_T(e_{ij}) = \iiint_V W(e_{ij}) \, dV = \text{energía de deformación del cuerpo} ,$$

$$P_T(u_i) = - \iiint_V f_i u_i \, dV - \iint_{S_t} p_i u_i \, dS = \text{energía potencial de las cargas} ,$$

se tiene:

$$\pi = W_T + P_T = \text{energía potencial total} ,$$

y para la **situación de equilibrio** debe tenerse:

$$\delta\pi = 0 .$$

De aquí el **Teorema de la Energía Potencial Estacionaria, TEPE**, que dice:

**“La primera variación de la energía potencial total de un cuerpo elástico en equilibrio, para un desplazamiento virtual arbitrario compatible con ( $S_d$ ), es cero”.**

## 8.7 Método de Ritz o Método Variacional Directo

El método de Ritz es una aplicación directa del TEPE en la cual se **reemplazan los corrimientos por funciones conocidas** multiplicadas por parámetros a determinar mediante la aplicación de la condición  $\delta\pi = 0$ .

Como los corrimientos sólo deben cumplir la condición de borde en  $S_d$ , se establece la solución como:

$$u_i = \phi_{oi} + \sum_{k=1}^n a_{ik} \phi_k ,$$

donde  $\phi_{oi}$  son funciones conocidas que deben satisfacer las condiciones de borde en  $S_d$ , es decir,  $\phi_{oi} = u_{oi}$  en  $S_d$ , con  $u_{oi}$  conocidos, y  $\phi_k$  son funciones que satisfacen la condición homogénea en  $S_d$ , es decir,  $\phi_k = 0$  en  $S_d$ .

La variación de los corrimientos está así dada por:

$$\delta u_i = \sum_{k=1}^N \phi_k \delta a_{ik}.$$

En el caso de un **material linealmente elástico** la **energía de deformaciones por unidad de volumen** vale  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij}$  (**fórmula de Clapeyron**), con lo cual:

$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij} dV - \iiint_V f_i u_i dV - \iint_S p_i u_i dS.$$

Pero las tensiones para un **material isótropo**, están relacionadas con las deformaciones a través de:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \lambda u_{k,k},$$

la que, reemplazando en la ecuación anterior, conduce a:

$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_V (2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \lambda u_{k,k}) e_{ij} dV - \iiint_V f_i u_i dV - \iint_S p_i u_i dS$$

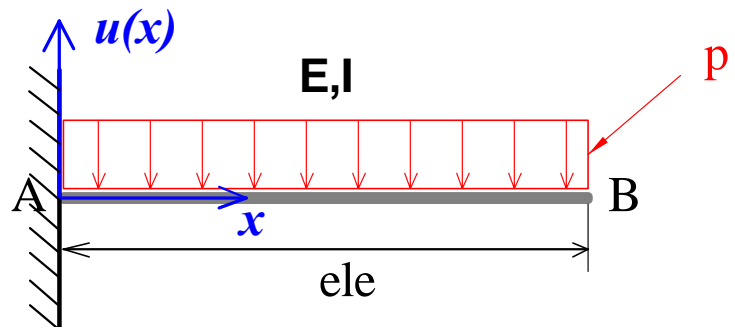
Una vez reemplazados la aproximación de los corrimientos en esta ecuación y desarrolladas las integrales correspondientes, se obtiene una **expresión cuadrática en los coeficientes  $a_{ik}$  para la energía de deformación y lineal en los  $a_{ik}$  para la energía potencial de las cargas externas**.

La **condición de estacionariedad** de  $\pi$  está dada por  $\frac{\partial \pi}{\partial a_{ik}} = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ .

La aplicación de esta condición conduce a un **sistema de  $3n \times 3n$  ecuaciones algebraicas** para los parámetros  $a_{ik}$ , cuya resolución permite **obtener los corrimientos en forma aproximada**.

**Ejemplo:** Consideremos una **viga en voladizo**, como se muestra en la figura, sometida a una **carga uniformemente repartida**  $p$ .

