4 RELACIONES CONSTITUTIVAS. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

4.1 Introducción:

En este capítulo se establecerán las ***relaciones constitutivas*** que describen el comportamiento de los materiales.

Se consideraran ***procesos isotérmicos*** y se utilizará ***tensores cartesianos*** en su descripción.

Se describirá la concepción moderna de la ley de Hooke y se analizará como su versión mas generalizada puede ser ***"reducida"*** al caso de cuerpos ***homogéneos*** e ***isotrópicos***, estableciéndose las ecuaciones básicas de la elasticidad.

4.2 Ley de Hooke Generalizada

Un medio se dice que es elástico si posee un estado natural, en el cual esfuerzos y deformaciones son cero, y al cual se puede ***"volver"*** luego de que las fuerzas aplicadas son removidas.

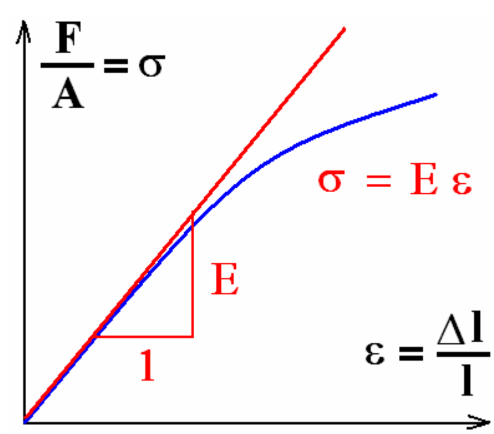
Bajo cargas aplicadas, los esfuerzos y las deformaciones ***"cambian"*** juntos, y las relaciones entre estos, denominadas ***relaciones constitutivas***, son una importante característica de los medios.

Estas relaciones constitutivas iniciaron su desarrollo hace más de 300 años atrás, con las ***determinaciones experimentales*** desarrolladas por ***Robert Hooke*** sobre ***"cuerpos elásticos"***.

Hooke concluyó que el ***esfuerzo es proporcional a la deformación***.

Ejemplo: Ensayo barra a tracción:

Un caso ilustrativo de este concepto, corresponde al análisis unidimensional de un ensayo de tracción de una barra de acero.



En este caso, la ***tensión por unidad de área transversal*** de la barra, es proporcional al ***alargamiento unitario*** de ésta, tal como se esquematiza en la figura adjunta.

Se aprecia que, en cierta zona la relación entre el alargamiento unitario y la tensión, se puede considerar ***"lineal"***, pudiendo identificarse el valor de la ***pendiente de esta recta***, como la constante que relaciona estas variables.

4.3 Forma Tensorial de la Ley de Hooke Generalizada

La forma ***"moderna"*** de la Ley de Hooke Generalizada establece que ***cada componente del tensor de tensiones es una combinación lineal de todos los componentes del tensor de deformación:***

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot e_{kl} \, , \qquad c_{ijkl} = ctes.$$

4.3.1 Caso general de un cuerpo linealmente elástico

Se dice que un cuerpo es ***linealmente elástico*** si obedece a la relación constitutiva recién enunciada.

Como se sabe, las cantidades c_{ijkl} corresponden, a un tensor de cuarto orden, con $3^4 = 81$ componentes.

4.3.2 Simetría del Tensor de Tensiones

Si se considera la simetría del tensor de tensiones $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, se puede establecer la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{jikl} = c_{ijkl} \, .$$

4.3.3 Simetría del Tensor de Deformaciones

Análogamente al caso anterior, si se considera la simetría del tensor de deformaciones $e_{ji} = e_{ij}$, se puede establecer la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{ijlk} = c_{ijkl} \, .$$

Considerando ambos casos, la simetría del tensor de tensiones y la simetría del tensor de deformaciones, el número de constantes elásticas independientes del tensor c_{ijkl} se reduce a 36.

4.3.4 Existencia de una Función Energía de Deformación

Adicionalmente a lo anterior, consideraremos el ***argumento termodinámico*** de la ***existencia de una función de energía interna*** por unidad de volumen.

La existencia de esta función podría establecerse a partir de la primera ley de la termodinámica, que relaciona el cambio de la energía interna de un cuerpo (ya sea cinética o de deformación), con el trabajo hecho sobre él (mecánico o de calentamiento).

Para el caso de procesos adiabáticos o isotérmicos, la ***función energía de deformación*** puede establecerse como:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} .$$

Esta función posee la propiedad de $\dfrac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} = c_{ijpq} e_{pq}$, lo cual implica la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{klij} = c_{ijkl} .$$

Con esta última consideración, el número de constantes elásticas independientes del tensor c_{ijkl} se reduce a 21, pudiendo representarse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} \\ & & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} \\ & & & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} \\ & simetria & & & c_{2323} & c_{2331} \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{Bmatrix} .$$

4.3.5 Simetría con respecto a planos: Ortotropía

Si el material posee alguna otra simetría, es posible reducir aún más el número de constantes independientes que describen su comportamiento.

Por ejemplo, si el material exhibe ***simetría respecto a un plano*** (plano 1-2 por ejemplo), no habrá relación entre las deformaciones que son simétricas respecto a ese plano y las tensiones que son antimétricas respecto al mismo plano.

Por tanto, la matriz de coeficientes se reduce a ***13 elementos***, de la forma siguiente:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ & & & c_{1212} & 0 & 0 \\ & simetria & & & c_{2323} & c_{2331} \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix}.$$

Si existe ***simetría respecto a tres planos mutuamente ortogonales***, se habla de ***material ortotrópico***. En el caso que estos planos sean paralelos a los ejes coordenados, la matriz de coeficientes poseerá solo 9 elementos, de la siguiente forma:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{1212} & 0 & 0 \\ & simetria & & & c_{2323} & 0 \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix}.$$

4.3.6 Material Cúbico

Si además de las simetrías anteriores, consideramos un ***material homogéneo***, es decir, de ***propiedades iguales en las tres direcciones ortogonales***, el material se denomina ***"cúbico"***, y el número de constantes requeridas para describir el material se reduce a 3, de la siguiente forma:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ & & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & & \gamma & 0 & 0 \\ & simetria & & & \gamma & 0 \\ & & & & & \gamma \end{bmatrix}.$$

En lugar de los coeficientes α, β , se acostumbra usar los denominados ***parámetros de Lamé:*** λ, μ , los que se definen como:

$$\alpha = \lambda + 2\mu\,,\;\; \beta = \lambda$$

Con esto, la ley de Hooke toma la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \gamma & 0 & 0 \\ & simetria & & & \gamma & 0 \\ & & & & & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{Bmatrix}.$$

4.3.7 Material Isótropo

Cuando en un material sus ***propiedades son las mismas en cualquier dirección*** que se considere, este material se denomina isótropo.

En este caso, existe una ***relación entre sus módulos elásticos***, la que permite reducir finalmente el número de parámetros independientes a solo 2. La relación que se obtiene, luego de una ***rotación de ejes coordenados*** y de considerar que las ***deformaciones "giradas" deben ser las mismas originales***, es:

$$\gamma = \frac{E}{1+\nu} = 2\mu\,.$$

En el caso de que se acostumbre utilizar los módulos elásticos en vez de las ***constantes de Lamé***, la constante μ se denomina G , o ***módulo elástico para la deformación angular***.

