

Problema: Dados dos vectores u_i, v_j , se define el producto tensorial $(\vec{u} \otimes \vec{v})_{i,j} = u_i v_j$.

- Demostrar que $(\vec{u} \otimes \vec{v})_{i,j}$ es un tensor de orden 2.
- Demostrar que $(\vec{u} \otimes \vec{v})^T = (\vec{v} \otimes \vec{u})$.
- Demostrar que $(\vec{u} \otimes \vec{v}) \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$.
- Considerando que $\hat{k}_i \otimes \hat{k}_j = \delta_{ik} \delta_{jl}$, se tiene $(\hat{k}_i \otimes \hat{k}_j) \vec{v} = v_j \hat{k}_i$. Demostrar entonces que $(t_{ij} \hat{k}_i \otimes \hat{k}_j) \vec{v} = t_{ij} v_j \hat{k}_i$. Así, $T = t_{ij} \hat{k}_i \otimes \hat{k}_j$ es otra forma de definir un tensor.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\vec{u} \times \vec{v})' &= a_{im} a_{jm} (\vec{u} \times \vec{v})_{mn} = a_{im} a_{jm} u_m v_n = a_{im} u_m a_{jn} v_j \\ (\vec{u} \times \vec{v})' &= u'_i \cdot v'_j \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (\vec{u} \times \vec{v})^T &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \\ (\vec{v} \times \vec{u}) &= \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \vec{u} \times \vec{v} &= u_i \cdot v_j \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= u_i v_j w_j \\ (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u} &= v_i w_i u_j = u_i v_j w_j \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \delta_{ik} \delta_{jl} \cdot \vec{v} &= v_j \hat{k}_i \\ (t_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl}) \cdot \vec{v} &= t_{ij} v_j \hat{k}_i \\ & \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \Rightarrow (I \cdot t_{ij}) \vec{v} &= t_{ij} v_j \hat{k}_i \\ \Rightarrow t_{ij} \cdot \vec{v} &= t_{ij} v_j \hat{k}_i \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Problema: Dados el símbolo de permutación ξ_{ijk} y la función delta de Kronecker δ_{ij} , se pide demostrar la identidad $\xi - \delta$:

$$\xi_{ijk} \cdot \xi_{pqk} = \delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jq} .$$

Solución: En general se tiene que:

$$\xi_{ijk} \cdot \xi_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

si $r = k$:

$$\begin{aligned} \xi_{ijk} \cdot \xi_{pqk} &= \delta_{ip} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} - \delta_{iq} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kk} \end{vmatrix} + \delta_{ik} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{ip} (\delta_{jq} \delta_{kk} - \delta_{kq} \delta_{jk}) - \delta_{iq} (\delta_{jp} \delta_{kk} - \delta_{kp} \delta_{jk}) + \delta_{ik} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{kp} \delta_{jq}) \\ &= \delta_{ip} (\delta_{jq} - \delta_{jq}) - \delta_{iq} (\delta_{jp} - \delta_{jp}) + \delta_{ik} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{kp} \delta_{jq}) \\ &= \delta_{ik} \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{ik} \delta_{kp} \delta_{jq} \\ &= \delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jq} \blacksquare \end{aligned}$$

Problema: Demostrar que ξ_{ij}^e es un tensor de orden 2, con:

$$\xi_{ij}^e = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} \cdot u_{k,j}).$$

Solución: Por propiedad de linealidad hay que demostrar que la derivada de un tensor es un tensor, y que el producto de un tensor es un tensor:

a) **P.D.Q.** $u_{i,j}$ es un tensor.

Considerando que x_l y u_i son tensores, se tiene que:

$$x_l = a_{jl} x'_j \Rightarrow \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = a_{jl},$$

y también que:

$$u'_i = a_{ik} u_k \Rightarrow \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} = a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

Por tanto, $u'_{i,j}$ se puede escribir como:

$$u'_{i,j} = \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_j}$$

$$u'_{i,j} = \left(a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) a_{jl} = a_{ik} a_{jl} u_{k,l} \blacksquare$$

b) **P.D.Q.** $u_{k,i} \cdot u_{k,j}$ es un tensor.