En este caso  $S_d$  corresponde al **punto de empotramiento**, donde tanto **la elástica** de la viga como su **primera derivada deben ser cero**.



Las funciones a usar deben, entonces, satisfacer las siguientes **condiciones de borde** en  $x = 0$ :  $u(x = 0) = 0$  y  $u'(x = 0) = 0$ .

Usando una **expansión polinómica**, se tiene entonces:  $u(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3$ .

La **energía potencial total** vale:  $\pi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} e_{xx} dV - \int_0^l p u dx$ .

Usando la hipótesis de **Bernoulli**, que **las secciones planas de la viga permanecen planas y perpendiculares a la elástica** (despreciando las deformaciones de corte), se tiene:  $e_{xx} = y u''$  y  $\sigma_{xx} = E y u''$ , con lo cual:

$$W_T = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} e_{xx} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \iint_A E (u'')^2 y^2 dA \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI (u'')^2 dx.$$

Reemplazando en la expresión para  $\pi$  se obtiene:

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_2 + 6a_3 x)^2 dx - p \int_0^l (a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = \frac{EI}{2} (4a_2^2 l + 12a_2 a_3 l^2 + 12a_3^2 l^3) - p \left( \frac{a_2}{3} l^3 + \frac{a_3}{4} l^4 \right).$$

Las condiciones  $\frac{\partial \pi}{\partial a_2} = \frac{\partial \pi}{\partial a_3} = 0$  conducen al **sistema de ecuaciones**:

$$\left. \begin{aligned} 4a_2 + 6a_3 l &= \frac{pl^2}{3EI} \\ 6a_2 + 12a_3 l &= \frac{pl^2}{4EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{24} \frac{pl^2}{EI} \\ a_3 &= -\frac{1}{12} \frac{pl}{EI} \end{aligned}$$

valores que, reemplazados en la **función aproximada original** dan:

$$u(x) = \frac{5}{24} \frac{pl}{EI} \left( lx^2 - \frac{2}{5} x^3 \right).$$

El valor del **desplazamiento en el extremo libre** es:

$$u(l) = \frac{5}{24} \frac{pl}{EI} \left( l^3 - \frac{2}{5} l^3 \right) = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{EI} \left( 1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{EI} \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{8} \frac{pl^4}{EI}.$$

**Ejemplo:** Consideremos una **viga en voladizo con “cama” de resortes y carga puntual en el extremo libre**, como indica la figura. Se determinará la elástica de la figura empleando un **polinomio de dos términos**, compatible con las condiciones de borde. Se supondrá propiedades **constantes de la viga**  $EI$ , y un **apoyo elástico** de constante  $k$  y sólo deformaciones por flexión.

Sea  $u(x) = a_1 x^2 - a_2 x^3$ , las **condiciones de borde** del problema son:

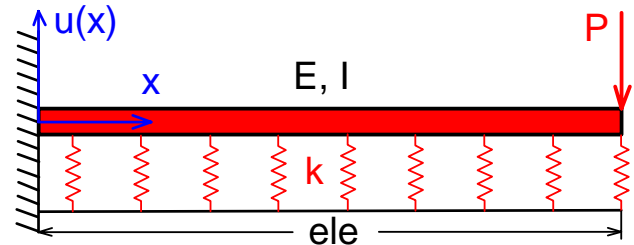
$$u(0) = 0 \text{ y } u'(0) = 0:$$

$$u(0) = 0 \quad \text{O.K.}$$

$$u'(x) = 2a_1 x + 3a_2 x^2$$

$$u'(0) = 0 \quad \text{O.K.}$$

$$u''(x) = 2a_1 + 6a_2 x$$



La **energía de deformación** esta dada en este caso por:

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l u'^2(x) dx + \frac{k}{2} \int_0^l u^2(x) dx - P \cdot u(l)$$