4.4 Relaciones Esfuerzo Deformación para Materiales Elásticos Isotrópicos

Para un ***material elástico isotrópico***, en el cual no existe cambio de temperatura, la ley de Hooke, referida a un sistema de coordenadas rectangulares, puede ser establecida en la forma:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}\;,$$

$$\sigma_{ij}^d = 2Ge_{ij}^d \ ,$$

donde K y G son constantes y, σ_{ij}^d y e_{ij}^d son los esfuerzos y las deformaciones desviatóricas, respectivamente, es decir:

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \ ,$$

$$e_{ij}^d = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \ .$$

Estas relaciones establecen que:

- ***El cambio de volumen por unidad de volumen, es proporcional a la tensión media*** ($\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}$, Ecuación (*)),

- ***El esfuerzo desviatórico es simplemente proporcional a la deformación desviatórica*** ($\sigma_{ij}^d = 2Ge_{ij}^d$, Ecuación (**)).

Una explicación mas detallada del significado de las constantes involucradas en estas ecuaciones, se desarrolla a continuación.

4.4.1 Constantes Elásticas

Consideremos el caso en que los ***esfuerzos de cizalle son nulos*** y los ***esfuerzos normales son iguales***: $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ y $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$.

En este caso, correspondiente al de un cuerpo bajo presión hidrostática, se obtiene de la ecuación (*) que:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -3P = 3Ke_{ii} = 3K\frac{\Delta V}{V} \ ,$$

de donde el coeficiente $K = -\dfrac{p}{\Delta V / V}$, representa la presión dividida por el cambio de volumen por unidad de volumen que produce. Por lo tanto, este coeficiente recibe el nombre de ***"módulo volumétrico"*** o de ***"compresibilidad"*** (o ***módulo de "bulk"***).

Considerando la ecuación (**), haciendo todos los componentes del tensor deformación cero, menos e_{12} , ésta se reduce a:

$$\sigma_{12} = 2G\, e_{12}\,.$$

En esta ecuación, el coeficiente 2 se introduce debido a que antes de que el concepto de tensor se hubiera definido, era costumbre definir la deformación por corte como $\gamma_{xy} = 2e_{xy}$. El coeficiente G se denomina ***"módulo de corte"*** o ***"módulo de rigidez"***.

A partir de las constantes anteriores, es posible definir una nueva constante: $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$. Las constantes λ y μ reciben el nombre de ***constantes de Lamé***.

Si tomamos un cilindro orientado a lo largo del eje 1 y de muy pequeña sección, y aplicamos esfuerzos σ_{11} y $-\sigma_{11}$ a los dos extremos, la proporción entre el esfuerzo y la deformación en su misma dirección e_{11} , define le llamado ***"módulo de Young":***

$$E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}}\,.$$

Si en el mismo caso anterior, además de considerar el cambio de longitud del cilindro δl , consideramos también el cambio de diámetro δd , el cuociente de los cambios por unidad de longitud en ambas dimensiones define el ***"coeficiente de Poisson"***:

$$\nu = \frac{\delta d / d}{\delta l / l} = \frac{e_{22}}{e_{11}}\,.$$

El cuociente de Poisson en función de los parámetros de Lamé es:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\,.$$

Adicionalmente a las relaciones aquí presentadas, existen un gran número de otras relaciones que pueden establecerse entre los parámetros mencionados. El descubrimiento de éstas, se deja al lector.

4.4.2 Deducción de las relaciones esfuerzo deformación

Consideremos ahora el establecer en una sola ecuación, la relación entre esfuerzos y deformaciones, para el caso de un sólido elástico isótropo.

A partir de la ecuación (**) es posible establecer:

$$(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) = 2G(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij})$$

$$(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}3Ke_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) = 2Ge_{ij} - 2G(\frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} - 2G(\frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) + Ke_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = (K - \frac{2}{3}\mu)e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

donde $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$, $\theta = e_{\alpha\alpha}$ y $\mu = G$.

La ecuación anterior, puede también establecerse como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ij} - \lambda\theta\delta_{ij})$$

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij}) - \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\frac{3K\nu}{1+\nu}\right)\left(\frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{3K}\right)\delta_{ij}\right]$$

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}.$$

4.5 Ecuación de Movimiento en un Sólido Elástico, Isótropo e Infinito

La ecuación general de movimiento puede establecerse a partir de la ***segunda ley de Newton***, considerando la relación de ***tensiones de Cauchy*** y utilizando el ***teorema de Green***, tal como se muestra a continuación:

$$\iint_S \overset{\nu}{T}_i \, dS + \iiint_V f_i dV = \frac{\partial}{\partial t}\int v_i \rho \, dV$$

$$\iint_S \nu_j \sigma_{ji} dS + \iiint_V f_i dV = \frac{\partial}{\partial t}\int v_i \rho \, dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \iiint_V f_i dV + = \frac{\partial}{\partial t}\int v_i \rho \, dV$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i - \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} .$$

Si en esta última ecuación, se reemplaza la relación esfuerzo deformación anterior, podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\theta\,\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} .$$

Luego de un poco de álgebra y algunas sustituciones, se obtiene:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} .$$

En notación vectorial esta ecuación puede tiene la forma:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u} + f_i = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} .$$

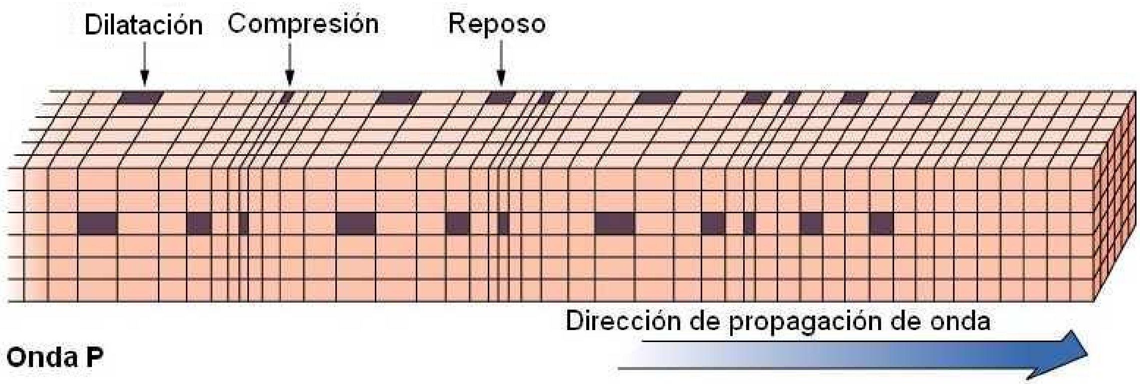
Si consideramos ahora, que ***no existen fuerzas de volumen*** actuando sobre el sólido, ($f_i = 0$), obtenemos la conocida ***Ecuación de Navier***:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} .$$