Análogamente, se tiene que:

$$u'_{k,i} = a_{ks} a_{il} u_{s,l},$$

y

$$u'_{k,j} = a_{kr} a_{jm} u_{r,m}.$$

Por tanto, $u'_{k,i} \cdot u'_{k,j}$ se puede escribir como:

$$u'_{k,i} \cdot u'_{k,j} = (a_{ks} a_{il} u_{s,l}) (a_{kr} a_{jm} u_{r,m})$$

$$u'_{k,i} \cdot u'_{k,j} = (a_{ks} a_{kr}) a_{il} a_{jm} u_{s,l} u_{r,m}$$

$$u'_{k,i} \cdot u'_{k,j} = (\delta_{sr}) a_{il} a_{jm} u_{s,l} u_{r,m}$$

$$u'_{k,i} \cdot u'_{k,j} = a_{il} a_{jm} (\delta_{sr} u_{s,l}) u_{r,m}$$

$$u'_{k,i} \cdot u'_{k,j} = a_{il} a_{jm} u_{r,l} u_{r,m} \blacksquare$$

Problema: Dado el siguiente tensor en coordenadas cartesianas ortogonales:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 6.5 & -2.0 & 1.5 \\ -2.0 & 8.1 & -1.0 \\ 1.5 & -1.0 & 7.5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Determinar sus Invariantes Principales.
- Establecer su Ecuación Característica.
- A partir de la ecuación anterior, obtener sus Valores Principales.
- Establecer las Direcciones Principales.
- Comprobar, usando la ley de transformación de coordenadas, que al hacer una rotación de manera que los nuevos ejes coincidan con las direcciones principales, el tensor toma su forma canónica. HINT: utilice como matriz de transformación de coordenadas, la matriz que contiene en sus filas, los vectores direcciones principales previamente normalizados.

Solución:

$$a) \quad I_1 = t_{ii} = 6.5 + 8.1 + 7.54 = 22.1$$

$$I_2 = (t_{22} \cdot t_{33} - t_{23}^2) + (t_{11} \cdot t_{33} - t_{13}^2) + (t_{11} \cdot t_{22} - t_{12}^2) \\ = (8.1 \cdot 7.5 - 1.0 \cdot 1.0) + (6.5 \cdot 7.5 - 1.5 \cdot 1.5) + (6.5 \cdot 8.1 - 2.0 \cdot 2.0) = 59.75 + 46.50 + 48.65 = 154.90$$

$$I_3 = \|t_{ij}\| = 6.5(8.1 \cdot 7.5 - 1.0 \cdot 1.0) - (-2.0)(-2.0 \cdot 7.5 + 1.0 \cdot 1.5) + 1.5(2.0 \cdot 1.0 - 8.1 \cdot 1.5) \\ = 388.375 - 27.000 - 15.225 = 346.150$$

$$b) \quad -t^3 + I_1 \cdot t^2 - I_2 \cdot t + I_3 = 0$$

$$-1 \cdot t^3 + 22.1 \cdot t^2 - 154.90 \cdot t + 346.150 = 0$$

$$c) \quad \Rightarrow (t_1 \quad t_2 \quad t_3) = (10.4331 \quad 6.7560 \quad 4.9109)$$

- Las direcciones principales se establecen resolviendo el sistema: $(t_{ij} - t_i \delta_{ij}) \cdot n_{ji} = 0$ para cada uno de los valores propios t_i (ver ejercicio resuelto en este mismo apunte). En este caso se obtiene, para las direcciones principales expresados como vectores columnas lo siguiente:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} -0.7932 & 1.0000 & 0.0037 \\ 1.0000 & 0.5069 & 0.7495 \\ -0.7466 & -0.3836 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

- e) En general, la ley de transformación de coordenadas de un tensor puede escribirse en términos matriciales como:

$$[t'] = [A] \cdot [t] \cdot [A]^T.$$

En este caso de estudio, estamos interesados en que los nuevos ejes coincidan con las direcciones principales. Para hacer esto, la matriz $[A]$ debe estar confeccionada a partir de las **direcciones principales como los vectores filas de la matriz transformación**, estando estos previamente normalizados, tal como se señala a continuación:

$$[t'] = \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.6763 & -0.5049 \\ 0.8440 & 0.4278 & -0.3237 \\ 0.0030 & 0.5997 & 0.8002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.5 & -2.0 & 1.5 \\ -2.0 & 8.1 & -1.0 \\ 1.5 & -1.0 & 7.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.8440 & 0.0030 \\ 0.6763 & 0.4278 & 0.5997 \\ -0.5049 & -0.3237 & 0.8002 \end{bmatrix}$$

$$[t'] = \begin{bmatrix} -5.5966 & 4.1449 & 0.0204 \\ 7.0557 & 2.1009 & 4.0514 \\ -5.2677 & -1.5896 & 5.4063 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5364 & 0.8440 & 0.0030 \\ 0.6763 & 0.4278 & 0.5997 \\ -0.5049 & -0.3237 & 0.8002 \end{bmatrix}$$

$$[t'] = \begin{bmatrix} 10.4334 & 0.0001 & -0.0006 \\ 0.0001 & 4.9115 & 0.0004 \\ -0.0006 & 0.0004 & 6.7558 \end{bmatrix}.$$