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_1 + 6a_2 x)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l (a_1 x^2 + a_2 x^3)^2 dx - P \cdot (a_1 l^2 + a_2 l^3)$$

$$\pi = \frac{EI}{2} (4a_1^2 l + 12a_1 a_2 l^2 + 12a_2^2 l^3) + \frac{k}{2} \left( \frac{a_1^2}{5} l^5 + \frac{a_1 a_2}{3} l^6 + \frac{a_2^2}{4} l^7 \right) - P(a_1 l^2 + a_2 l^3)$$

En la **situación de equilibrio**  $\delta \pi = 0$ :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{2} (8a_1 l + 12a_2 l^2) + \frac{k}{2} \left( \frac{2}{5} a_1 l^5 + \frac{1}{3} a_2 l^6 \right) - Pl^2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{2} (12a_1 l^2 + 24a_2 l^3) + \frac{k}{2} \left( \frac{1}{3} a_1 l^6 + \frac{2}{7} a_2 l^7 \right) - Pl^3 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} a_1 A + a_2 B = Pl \\ a_1 C + a_2 D = Pl \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_1 = \frac{1}{A} \left( Pl - Pl \left( \frac{A-C}{AD-BC} \right) \right) \\ a_2 = Pl \left( \frac{A-C}{AD-BC} \right) \end{matrix} \right. \quad \therefore u(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$



## 8.8 Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios

Se denomina **Trabajo Virtual Complementario (TVC)** aquél realizado por **fuerzas virtuales**, es decir, fuerzas de **naturaleza arbitraria** que **no guardan relación** alguna con las fuerzas reales sobre el cuerpo o con las deformaciones.

Supongamos que en un cuerpo, en lugar de tener **desplazamientos virtuales** y **fuerzas reales**, se tenga un sistema de **corrimientos reales**  $u_i$  (con las correspondientes **deformaciones unitarias**  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  y **fuerzas virtuales en equilibrio**  $\delta f_i$ ,  $\delta p_i$ , con **tensiones virtuales internas**  $\delta \sigma_{ij}$ , vale decir, que cumplan las relaciones:

$$\delta \sigma_{ij,j} + \delta f_i = 0 \quad \text{en} \quad (V)$$

$$\delta \sigma_{ij} = \delta \sigma_{ji} \quad \text{en} \quad (V) .$$

$$v_i \delta \sigma_{ij} = \delta p_j \quad \text{en} \quad (V)$$

Mediante un desarrollo análogo al realizado en el caso de los trabajos virtuales **TV**, se puede ver que El **TVC por unidad de volumen** vale:

$$\delta W^C = \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \sigma_i \cdot u) + \delta f \cdot u . \quad (*)$$

El TVC total en el cuerpo es entonces:

$$\delta W_T^C = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \sigma_i \cdot u) dV + \iiint_V \delta f \cdot u dV .$$

Usando el teorema de la divergencia y las relaciones recién enunciadas, la expresión (\*) se puede transformar en:

$$\delta W_T^C = \iiint_V \delta f \cdot u dV + \iint_S \delta p \cdot u dS = \text{TVC de las fuerzas externas} = \delta W_T^{C,EXT} .$$

Por otra parte, desarrollando la expresión (\*), se obtiene:

$$\delta W_T^C = \iiint_V (\delta \sigma_{i,i} + \delta f) \cdot u dV + \iiint_V \delta \sigma_i \cdot u_{,i} dV .$$

La primera integral de esta relación vale 0, por las condiciones de equilibrio. La segunda integral, considerando que  $\delta \sigma_{ij} = \delta \sigma_{ji}$ , se puede desarrollar de manera que aparezcan las deformaciones unitarias, obteniéndose:

$$\delta W_C^T = \iiint_V \delta \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dV .$$