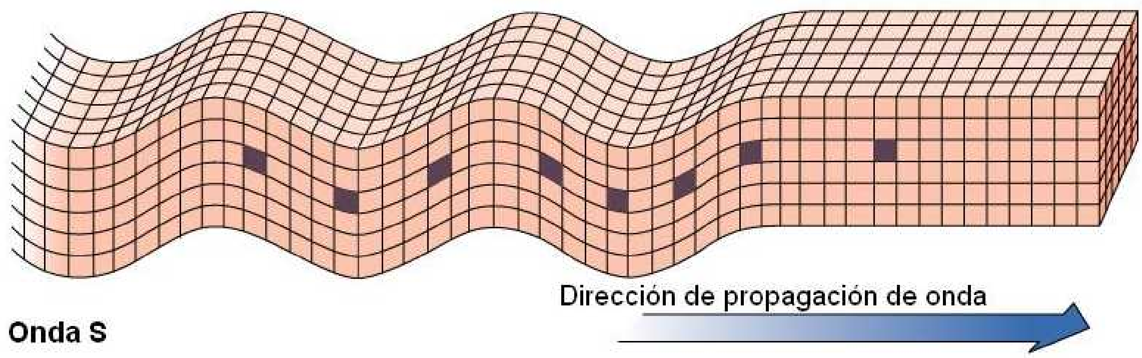
4.6 Ecuaciones de Ondas

A partir de la ecuación de Navier es posible establecer las denominadas ***ecuaciones de onda***. Estas ondas se denominan ***ondas de cuerpo***, porque viajan al ***interior del sólido***. En el caso de medios infinitos (sin condiciones de borde o de fronteras), se distinguen dos tipos principales de ondas:

- Las ***Ondas P***, que corresponden una onda que produce ***dilataciones y compresiones*** en la ***dirección longitudinal*** de propagación de la onda.



- La ***Onda S***, que se propaga produciendo ***deformaciones por corte transversales*** a la dirección de propagación de la onda.



Las ***denominaciones*** de ondas P y S provienen del ***orden de llegada*** de éstas. La ***Onda P*** u onda ***Primaria***, es más rápida que la onda S y por tanto ***"llega"*** primero que la ***Onda S*** o ***Secundaria***.

En caso de medios con ***condiciones de borde o fronteras***, como es el caso de la superficie terrestre, las ecuaciones de ondas se transforman en ***ondas de superficie***, dando origen a las denominadas ***Ondas de Rayleigh*** y ***Ondas Love***.

A continuación estableceremos las ecuaciones de las ondas de cuerpo, en los casos de las ***Ondas P*** y ***S***. Para esto, aplicaremos la ***divergencia*** sobre la ecuación de Navier para obtener la ecuación de la ***Onda P***, y aplicaremos el ***rotor*** sobre la misma ecuación de Navier para obtener la ecuación de la ***Onda S***.

4.6.1 Ecuación de Onda P

En la ecuación de Navier, podemos sustituir el ***Laplaciano*** de u_i por su valor a partir de la relación:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \,,$$

obtenemos:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} .$$

Si sobre esta ecuación se toma la ***divergencia*** se obtiene:

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\nabla^2\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} ,$$

lo que representa la ecuación de propagación de una onda, en términos de un ***escalar***, denominado ***dilatación cúbica*** θ, y cuya ***velocidad característica*** de propagación esta dada por:

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} .$$

4.6.2 Ecuación de Onda S

Análogamente a lo anterior, si aplicamos el ***rotor*** a la ecuación de Navier, se obtiene:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\nabla^2 w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} ,$$

lo que representa la ecuación de propagación de una onda, en términos de un ***vector*** denominado ***vector rotación*** $\vec{w}$, y cuya velocidad característica de propagación esta dada por:

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

4.7 Método de Potenciales: Teorema de Helmholtz

Otra manera de reducir la ecuación de Navier a dos ecuaciones de onda, en que la ***deformación elástica*** queda dividida en dos partes, una que lleva consigo ***cambio de volumen sin distorsión*** y otra ***distorsión con volumen constante***, es utilizando el ***Teorema de Helmholtz***.

Este teorema establece que para un ***campo vectorial*** el vector en un punto se puede expresar en función de un ***potencial escalar*** φ (leído ***"fi"***) y otro ***vectorial*** ψ (leído ***"psi"***), de acuerdo a la relación:

$$u_i = \varphi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j} ,$$

o en notación vectorial:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\vec{\psi} \,.$$

La condición para que ψ_i quede unívocamente definido es que su divergencia sea cero.

Si tomamos la ***divergencia*** en los dos lados de la ecuación de definición del Teorema de Helmholtz obtenemos:

$$u_{i,i} = \theta = \varphi_{,ii} \,.$$

Que nos dice que el ***potencial escalar*** φ está asociado con la ***dilatación cúbica*** θ.

Si tomamos ahora el ***rotor*** de la misma ecuación obtenemos una relación semejante entre el ***potencial vectorial*** ψ_i y la rotación de u_i:

$$e_{ijk} u_{j,k} = 2w_i = \psi_{i,kk} \,.$$

Ahora, si reemplazamos la ecuación de definición del Teorema de Helmholtz, en la ecuación de Navier en notación indicial, obtenemos:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_{,k} + e_{krt}\psi_{t,r}\right) + \mu\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\left(\varphi_{,i} + e_{irt}\psi_{t,r}\right) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varphi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j}\right),$$

agrupando los términos en φ y en ψ_i podemos escribir la ecuación en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (\lambda - 2\mu)\varphi_{,kk}\right] = -e_{ijk}\left[\rho\frac{\partial^2\psi_k}{\partial t^2} - \mu\psi_{k,mm}\right]_{,j} \,.$$

Una solución a esta ecuación la podemos obtener haciendo igual a cero las cantidades dentro de cada corchete. De esta manera obtenemos las ecuaciones:

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \,,$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\nabla^2\psi_i = \frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} \,.$$

Estas son también ecuaciones con la forma de la ecuación del movimiento ondulatorio, pero ahora ***no para las deformaciones elásticas sino para los potenciales***. Las soluciones de estas ecuaciones tienen también la forma y poseen las mismas velocidades características que las correspondientes ecuaciones de Ondas P y S.

4.8 Ondas Elásticas Planas

Para ***una sola dimensión*** podemos escribir la ***ecuación del movimiento ondulatorio*** en la forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} .$$

La ***forma general*** de la solución de esta ecuación es:

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) ,$$

donde cada una de las funciones representa una ***configuración determinada*** que se mueve en una dirección: la función f_1 se mueve en la ***dirección positiva*** del eje x, y la función f_2 se mueve en la ***dirección negativa*** de este eje.

En ambos casos la constante c representa la ***velocidad de propagación*** de la configuración.

Un caso de mucha utilidad en el análisis de las ondas elásticas es el de las ***ondas planas***. En este caso, el supuesto de considerar el ***foco emisor en el infinito*** permite que las ***ondas esféricas*** y las ***ondas cilíndricas "degeneren"*** en ondas planas.

La ecuación de onda plana que viaja en la dirección positiva de la dirección definida por el vector ν_i, se puede escribir en la forma:

$$u_i = A_i e^{ik(\nu_j x_j - ct)} ,$$

donde ν_j son los ***cosenos directores*** de la normal al frente de onda, o sea, la dirección de propagación. Si en esta ecuación se toma solo la parte real y se simplifica para una sola dimensión, se puede escribir:

$$u = A\cos\big(k(x - ct) + \varepsilon\big) ,$$

donde k es el número de onda y ε es ángulo de fase.