A partir de este resultado, salvo errores de redondeo debido a haber trabajado con 4 cifras decimales, se aprecia que se obtiene la **forma canónica del tensor**, donde **en la diagonal principal se encuentran los valores principales o propios**, y los **elementos fuera de la diagonal son nulos**. ■

NOTA: Algunas calculadoras tienen implementados algoritmos que permiten realizar en forma rápida los cálculos realizados en este ejercicio. Por ejemplo, las calculadoras Hewlett Packard 48GX poseen las siguientes subrutinas:

- Para hallar las raíces de la ecuación característica puede utilizarse el **“solucionador”** de raíces de un polinomio:

SOLVE POLY COEFFICIENTS $[A_N \dots A_1 A_0]$

En nuestro caso: $[-1 \quad 22.1 \quad -154.9 \quad 346.15] \Rightarrow [4.9109 \quad 6.7560 \quad 10.4331]$

- Para hallar los valores y vectores propios de una matriz cuadrada:

MATH MATR NXT EGV, devuelve en el nivel 2 una matriz de $n \times n$ vectores propios y al nivel 1 un vector de n elementos de valores propios. Las **columnas de la matriz** del nivel 2 **representan los vectores propios** correspondientes a los valores propios del nivel 1.

Problema: En un punto dado de un continuo las componentes del tensor de esfuerzo son:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Encuentre:

- Invariantes Principales.
- Ecuación Característica.
- De la ecuación anterior, obtener las Tensiones Principales.
- Direcciones Principales.
- Esfuerzo Máximo de Cizalle.
- Tensor Esférico.
- Tensor Desviatorio.

Solución:

$$a) \quad I_1 = \sigma_{ii} = 1/4 + 2 + 3/4 = 3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) \\ = (3/2 - 2) + (3/16 - 3/16) + (1/2 - 6) = -6$$

$$I_3 = |\sigma_{ij}| = \frac{1}{4}(3/2 - 2) + \sqrt{6}(-3\sqrt{6}/4 - \sqrt{6}/4) + \frac{-\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3} - \sqrt{3}/2) = -1/8 - 6 - 15/8 = -8$$

$$b) \quad -\sigma^3 + I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma + I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sigma^3 + 3 \cdot \sigma^2 + 6 \cdot \sigma - 8 = 0$$

$$c) \quad -\sigma^3 + 3 \cdot \sigma^2 + 6 \cdot \sigma - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) = (4 \quad 1 \quad -2)$$

$$d) \quad \text{Direcciones del esfuerzo principal } \sigma_1 = 4: (\sigma_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) \cdot n_{ji} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -15/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} \cdot n_{11} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \\ -\sqrt{3}/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{2} \cdot n_{21} & -13/4 \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolviendo el subsistema } \begin{vmatrix} -15/4 \cdot n_{11} & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} \cdot n_{11} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } n_{11} = 1 \text{ tenemos:}$$

$$\begin{vmatrix} -15/4 & -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -\sqrt{6} & -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{6} \cdot n_{21} & -\sqrt{3}/4 \cdot n_{31} \\ -2 \cdot n_{21} & -\sqrt{2} \cdot n_{31} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad n^T_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{n}^T_{i1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, para $\sigma_2 = 1$ y $\sigma_3 = -2$:

$$\hat{n}^T_{i2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}^T_{i3} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}.$$

NOTA: Una forma de comprobar que sus cálculos están correctos, es realizar el producto cruz entre dos cualesquiera de estos vectores y verificar que se obtiene el tercero (eventualmente este podría resultar con un cambio de signo).

e) Los esfuerzos máximos de cizalle se obtienen de:

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} |1 - (-2)| = \frac{3}{2}$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| = \frac{1}{2} |-2 - 1| = \frac{3}{2}$$

$$\tau_{23} = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| = \frac{1}{2} |1 - (-2)| = \frac{3}{2}$$