El trabajo complementario interno del cuerpo vale:

$$\delta W_T^{C,INT} = \iiint_V \delta \sigma_{ij} e_{ij} dV . \quad (**)$$

Por lo tanto, si  $e_{ij}$  es igual a  $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , se tiene que:

$$\delta W_T^{C,EXT} = \delta W_T^{C,INT} .$$

A la inversa, suponiendo que se cumple (\*\*) para fuerzas virtuales arbitrarias, es decir:

$$\iiint_V \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS = \iiint_V \delta \sigma_{ij} e_{ij} dV , \quad (***)$$

y considerando que  $\delta \mathbf{f} = -\delta \boldsymbol{\sigma}_{i,i}$ , se tiene que la primera integral de la ecuación anterior vale:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV &= \iiint_V \delta \boldsymbol{\sigma}_{i,i} \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ &= -\iiint_V (\mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_i)_{,i} dV + \iiint_V u_{,i} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_i dV \\ &= -\iint_S \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{p} dS + \iiint_V \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dV \end{aligned}$$

Finalmente, substituyendo en (\*\*\*) se obtiene:

$$\iiint_V \left[ \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij} \right] \delta \sigma_{ij} dV = 0 .$$

Por lo tanto debe tenerse:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

El **principio de los trabajos virtuales complementarios** puede enunciarse entonces como:

*“Dadas 6 funciones  $\mathbf{e}_{ij}$  ( $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ji}$ ), una condición necesaria y suficiente para que ellas sean **componentes lineales de deformación compatibles con los corrimientos  $\mathbf{u}_i$** , es que para un sistema arbitrario de fuerzas virtuales en equilibrio, **el trabajo virtual complementario externo sea igual al trabajo virtual complementario interno**,  $\delta W_T^{C,EXT} = \delta W_T^{C,INT}$ ”.*

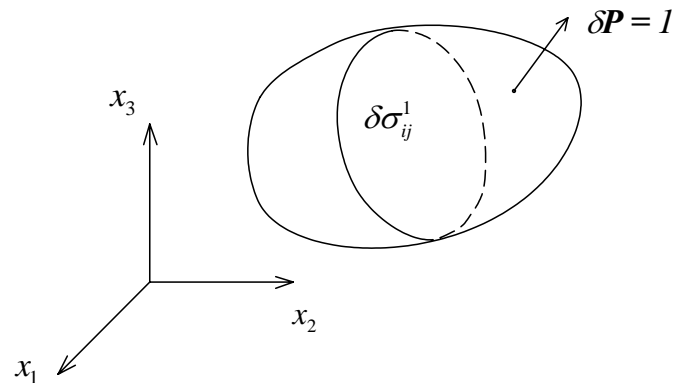
### 8.9 Aplicación: método de la carga unitaria ficticia.

El principio de los **trabajos virtuales complementarios** se suele utilizar para la **determinación del corrimiento** de un punto de un cuerpo elástico sometido a un estado tensional.

Para ello, aplicamos un **estado de fuerzas virtuales** consistente en una **fuerza puntual unitaria en el punto y en la dirección de interés**, y las correspondientes **tensiones virtuales internas**, en **equilibrio con dicha fuerza**.

Igualando el trabajo **virtual complementario externo** con el **interno**, se obtiene:

$$\bar{\mathbf{I}} \cdot \Delta = \iiint_V e_{ij} \delta \sigma_{ij} dV.$$

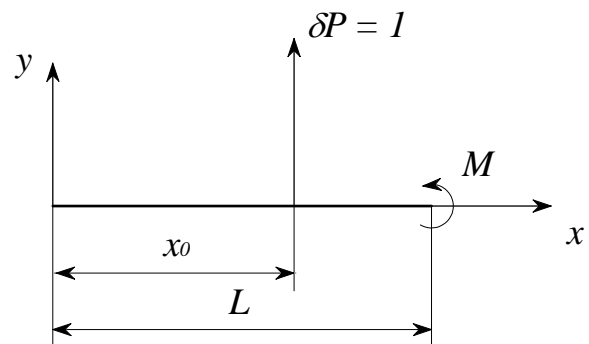


#### Ejemplo: Deformación de una viga en flexión.

Consideremos una viga que **sólo se deforma por flexión** sometida a fuerzas transversales que le inducen un esfuerzo de flexión  $M(x)$ .