4.9 Relaciones Esfuerzo Deformación Temperatura

Consideraremos ahora, como las ***relaciones esfuerzo deformación*** deben modificarse para ***considerar los esfuerzos inducidos por la variación de la temperatura*** de los materiales.

Suponiendo que la ***deformación*** de los sólidos es ***directamente proporcional*** a la ***variación de temperatura*** (mientras que estas variaciones sean pequeñas), se puede utilizar el ***coeficiente de dilatación térmica*** del material α , para establecer la siguiente relación:

$$e_{ij}^{T} = \alpha \, \Delta T \, \delta_{ij}$$

Estas deformaciones ***"extras"***, deben sumarse a las deformaciones ***"existentes"***, antes del ***"calentamiento"***, para obtener las deformaciones totales.

Para seguir cumpliendo con las relaciones de compatibilidad, es necesario ***"descontar"*** de las deformaciones ***"existentes"*** e_{ij}, las deformaciones térmicas ***"extras"*** e_{ij}^{T}, reemplazando en las relaciones constitutivas e_{ij} por $e_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^{T}$, quedando:

$$e_{ij} - \alpha \, \Delta T \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\,\delta_{ij} \ ,$$

o bien:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij}) - \left(\frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha} - \alpha \Delta T \right)\delta_{ij} \ .$$

Expresando esta última relación en términos inversos:

$$\sigma_{ij} = (\lambda\theta - 3K\alpha\Delta T)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \ .$$

5 ELASTICIDAD LINEAL

5.1 Ecuaciones Básicas Cuerpos Isotrópicos Homogéneos

Considerando las ecuaciones de continuidad y equilibrio, y basados en la ley de Hooke generalizada, se ha obtenido para el caso de ***materiales isotrópicos homogéneos*** lo siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \;.$$

Si ahora, consideramos la ***"linealización"*** de algunos términos, como ***pequeños desplazamientos y pequeñas velocidades***, se puede obtener la denominada ecuación de ***Lamé - Navier***:

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\theta_{,i} + f_i + f_i^T = 0 \;.$$

5.2 Ecuaciones de Compatibilidad: *Beltrami - Michell*

Si en las ecuaciones de compatibilidad reemplazamos las relaciones constitutivas en términos de los módulos elásticos, se obtiene:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} - (f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \;.$$

Si ***no existen fuerzas de volumen*** ($f_i = 0$), las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\theta_{,ij} = 0 \;.$$

Si aplicamos el operador $\nabla^2(\,)$ sobre esta ecuación, y dado que $\nabla^2\theta = 0$, se obtiene que $\nabla^4\sigma_{ij} = 0$, es decir, σ_{ij} es una ***función biarmónica***.

Se concluye que, cuando las fuerzas de cuerpo son cero, cada uno de los ***componentes de deformaciones*** y cada uno de los ***componentes de tensiones***, debido a que son combinaciones lineales de las primeras derivadas de los corrimientos, ***son todos funciones biarmónicas***:

$$\nabla^4\sigma_{ij} = 0 \;,$$

$$\nabla^4 e_{ij} = 0 \;.$$

5.3 Condiciones de Contorno

La ***ecuación de Navier***, que combina la ***Ley de Hooke*** con la ***ecuación de movimiento***, puede ser resuelta estableciendo adecuadas condiciones de contorno y precisando sus condiciones iniciales.

Las condiciones de contorno que usualmente se dan, corresponden a dos tipos:

- ***Condiciones de Desplazamiento*** (S_d): Se especifica el campo de desplazamiento $u_i = u_i^o$ sobre el contorno.

- ***Condiciones de Tensiones*** (S_t): Se especifican los componentes de tensiones $\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij}\nu_j$ como funciones conocidas sobre el contorno.

En la mayoría de los problemas de elasticidad, en algunas partes del contorno se especifican ***condiciones de desplazamiento*** y sobre otras partes se especifican ***condiciones de tensiones***.

Adicionalmente, se puede dar el caso de tener que cumplir otras condiciones de contorno, como por ejemplo:

- ***Condiciones Elásticas*** (S_e): Se especifican relaciones entre los ***desplazamientos de los apoyos*** y las ***fuerzas de reacción*** ejercidas $\sigma_{ij}\nu_j = k_{ik}u_k$.

En el caso más general, pueden darse la ***combinación de una o más de estas condiciones de apoyo***:

- ***Condiciones Mixtas*** (S_m): Se especifican combinaciones de las condiciones anteriores debiendo siempre cumplirse que $S_d + S_t + S_e + S_m = S_{cuerpo}$.

6 ELASTICIDAD PLANA

6.1 Introducción

En este capítulo estableceremos la forma que adquieren las relaciones esfuerzo deformación cuando es posible ***"reducir"*** el análisis de ***problemas tridimensionales (3D)*** a ***problemas bidimensionales (2D)***.

Los casos a considerar corresponden a dos tipos principales de problemas:

- **Deformaciones Planas:** Cuando una dimensión geométrica del cuerpo a analizar ***es mucho mayor*** que las otras dos y las ***condiciones no cambian*** a lo largo de la dirección longitudinal.

- **Tensiones Planas:** Cuando una dimensión ***es mucho menor*** que las otras dos y las ***cargas solo se aplican en el plano*** definido por las dos dimensiones mayores.

Se describe cómo, una ***función auxiliar*** denominada ***Función de Tensiones de Airy***, permite plantear y resolver estos problemas de elasticidad plana. Esta metodología, puede ser aplicada, tanto a problemas de deformaciones planas, como a problemas de tensiones planas.

A continuación se describe como una solución a problemas de elasticidad plana puede resolverse mediante la utilización de ***funciones polinómicas*** cuyos valores paramétricos se determinarán a posteriori.

Luego, a modo de ejemplo de utilización de ***coordenadas cartesianas*** en la resolución de problemas de deformaciones planas, se presenta el caso de una ***viga en voladizo sujeta a cargas puntuales y distribuidas***.