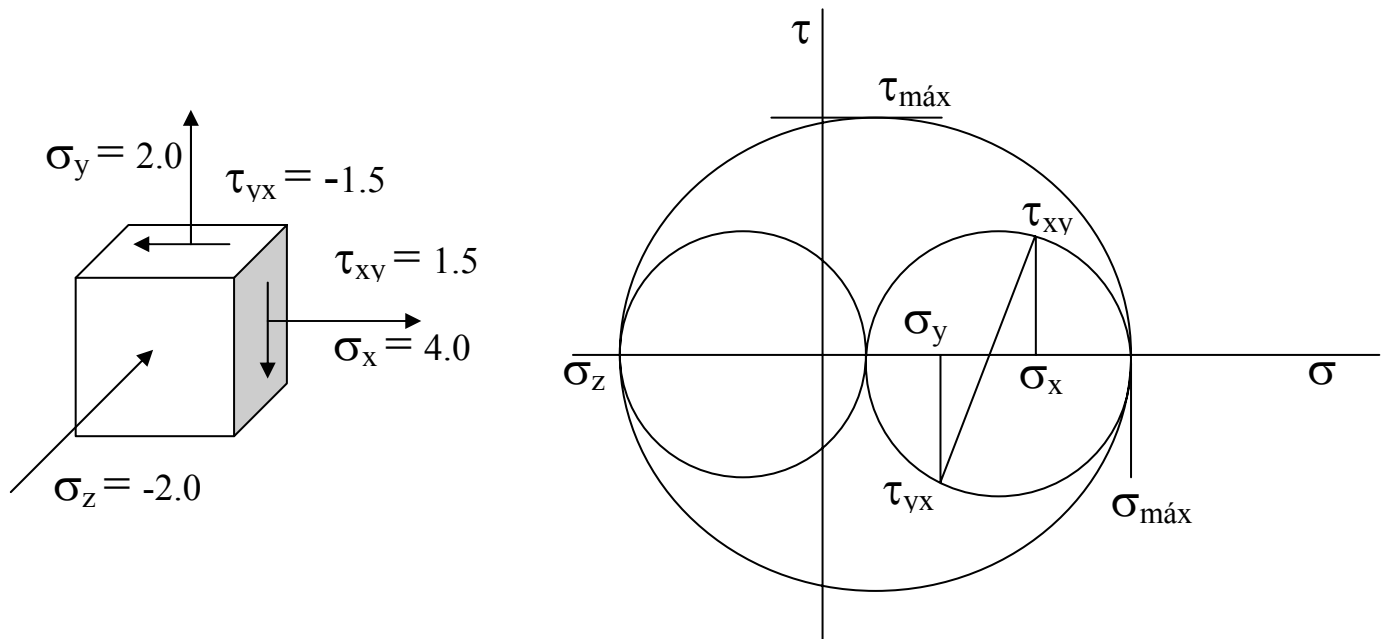
f) Cualquier tensor de 2^{do} orden se puede descomponer en función de un **tensor desviatorio** y un **tensor de esfuerzo esférico**. El tensor de esfuerzo esférico es:

$$\frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) El tensor desviatorio por lo tanto es:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} = \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & 3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{2} & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Problema: Dado el siguiente estado de tensiones en un punto de un sólido, se pide:



- Determinar gráficamente utilizando el círculo de Mohr en 3D la tensión máxima y el esfuerzo de corte máximo del estado tensional señalado.
- Determinar analíticamente estos mismos valores.

Solución:

- Se grafica primero el círculo de Mohr asociado al plano XY. Este círculo debe pasar por el punto (σ_x, τ_{xy}) , con centro ubicado en $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$. Luego se grafica el círculo asociado al plano YZ, pasando por $(\sigma_z, 0)$ y tangente al círculo anterior. Por último, se grafica el círculo asociado al plano XZ en volviendo los dos círculos anteriores. Gráficamente se determinan los valores de la tensión máxima y del esfuerzo de corte máximo.

$$\text{b) } \operatorname{tg}(2\theta) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 1.5}{4 - 2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2\theta = -56.3^\circ \Rightarrow \theta = -28.15^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos(56.3^\circ) + 1.5 \sin(56.3^\circ) \\ &= 3.0 + 0.555 + 1.248 = 4.803 \end{aligned}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_z}{2} = \frac{4.803 - (-2)}{2} = 3.401 \blacksquare$$

Problema: Obtenga las direcciones para las cuales los elementos de la diagonal principal de un tensor toman valores extremos.