Se supone válida la hipótesis de Bernoulli de que las **secciones planas permanecen planas, indeformables y perpendiculares a la elástica**, con lo cual las deformaciones están dadas por:

$$e_{xx} = -\frac{M}{EI} y.$$



Supongamos que se desea saber la **deformación de la viga** en el punto  $x = x_0$ .

Para ello consideremos un **sistema de fuerzas virtuales consistente en una fuerza unitaria aplicada en el punto de interés**, la cual estará en equilibrio con los momentos internos  $\delta M^1$ .

Las correspondientes tensiones internas son:  $\delta \sigma_{xx}^1 = -\frac{\delta M^1}{I} y$ .

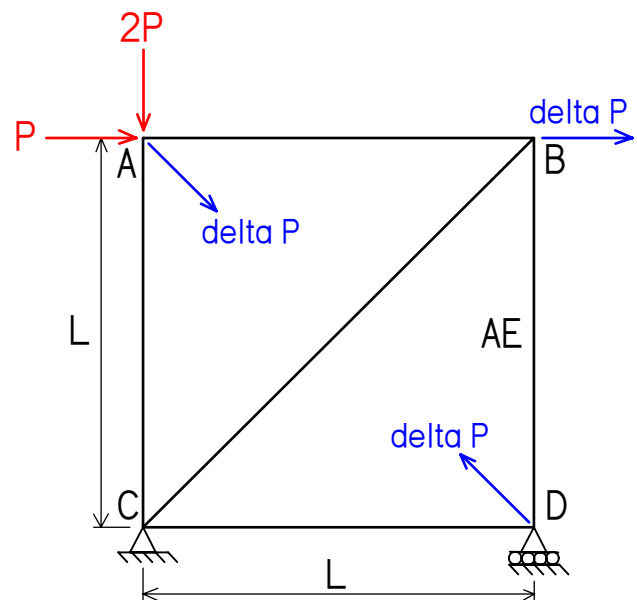
Aplicando el **PTVC** se tiene:  $\Delta = \int_0^L \iint_A \delta \sigma_{xx}^1 e_{xx} dA dx = \int_0^L \frac{\delta M^1 M}{EI} dx$ .

**Ejemplo:** Considere un **enrejado plano isostático** como el de la figura, sometido a las cargas que se indican (**P** y **2P** en el nodo A).

Se utilizará el **PTVC** para evaluar el **desplazamiento horizontal del nodo B** y el **desplazamiento relativo AD**.

A partir del enunciado general del Principio de Trabajos Virtuales Complementarios, que establece que:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \sigma_{ij} \cdot e_{ij} dV &= \\ &= \iiint_V \delta f_i \cdot u_i dV + \iint_S \delta p_i \cdot u dS, \end{aligned}$$



y considerando que en este caso, las únicas fuerzas que **“trabajan”** corresponden a los **esfuerzos internos en las barras**, este principio puede reformularse como:

$$\iiint_V \delta \sigma_{ij}^1 \cdot e_{ij} dV = 1 \cdot \Delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{Barras}} \delta \sigma_{ij}^1 \cdot e_{ij} dV = 1 \cdot \Delta$$

En esta formulación, las **fuerzas virtuales unitarias, inducirán estados tensionales en las barras**, los que denominaremos  $\sigma_{ij}^1$ , correspondientes al **“Estado 1”** (denotado por el **supraíndice 1** en las ecuaciones).

El desplazamiento total en la dirección de análisis, quedará determinado por la **sumatoria del producto de los esfuerzos virtuales de las barras** (inducidos solo por el estado de carga virtual, “Estado 1”) **con las deformaciones de las barras** (inducidas solo por el estado de cargas original).