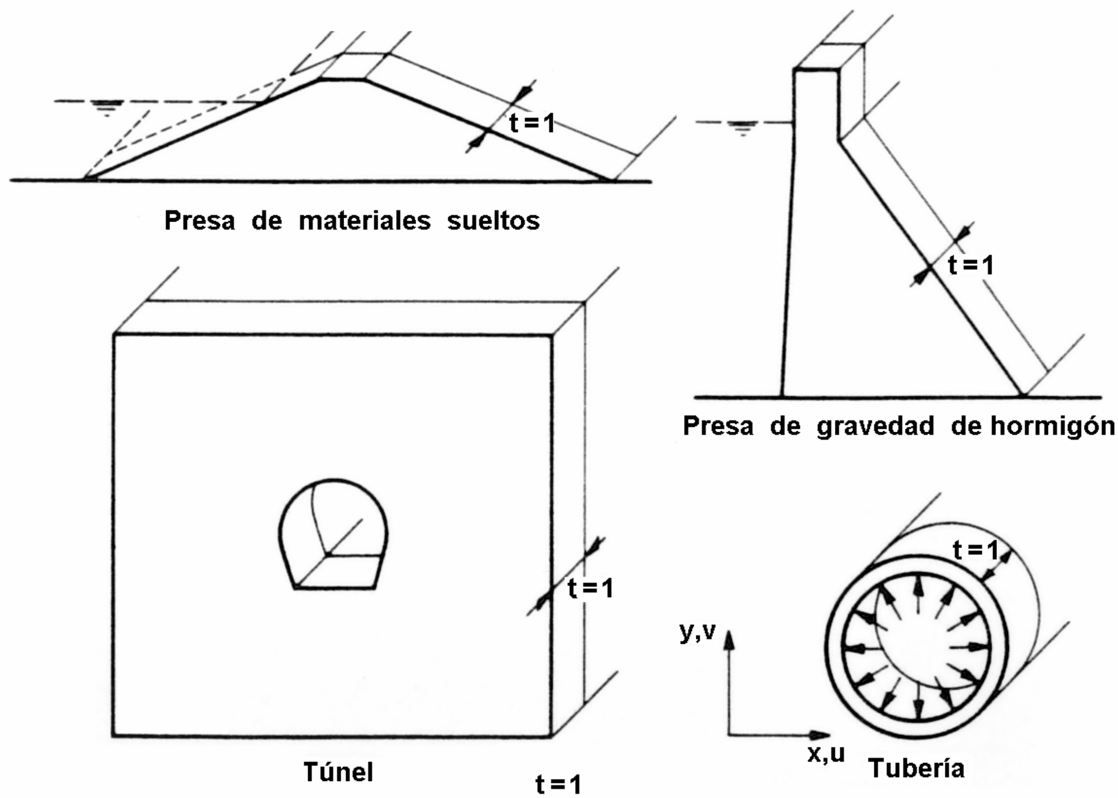
A continuación, para ***extender la aplicación a ciertos problemas planos***, en los que parece ser mas adecuado la utilización de sistemas de referencias ***"curvos"***, es que se plantea la utilización de las ***coordenadas polares***.

Para la adecuada utilización de las coordenadas polares en la resolución de problemas planos, es necesario establecer previamente ciertos conceptos: primero es necesario definir las ***componentes de tensiones*** y las ***ecuaciones de equilibrio*** en estas coordenadas. Luego, establecer la forma que adquieren algunos ***operadores matemáticos*** y la forma que adquiere la ***función de tensiones de Airy*** en este caso. Finalmente, establecer la forma que adquiere la función de Airy y las expresiones para las tensiones, en el caso de la ***existencia de simetría axial***.

Finalmente, a modo de ejemplo de utilización de ***coordenadas polares*** en la resolución de problemas de deformaciones planas, se presenta el caso de una ***barra curva con sección transversal constante***.

6.2 Deformaciones Planas

Esta situación física se da cuando ***una dimensión geométrica del cuerpo a analizar es mucho mayor que las otras dos***, y sobre ella ***actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de toda su longitud*** y contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus distintas secciones transversales.



Ejemplos de problemas de deformación plana

En este caso, suponiendo que la dirección longitudinal corresponde a x_3, ***no existen deformaciones perpendiculares*** a un plano transversal cualquiera del cuerpo, es decir, $e_{33} = 0$. Con esto, para un material isótropo se tiene:

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

además, la traza se transforma en:

$$\sum = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1+\nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Por tanto, las relaciones constitutivas pueden expresarse como:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu}{E}\Sigma,$$

$$e_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{22}),$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} + \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} + \nu^2\sigma_{11}\right) - \frac{1}{E}\left(\nu(1+\nu)\sigma_{22}\right),$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}(1+\nu)(1-\nu)\sigma_{11} - \frac{1}{E}\left(\nu(1+\nu)\sigma_{22}\right).$$

Análogamente:

$$e_{22} = \frac{1}{E}(1+\nu)(1-\nu)\sigma_{22} - \frac{1}{E}\left(\nu(1+\nu)\sigma_{11}\right),$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}.$$

Resumiendo en forma matricial lo anterior:

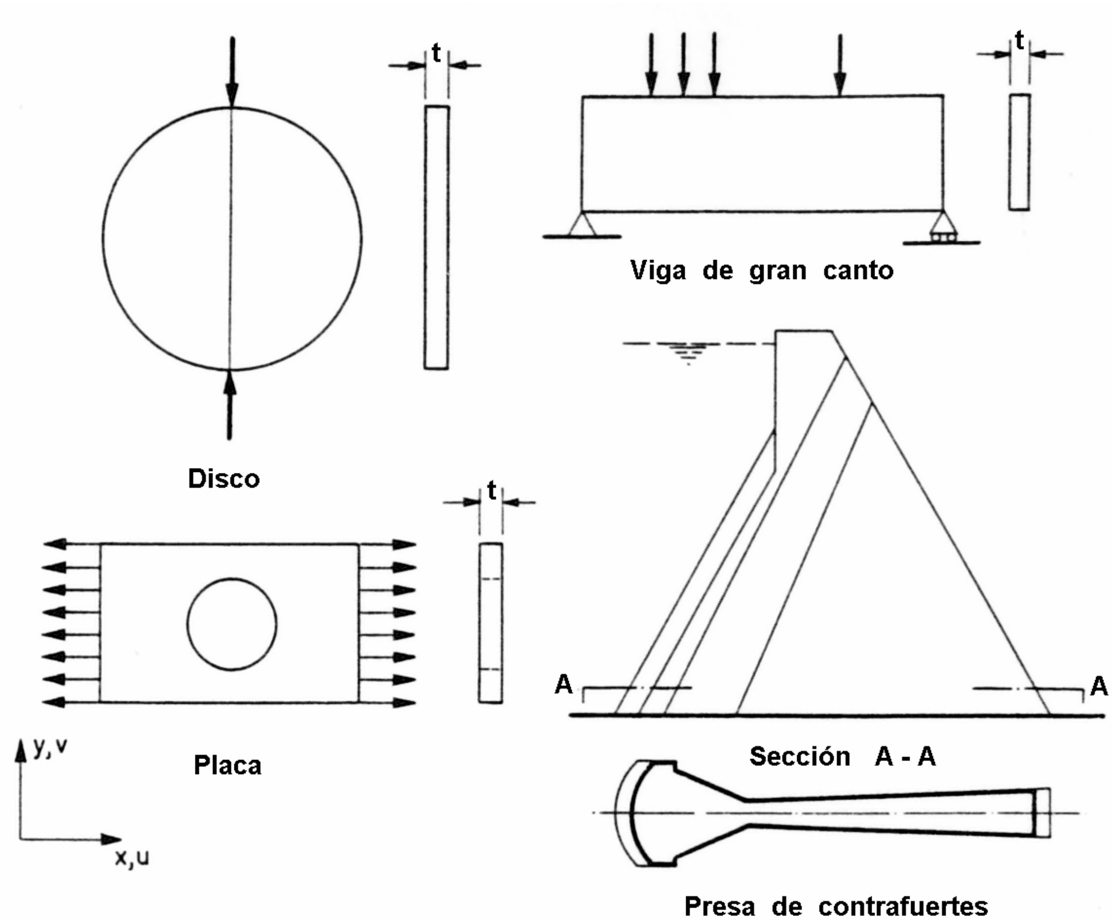
$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Invirtiendo esta relación, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix}.$$

6.3 Tensiones Planas

Esta situación física se da cuando ***una dimensión geométrica del cuerpo es mucho menor que las otras dos***, por ejemplo una placa ***"delgada"***, y las ***cargas solo se aplican en el plano*** definido por las dos dimensiones mayores, no existiendo tensiones en las caras de la placa.