Solución:

La componente de la diagonal principal del tensor para una nueva dirección coordenada esta dada por:

$$t'_{kk} = x_i x_j t_{ij}$$

donde el vector unitario x_i corresponde a los términos de la matriz de rotación del nuevo eje k. La norma de este vector unitario puede escribirse como:

$$x_i x_i = \delta_{ij} x_i x_j = 1.$$

Los valores de x_i para los que t'_{kk} es máximo o mínimo, sujeto a la condición $\delta_{ij} x_i x_j = 1$, se puede establecer utilizando los **Multiplificadores de Lagrange**:

$$F(x_i, \lambda) = x_i x_j t_{ij} - \lambda (\delta_{ij} x_i x_j - 1).$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = x_j t_{ij} - \lambda \delta_{ij} x_j = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \delta_{ij} x_i x_j - 1 = 0,$$

Queda:

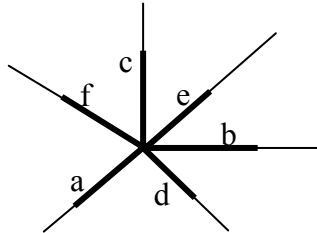
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad (t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0.$$

Por lo tanto, los valores extremos de la diagonal principal ocurren en las direcciones principales.

Problema: En un punto P de un sólido elástico se colocan 6 estampillas extensométricas en las direcciones indicadas (una en cada eje mas una a 45° en cada plano coordenado). Una vez sometido el cuerpo a un estado tensional, se registran las siguientes medidas:

$$\varepsilon_a = 0.002 \quad \varepsilon_b = 0.0025 \quad \varepsilon_c = 0.0 \quad \varepsilon_d = 0.003 \quad \varepsilon_e = 0.001 \quad \varepsilon_f = 0.0015$$

Se pide calcular el tensor de deformación de Cauchy en el punto P referido al sistema



coordenado.

Solución: Las estampillas extensométricas miden el alargamiento longitudinal unitario en la dirección en que están situadas ($\varepsilon_{\vec{u}}$). La expresión general de $\varepsilon_{\vec{u}}$, en función de los parámetros que definen la dirección dada por \vec{u} será:

$$\varepsilon_{\vec{u}} = \vec{u}^T \varepsilon_{ij} \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{\vec{u}} = \alpha^2 \varepsilon_{xx} + \beta^2 \varepsilon_{yy} + \gamma^2 \varepsilon_{zz} + 2\alpha\beta \varepsilon_{xy} + 2\beta\gamma \varepsilon_{yz} + 2\alpha\gamma \varepsilon_{xz}.$$

Aplicando esta ecuación a cada una de las estampillas:

$$\hat{\vec{u}}_a = [1 \ 0 \ 0] \Rightarrow \alpha^2 \varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \Rightarrow \varepsilon_{xx} = 0.002$$

$$\hat{\vec{u}}_b = [0 \ 1 \ 0] \Rightarrow \beta^2 \varepsilon_{yy} = \varepsilon_b \Rightarrow \varepsilon_{yy} = 0.0025$$

$$\hat{\vec{u}}_c = [0 \ 0 \ 1] \Rightarrow \gamma^2 \varepsilon_{zz} = \varepsilon_c \Rightarrow \varepsilon_{zz} = 0.0$$

$$\hat{\vec{u}}_d = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} \ 0] \Rightarrow \alpha^2 \varepsilon_{xx} + \beta^2 \varepsilon_{yy} + 2\alpha\beta \varepsilon_{xy} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = 0.00075$$

$$\hat{\vec{u}}_e = [0 \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}] \Rightarrow \beta^2 \varepsilon_{yy} + \gamma^2 \varepsilon_{zz} + 2\beta\gamma \varepsilon_{yz} \Rightarrow \varepsilon_{yz} = -0.00025$$

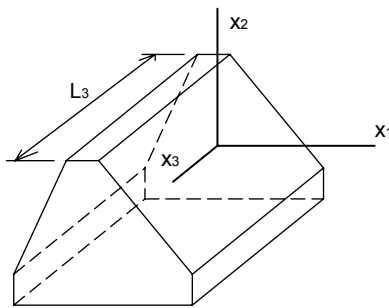
$$\hat{\vec{u}}_f = [1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}] \Rightarrow \alpha^2 \varepsilon_{xx} + \gamma^2 \varepsilon_{zz} + 2\alpha\gamma \varepsilon_{xz} \Rightarrow \varepsilon_{xz} = 0.0005$$

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.00075 & 0.0005 \\ 0.00075 & 0.0025 & -0.00025 \\ 0.0005 & -0.00025 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

Problema: Considere el caso de una estructura prismática con una dimensión geométrica (longitud), mucho mayor que las otras dos, y que sobre ella actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de toda su longitud, contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus distintas secciones transversales (**Ejemplos:** muros de contención, presas de gravedad, tuberías bajo presión, túneles, etc).