Reemplazando en la última ecuación, las **expresiones para las tensiones** y las **deformaciones en las barras**, se obtiene:

$$\sum_{\text{Barras}} \left( \frac{T_i^1}{A_i} \right) \left( \frac{T_i}{A_i E_i} \right) A_i L_i = \sum_{\text{Barras}} \frac{T_i^1 T_i L_i}{A_i E_i} = \Delta$$

En particular, para determinar el **desplazamiento horizontal del nodo B**, se deberá **considerar una fuerza ficticia unitaria**  $\delta P = 1$  actuando sobre el nodo B, en esa dirección (**dirección de deformación compatible con las ligazones del sistema**).

Análogamente, en el caso del **desplazamiento relativo AD**, se deberá considerar una **fuerza ficticia unitaria**  $\delta P = 1$  actuando sobre la **diagonal AD**, tal como muestra la figura.

Una forma rápida de realizar los cálculos, consiste en confeccionar la siguiente tabla, donde se resumen las **características geométricas del enrejado**, las **propiedades mecánicas de los elementos** y las **tensiones inducidas** en los elementos, ya sean “**reales**”, debidas al sistema de cargas o “**virtuales**”, debidas a la fuerza ficticia supuesta.

**Desplazamiento horizontal nudo B:**

**Movimiento relativo diagonal AD:**

Barra	$L_i$	$T_i$	$T_i^1$	$T_i T_i^1 L_i$	$E_i$	$A_i$	$T_i^1$	$T_i T_i^1 L_i$
AB	L	P	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
AC	L	2P	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-2PL/\sqrt{2}$
BD	L	P	-1	$-PL$	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
CD	L	0	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}PL$	E	A	1	$2PL$
$\sum T_i T_i^1 L_i = -3.828PL$					$\sum T_i T_i^1 L_i = -4.828PL$			

En cada caso, los **desplazamientos finales** se obtienen **sumando los trabajos internos realizados por las barras**, para **cada una de las combinaciones de carga**.

Finalmente se obtiene:

$$D_{Horizontal \ B} = -3.828 \frac{PL}{EA},$$

$$D_{Diagonal \ AD} = -4.828 \frac{PL}{EA}.$$

**Observaciones:**

- Se debe tener cuidado de considerar las **propiedades específicas de cada barra** en la sumatoria (en este caso en particular las **constantes E y A** eran las mismas para todas las barras).
- El **signo final del desplazamiento** (en estos dos casos negativos), indica que el desplazamiento tiene **sentido contrario** a la dirección en que se supuso la fuerza unitaria ficticia (ver figura).

### 8.10 Teorema de la Energía Potencial Complementaria Estacionaria.

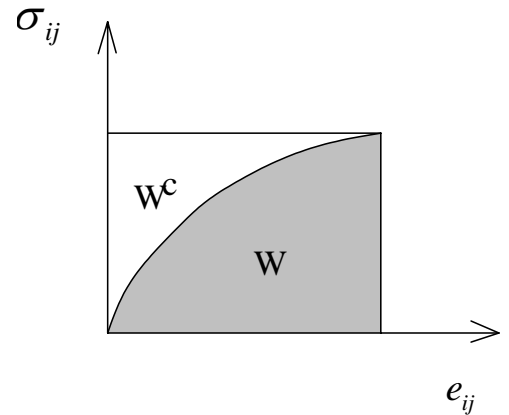
Supongamos que un cuerpo es sometido a un **estado de carga lentamente** de manera que **no haya un efecto dinámico** y que el **proceso es reversible**, es decir, al retirar la carga el cuerpo vuelve a la posición inicial.

La **curva tensión deformación** en un punto se puede representar como en la figura.

Como se vio anteriormente, el **trabajo realizado por las tensiones**  $\sigma_{ij}$ , a medida que se va produciendo la deformación, es el **área gris** de la figura,  $W$ . Complementariamente, se puede considerar el **área blanca** de la figura.