Ejemplos de problemas de tensión plana

En este caso, la no existencia de tensiones en las caras de la placa puede expresarse como $\sigma_{33} = 0$, y las relaciones constitutivas quedan por tanto como:

$$e_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{1}{E}\nu(\sigma_{22}),$$

$$e_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{1}{E}\nu(\sigma_{11}),$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}\,.$$

Resumiendo en forma matricial lo anterior:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Invirtiendo esta relación, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix}.$$

6.4 Solución Mediante la Función de Tensiones de Airy

Las ecuaciones de equilibrio para el ***caso con fuerzas de volumen*** toman la forma:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = -f_1\,,$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = -f_2\,.$$

Estas ecuaciones pueden resolverse determinando la solución para el caso ***homogéneo*** y agregándole una ***solución particular***.

La solución homogénea se puede obtener definiendo una ***función auxiliar***, denominada ***Función de Tensiones de Airy*** $\phi(x_1, x_2)$, de modo que:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22}\,,$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11}\,,$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12}\,.$$

Con esta definición de la Función de Airy, las ***ecuaciones de equilibrio homogéneas se satisfacen idénticamente***.

Además, al considerar la ***ecuación de compatibilidad de deformaciones*** en el plano $x_1 - x_2$, se obtiene que la función $\phi(x_1, x_2)$ debe ser ***biarmónica***, es decir: $\nabla^4\phi = 0$.

La función de tensiones $\phi(x_1, x_2)$ de Airy, se puede aplicar tanto a problemas de deformaciones planas como a los de tensiones planas, resultando en ambos casos que esta función debe ser biarmónica.

Debe notarse sin embargo que, en el ***caso de tensiones planas se utilizó implícitamente una aproximación***: se supuso una relación de compatibilidad solo en el plano y no tridimensional, obteniéndose por tanto, una ***solución solo aproximada***.

La calidad de esta aproximación depende del espesor de la placa considerada, a medida que el espesor ***"tienda"*** a cero, la solución ***"tenderá"*** a ser más exacta.

En el ***caso de deformaciones planas***, las ecuaciones de compatibilidad en función de tensiones para fuerzas externas nulas, permite obtener directamente una solución biarmónica, por lo tanto, la ***solución*** obtenida en este caso es ***exacta***.

6.5 Solución de $\nabla^4\phi = 0$ Mediante Polinomios

Una manera de resolver ciertos problemas de deformaciones o tensiones planas consiste en darse una función ***"genérica"*** que dependa de ***parámetros*** o ***constantes indeterminadas***.

Los valores de estos parámetros se pueden determinar a ***"posteriori"***, luego de establecer las condiciones de tensiones y las condiciones de contorno. Esto se conoce con el nombre de ***problema inverso***, es decir, se supone una solución de cierto tipo, la cual se reemplaza en las ecuaciones constitutivas y de compatibilidad obteniéndose relaciones entre estos parámetros. Estas relaciones, en conjunto con las condiciones de contorno, permiten resolver finalmente el problema.

Las condiciones de tensiones se establecen a partir de ***relaciones entre las derivadas de la función incógnita*** $\phi(x_1, x_2)$, y de las condiciones de contorno específicas del problema.

Un caso bastante general del establecimiento de una función $\phi(x_1, x_2)$, consiste en considerar una ***suma de polinomios de diferentes grados*** como:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_q + \ldots + \phi_n \,,$$

donde cada uno de los ϕ_q puede definirse como:

$$\phi_q = \sum_{i=0}^{i=q} a_{qi}\, x^i y^{q-i} \,.$$

Esto permite obtener polinomios de distintos grados que satisfacen la ecuación biarmónica si es que los parámetros a_{qi} (constantes) se eligen adecuadamente.

Dado que las tensiones se obtienen de las segundas derivadas de la función ϕ, los polinomios ϕ_o y ϕ_1 ***son triviales***. Los polinomios ϕ_2 y ϕ_3 ***satisfacen idénticamente la ecuación biarmónica*** y por tanto, no es necesario imponer condiciones. Para los polinomios ϕ_4 y superiores, ***es necesario imponer condiciones*** adicionales.

Ejemplo: El polinomio ϕ_4 es:

$$\phi_4 = a_{40}y^4 + a_{41}y^3x + a_{42}y^2x^2 + a_{43}x^3y + a_{44}x^4 ,$$

que, reemplazado en la ecuación diferencial da:

$$24a_{44} + 8a_{42} + 24a_{40} = 0 .$$

Despejando el valor de a_{44} como $a_{44} = -(a_{40} + \frac{a_{42}}{3})$ y reemplazándolo en ϕ_4, se obtiene:

$$\phi_4 = a_{40}(y^4 - x^4) + a_{41}y^3x + a_{42}(y^2x^2 - \frac{x^4}{3}) + a_{43}x^3y ,$$

función que satisface idénticamente la ecuación diferencial.

6.6 Ejemplo de coordenadas cartesianas: viga en voladizo con carga puntual transversal en el extremo y carga distribuida en la sección transversal

Se investiga qué problema de ***tensiones planas*** se puede resolver mediante la siguiente ***función de tensiones***, haciéndose ***analogías*** con expresiones conocidas de resistencia de materiales.

Se considera la siguiente función de tensiones:

$$\phi = \frac{3F}{4c}\left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{2}y^2 .$$

Las derivadas parciales correspondientes son:

$$\phi_{,x} = \frac{3F}{4c}\left(y - \frac{y^3}{3c^2} \right) \qquad \phi_{,xx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{yy} = 0$$

$$\phi_{,y} = \frac{3F}{4c}\left(x - \frac{xy^2}{c^2} \right) + Py$$

$$\phi_{,yy} = -\frac{3Fxy}{2c^3} + P \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{xx} = -\frac{3Fxy}{2c^3} + P$$

$$\phi_{,xy} = \frac{3F}{4c}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \phi_{,yx} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\phi_{,xy} = \frac{3F}{4c}\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)$$