Se define un **trabajo complementario por unidad de volumen como:**

$$W^C = \int_0^{\text{posicion final}} e_{ij}(\sigma_{ij}) \delta\sigma_{ij}.$$



el cual puede ser expresado en términos de las tensiones  $W^C = W^C(\sigma_{ij})$ , con lo cual:

$$\delta W^C = \frac{\partial W^C}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij},$$

por lo tanto:

$$e_{ij} = \frac{\partial W^C}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Considerando un **sistema de fuerzas y tensiones virtuales** tales que cumplan las condiciones de equilibrio y sean nulas en  $S_t$ , el **Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios** se puede expresar como:

$$\iiint_V \frac{\partial W^C(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} dV - \iint_{S_d} u_i^0 v_i \delta\sigma_{ij} dS = 0.$$

Definiendo el **funcional "Energía Potencial Complementaria Total"** como:

$$\pi_T^C = \iiint_V W^C(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_d} u_i^0 v_i \sigma_{ij} dS,$$

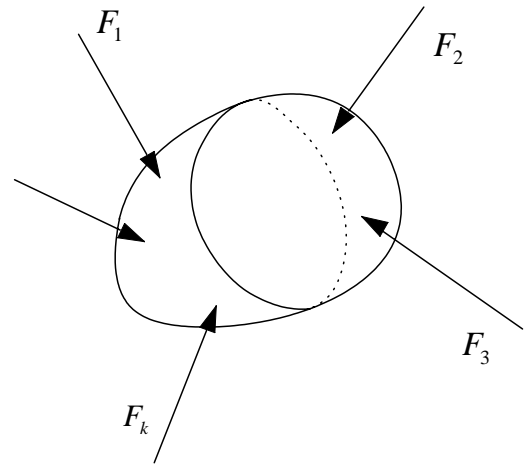
la relación anterior es equivalente a:  $\delta\pi_T^C = 0$ .

En palabras:

**“La primera variación de la Energía Potencial Complementaria Total de un cuerpo elástico en equilibrio, debida a tensiones virtuales arbitrarias pero estáticamente admisibles, es cero”.**

## 8.11 Teoremas de Energía para Cuerpos Sometidos a Cargas Puntuales

Supongamos un **cuerpo elástico** sometido a una serie de fuerzas puntuales  $P_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , como se muestra en la figura.



### 8.11.1 Primer Teorema de Castigliano

Si en el **punto de aplicación** de una carga genérica  $P_k$ , el **desplazamiento en la dirección de ella** es  $u_k$ , la **energía potencial total** puede expresarse en función de dichos **corrimientos**:

$$\pi_T = W_T(u_k) - \sum_{k=1}^N P_k u_k.$$

La **Energía Potencial Total** es, entonces, **función de los corrimientos**.

Una **primera variación** de éstos conduce a la siguiente **variación de la energía**:

$$\delta\pi_T = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial W_T}{\partial u_k} - P_k \right) \delta u_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

de donde se concluye que:

$$P_k = \frac{\partial W_T}{\partial u_k}.$$

Luego:

**“La derivada de la energía de deformación de un cuerpo elástico con respecto al corrimiento del punto de aplicación de una fuerza, es igual a la fuerza” (1<sup>er</sup> Teorema de Castigliano).**

### 8.11.2 Teorema de Engesser

La **Energía Potencial Complementaria Total** de un cuerpo elástico sometido a fuerzas puntuales puede ser expresada en función de dichas fuerzas:

$$\pi_T^C = W_T^C(P_k) - \sum_{k=1}^N P_k u_k .$$

Haciendo ahora una **variación de las fuerzas**, la primera variación de la energía potencial complementaria es:

$$\delta \pi_T^C = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial W_T^C}{\partial P_k} - u_k \right) \delta P_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N ,$$

de donde se desprende que:

$$u_k = \frac{\partial W_T^C}{\partial P_k} .$$

Luego:

**“La derivada de la energía potencial complementaria total respecto a una de las fuerzas es igual al corrimiento de dicha fuerza en su dirección” (Teorema de Engesser).**