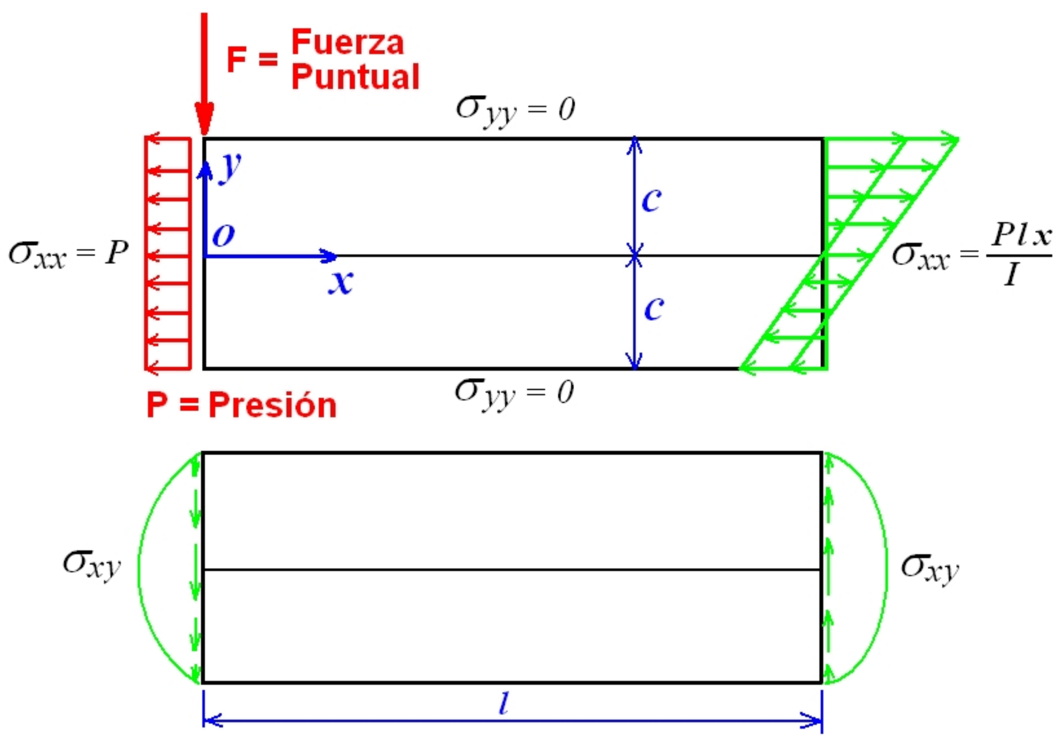
Considerando la expresión para las tensiones σ_{xx} , se puede establecer una analogía con la fórmula de ***Navier***, donde se identifica una viga con ***momento de inercia*** $I = (2/3)c^3$, tal que:

$$\sigma_{xx} = -\frac{Fx}{(2/3)c^3} y + P \ .$$

Considerando la expresión para las tensiones σ_{xy} , se puede establecer una analogía con la fórmula de ***Jouravsky***, donde se identifica una viga de ***semi-altura*** c , tal que:

$$\sigma_{xy} = \frac{F}{2(2/3)c^3}\left(y^2 - c^2\right).$$

Esta situación se representa en la figura a continuación. En ésta, los ***colores rojos*** representan a las ***cargas*** y los ***verdes*** a los ***campos de esfuerzos internos***, tanto en el caso de esfuerzos de ***tracción-compresión***, como de ***corte***. Los colores ***azules*** indican el ***sistema de referencia*** utilizado y la ***geometría*** del problema.



6.7 Coordenadas Polares

Para facilitar la resolución de algunos problemas planos, donde la ***geometría del modelo*** o la ***geometría de las cargas***, posee estructura ***"circular"***, se sugiere la utilización de un sistema más ***"natural"*** de referencia, como las ***coordenadas polares***.

En este caso, debe determinarse las formas particulares que adquieren las ***componentes de tensiones*** y las ***ecuaciones de equilibrio*** en estas coordenadas.

También debe determinarse, cuales son las formas que adquieren algunos ***operadores matemáticos***, como el ***Laplaciano***, y la forma que adquiere la ***función de tensiones de Airy***, en este caso.

6.7.1 Componentes de Tensiones y Ecuaciones de Equilibrio

A partir de un diagrama de equilibrio de un elemento infinitesimal en coordenadas polares, es posible establecer las siguientes ***ecuaciones vectoriales de equilibrio***:

$$(\sigma_r r)_{,r} + \sigma_{\theta,\theta} + rf = 0 .$$

Definiendo las ***componentes de tensiones*** como la ***suma*** de sus ***componentes radiales*** y ***tangenciales*** como:

$$\sigma_r = \sigma_{rr}\hat{t}_r + \sigma_{r\theta}\hat{t}_\theta ,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta r}\hat{t}_r + \sigma_{\theta\theta}\hat{t}_\theta ,$$

y considerando que las ***"derivadas"*** de los ***vectores unitarios*** correspondientes es:

$$\hat{t}_{r,\theta} = \hat{t}_\theta ,$$

$$\hat{t}_{\theta,\theta} = -\hat{t}_r ,$$

se obtienen las siguientes ***ecuaciones escalares*** de equilibrio:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta r,\theta} - \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 ,$$

$$\frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{r\theta,r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 .$$

Además, por ***equilibrio de momentos*** se tiene que: $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$.

6.7.2 Laplaciano en Coordenadas Polares

Considerando la siguiente ***transformación de coordenadas***:

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

realizando las ***derivadas parciales*** correspondientes se tiene:

$$r_{,x} = \frac{x}{r} = \cos(\theta) \qquad \theta_{,x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}$$

$$r_{,y} = \frac{y}{r} = \sin(\theta) \qquad \theta_{,y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r} ,$$

entonces, la ***primera derivada parcial total*** es:

$$(\,)_{,x} = \frac{\partial(\,)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\,)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = (\,)_{,r} r_{,x} + (\,)_{,\theta}\theta_{,x} = (\,)_{,r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}(\,)_{,\theta}\sin(\theta) ,$$

y la ***segunda derivada parcial*** es:

$$(\,)_{,xx} = \left[(\,)_{,r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}(\,)_{,\theta}\sin(\theta)\right]\left[(\,)_{,r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}(\,)_{,\theta}\sin(\theta)\right],$$

$$= \left[(\,)_{,rr}\cos^2(\theta)\right] + \left[\left(-\frac{1}{r}(\,)_{,\theta}\sin(\theta)\right)_{,r}\cos(\theta)\right] + \left[-\frac{1}{r}\left((\,)_{,r}\cos(\theta)\right)_{,\theta}\sin(\theta)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[-\frac{1}{r}\left((\,)_{,r}\cos(\theta)\right)_{,\theta}\sin(\theta)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[-\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r}(\,)_{,\theta}\sin(\theta)\right)_{,\theta}\sin(\theta)\right],$$

$$= \left[(\,)_{,rr}\cos^2(\theta)\right] + \left[\left(\frac{1}{r^2}(\,)_{,\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\right) + \left(-\frac{1}{r}(\,)_{,\theta r}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\left(-\frac{1}{r}(\,)_{,r\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)\right) + \left(\frac{1}{r}(\,)_{,r}\sin^2(\theta)\right)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\left(\frac{1}{r^2} (\;)_{,\theta\theta} \sin(\theta)\sin(\theta) \right) + \left(\frac{1}{r^2} (\;)_{,\theta} \cos(\theta)\sin(\theta) \right) \right],$$

$$(\;)_{xx} = (\;)_{,rr} \cos^2(\theta) - 2(\;)_{,r\theta} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} + (\;)_{,r} \frac{\sin^2(\theta)}{r} + 2(\;)_{,\theta} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} + (\;)_{,\theta\theta} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}.$$

Análogamente:

$$(\;)_{yy} = (\;)_{,rr} \sin^2(\theta) + 2(\;)_{,r\theta} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} + (\;)_{,r} \frac{\cos^2(\theta)}{r} - 2(\;)_{,\theta} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} + (\;)_{,\theta\theta} \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}.$$

Sumando ambas expresiones, finalmente se obtiene el ***Laplaciano en coordenadas polares*** como:

$$\nabla^2 = (\;)_{,xx} + (\;)_{,yy} = (\;)_{,rr} + \frac{1}{r}(\;)_{,r} + \frac{1}{r^2}(\;)_{,\theta\theta} .$$

6.7.3 Función de Tensiones de Airy en Coordenadas Polares

Dado que las expresiones para la tensiones en función de $\phi(x, y)$, ***son también válidas para las coordenadas polares***, podemos establecer, mediante una adecuada transformación, expresiones para $\phi(r, \theta)$.

Si en las expresiones que acabamos de obtener para las segundas derivadas en coordenadas cartesianas hacemos $\theta = 0$, se obtienen las siguientes expresiones para las ***tensiones en función de las coordenadas polares***:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} ,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \phi_{,rr} ,$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta} - \frac{1}{r}\phi_{,r\theta} = -\left(\frac{1}{r}\phi_{,\theta} \right)_{,r} .$$

Estas expresiones ***satisfacen*** adecuadamente las ***ecuaciones de equilibrio*** en coordenadas polares.

Análogamente al caso de coordenadas cartesianas, para resolver un problema será necesario que la función de Airy ***cumpla con las relaciones de compatibilidad***, siendo una función solución de:

$$\nabla^4 \left(\phi(r, \theta) \right) = 0 .$$

6.7.4 Caso Axisimétrico

Para el ***caso axisimétrico***, es decir, cuando exista ***simetría axial***, las funciones no dependerán de θ, dándose que $(\ )_{,\theta} = 0$, con lo cual el ***Laplaciano*** toma la forma:

$$\nabla^2(\ ) = (\ )_{,rr} + \frac{1}{r}(\ )_{,r} = \frac{1}{r}(r\phi_{,r})_{,r} \ .$$

Consecuentemente, la ***ecuación de compatibilidad*** en función de $\phi(r,\theta)$ queda:

$$\nabla^4\phi = \nabla^2\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r}(r\phi_{,r})\right)_{,r}\right)_{,r} = 0 \ ,$$

y las tensiones valen:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\phi_{,r} \ ,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \phi_{,rr} \ ,$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \ .$$

La ecuación para $\nabla^4\phi$ puede ***integrarse dos veces***, multiplicando primero por r, integrando el resultado y luego dividiendo por r e integrando nuevamente, con lo que se obtiene:

$$\frac{1}{r}\left(r\phi_{,r}\right)_{,r} = A\log(r) + B = \nabla^2\phi \ .$$

Esta ecuación puede ***volver a integrarse dos veces***, obteniéndose:

$$\phi = \frac{A}{4}\left(r^2\log(r) - r^2\right) + \frac{Br^2}{4} + C\log(r) + D \ .$$

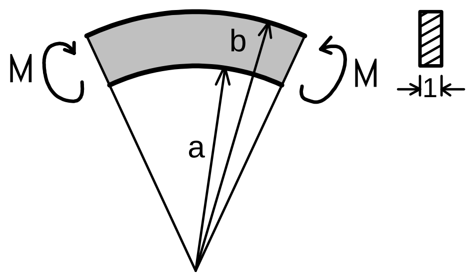
Utilizando las expresiones de ***definición de las tensiones*** en función de ϕ, se obtiene:

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{2}\left(\log(r) - \frac{1}{2}\right) + \frac{B}{2} + \frac{C}{r^2} \ ,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{A}{2}\left(\log(r) + \frac{1}{2}\right) + \frac{B}{2} - \frac{C}{r^2} \ .$$

6.8 Ejemplo en coordenadas polares: barra curva con sección transversal constante

Considere el caso de una ***barra curva con sección transversal constante***. Esta barra está ***solicitada por un momento de flexión* M** en el plano de curvatura, en los bordes de la barra, tal como se muestra en la figura.



Suponiendo una ***función de tensiones de Airy*** de la siguiente forma:

$$\phi \quad = \quad A \cdot \log(r) + B \cdot r^2 \log(r) + C \cdot r^2 + D \quad (1)$$

Las tensiones en este ***caso de simetría axial*** se pueden establecer como:

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B\big(1 + 2\log(r)\big) + 2C \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B\big(1 + 2\log(r)\big) + 2C \quad (3)$$

Se pide:

a) Establecer todas las condiciones de borde del problema en forma analítica y dar una breve explicación en palabras.

b) Determinar el valor de las constantes A, B y C que resuelven el problema y utilizarlas para establecer relaciones para las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$.

Solución:

a) Condiciones de borde:

i) Los ***bordes cóncavos y convexos*** de la barra están ***libres de fuerzas normales:*** $\sigma_{rr} = 0$ en $r = a$ y en $r = b$.

ii) Los ***esfuerzos normales en los bordes*** de la barra deben ser iguales solo al momento M: $\int_a^b \sigma_{\theta\theta} \cdot dr = 0$ y $\int_a^b \sigma_{\theta\theta} r \cdot dr = -M$.

iii) ***No existen fuerzas tangenciales aplicadas*** en las barras: $\sigma_{r\theta} = 0$.

b) Determinación de constantes:

Utilizando las condiciones i) en las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$\frac{A}{a^2} + B\cdot\left(1+2\log(a)\right) + 2C = 0 \qquad \frac{A}{b^2} + B\cdot\left(1+2\log(b)\right) + 2C = 0 \ . \tag{4}$$

De la condición ii) y de la relación entre la función de Airy y las tensiones se obtiene:

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta}\cdot dr = \int_a^b \phi_{,rr}\cdot dr = \phi_{,r}\Big|_a^b = 0 \ ,$$

donde substituyendo la definición de la función ϕ (ecuación (1)), se obtiene:

$$\left[\frac{A}{b} + B\left(b + 2b\log(b)\right) + 2Cb\right] - \left[\frac{A}{a} + B\left(a + 2a\log(a)\right) + 2Ca\right] = 0 \ .$$

Análogamente, se debe cumplir la segunda parte de la condición ii):

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta}\, r\cdot dr = \int_a^b \phi_{,rr}\, r\cdot dr = -M \ , \tag{5}$$

donde, integrando por partes, se obtiene:

$$\int_a^b \phi_{,rr}\, r\cdot dr = \phi_{,r}\, r\Big|_a^b - \int_a^b \phi_{,r}\, dr = \phi_{,r}\, r\Big|_a^b - \phi\Big|_a^b \ ,$$

Notando de (4) que $\phi_{,r}\, r\Big|_a^b = 0$ y considerando (5), se encuentra que $\phi\Big|_a^b = M$, reemplazando en (1), se obtiene:

$$A\log(\frac{b}{a}) + B\left(b^2\log(b) - a^2\log(a)\right) + C\left(b^2 - a^2\right) = M \ . \tag{6}$$

Esta ecuación (6), en conjunto con las ecuaciones (4), determinan completamente los valores de las constantes A, B y C, los que son:

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log(\frac{b}{a})$$

$$B = -\frac{2M}{N}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$C = \frac{M}{N}\left[b^2 - a^2 + 2\left(b^2 \log(b) - a^2 \log(a)\right)\right],$$

donde por simplicidad se utilizó $N = \left(b^2 - a^2\right)^2 - 4a^2b^2\left(\log(\frac{b}{a})\right)^2$.

Finalmente, las expresiones para las tensiones quedan:

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\log(\frac{b}{a}) + b^2\log(\frac{r}{b}) + a^2\log(\frac{a}{r})\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\log(\frac{b}{a}) + b^2\log(\frac{r}{b}) + a^2\log(\frac{a}{r}) + b^2 - a^2\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \, .$$