### 8.11.3 Segundo Teorema de Castigliano

En caso de un cuerpo **linealmente elástico**, la **energía de deformación complementaria** es **igual a la energía de deformación**, de manera que si se expresa dicha energía en función de las fuerzas, puede ponerse:

$$u_k = \frac{\partial W_T}{\partial P_k} .$$

Luego:

**“En un cuerpo linealmente elástico la derivada de la energía de deformación con respecto a una fuerza es igual al corrimiento de dicha fuerza en su dirección” (2º Teorema de Castigliano).**



#### 8.11.4 Principio de Reciprocidad de Betti

Consideremos un cuerpo **linealmente elástico** sometido a **dos sistemas de cargas** diferentes,  $P_k^1 \quad k = 1, 2, \dots, N$ ,  $P_l^2 \quad l = 1, 2, \dots, M$ .

Suponiendo que los **correspondientes desplazamientos** son  $u_l^1$  (desplazamiento del estado de carga 1 en el punto de aplicación y dirección de la carga  $P_l^2$ ) y  $u_k^2$  (desplazamiento del estado de carga 2 en el punto de aplicación y dirección de la carga  $P_k^1$ ), podemos aplicar el **principio de los trabajos virtuales** al cuerpo con su **estado 1 de cargas** usando como **desplazamiento virtual los desplazamientos del estado 2**, obteniéndose:

$$\sum_{k=1}^N P_k^1 u_k^2 = \iiint_V \sigma_{ij}^1 e_{ij}^2 dV = \iiint_V c_{ijmn} e_{mn}^1 e_{ij}^2 dV.$$

En la misma forma podemos aplicar el **PTV** al cuerpo con su **segundo estado de carga** usando como **desplazamientos virtuales los desplazamientos del primer estado de carga**.

Se obtiene:

$$\sum_{l=1}^M P_l^2 u_l^1 = \iiint_V \sigma_{ij}^2 e_{ij}^1 dV = \iiint_V c_{ijmn} e_{mn}^2 e_{ij}^1 dV.$$

Como las **constantes constitutivas**  $c_{ijmn}$  son **simétricas**, entonces los valores de las dos ecuaciones anteriores son iguales, con lo cual:

$$\sum_{k=1}^N P_k^1 u_k^2 = \sum_{l=1}^M P_l^2 u_l^1.$$

### 8.11.5 Coeficientes de Rigidez y Flexibilidad

Consideremos un cuerpo con  $n$  fuerzas puntuales.

Se denomina **coeficiente de rigidez** entre dos puntos de aplicación de fuerzas **al cambio en la fuerza  $i$**  cuando hay un **desplazamiento unitario del punto de aplicación de la carga  $j$** , permaneciendo el resto de los desplazamientos invariable.

Es decir,  $k_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial u_j}$ , pero como,  $P_i = \frac{\partial W_T}{\partial u_i}$ , se tiene:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 W_T}{\partial u_i \partial u_j} = k_{ji}.$$

Los coeficientes de rigidez forman entonces una **matriz simétrica**, conocida también como **matriz de rigidez del cuerpo** para el estado de cargas correspondiente.

En forma similar puede definirse una **matriz de flexibilidad** como:

$$f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 W_T^C}{\partial P_i \partial P_j} = f_{ji}.$$

Suponiendo que los **desplazamientos se miden a partir del estado en que las fuerzas son nulas**, se tiene que:

$$P_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j.$$

Si **medimos las fuerzas a partir del momento en que los desplazamientos son nulos**, se tiene:

$$u_j = \sum_{l=1}^n f_{jl} P_l = \sum_l f_{jl} \sum_m k_{lm} u_m = \sum_l \sum_m f_{jl} k_{lm} u_m.$$

Para que de la doble sumatoria de la relación anterior se obtenga  $u_j$ , debe necesariamente tenerse que  $\sum_l f_{jl} k_{lm} = \delta_{jm}$  ( $\delta_{jm}$  = delta de Dirac), lo cual significa que la **matriz de flexibilidad es la inversa de la matriz de rigidez**.