Establezca la forma que adquieren las relaciones constitutivas en este caso (caso de deformaciones planas).

Solución: Suponiendo el eje 3 orientado en la dirección de la longitud mayor ($L_3 \gg L_1, L_2$):



$$e_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$e_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \Sigma$$

$$e_{11} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} + \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{11}) - \frac{1}{E}(\nu(1 + \nu)\sigma_{22})$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}(1 + \nu)(1 - \nu)\sigma_{11} - \frac{1}{E}(\nu(1 + \nu)\sigma_{22}).$$

Análogamente:

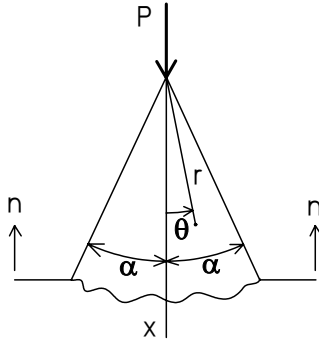
$$e_{22} = \frac{1}{E}(1 + \nu)(1 - \nu)\sigma_{22} - \frac{1}{E}\nu(1 + \nu)\sigma_{11}$$

$$e_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}.$$

Problema: Para el caso de una cuña plana de semi-ángulo α , solicitada por una carga de compresión P según el eje de simetría, considerando la función de tensiones de Airy dada, determinar el valor de la constante K y las tensiones en el plano definido por mn :



$$\phi(r, \theta) = \frac{K}{2} r \theta \sin \theta$$

$$\phi_{,r} = \frac{K}{2} \theta \sin \theta \quad \phi_{,rr} = 0$$

$$\phi_{,\theta} = \frac{K r}{2} \sin \theta + \frac{K r}{2} \theta \cos \theta$$

$$\phi_{,\theta\theta} = \frac{K r}{2} \cos \theta + \frac{K r}{2} \cos \theta - \frac{K r}{2} \theta \sin \theta$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\phi_{,r}}{r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} = \frac{K \theta \sin \theta}{2r} + \frac{1}{r^2} (Kr \cos \theta - \frac{Kr \theta}{2} \sin \theta)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{K \theta \sin \theta}{2r} + \frac{K \cos \theta}{r} - \frac{K \theta \sin \theta}{2r} = \frac{K \cos \theta}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \phi_{,rr} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{Kr \sin \theta}{2} + \frac{Kr \theta \cos \theta}{2} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{K \sin \theta}{2} + \frac{K \theta \cos \theta}{2} \right) = 0$$

Determinación de la constante K :

$$-P = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{rr} \cos \theta (r \cdot d\theta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{K \cos \theta}{r} \right) \cos \theta r d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} K \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} K \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

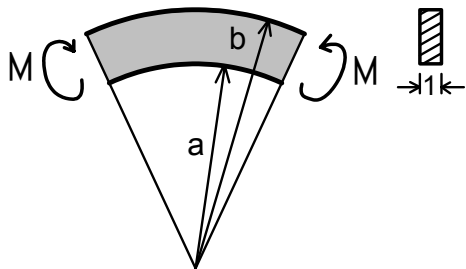
$$-P = K \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = K \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \left(\frac{-\alpha}{2} + \frac{\sin(-2\alpha)}{4} \right) \right] = K \left[\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]$$

$$\therefore K = \frac{-1}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} P$$

Expresiones para las tensiones:

$$\sigma_{rr} = \frac{-P}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Problema: Considere el caso de una barra curva con sección transversal constante. Esta barra está solicitada por un momento de flexión M en el plano de curvatura, en los bordes de la barra, tal como se muestra en la figura.



Suponiendo una función de tensiones de Airy de la siguiente forma:

$$\phi = A \cdot \log(r) + B \cdot r^2 \log(r) + C \cdot r^2 + D \quad (1)$$

Las tensiones en este caso de simetría axial se pueden establecer como:

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log(r)) + 2C \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log(r)) + 2C \quad (3)$$

Se pide:

- Establecer todas las condiciones de borde del problema en forma analítica y dar una breve explicación en palabras.
- Determinar el valor de las constantes A , B y C que resuelven el problema y utilizarlas para establecer relaciones para las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$.

Solución:

a) Condiciones de borde:

- Los bordes cóncavos y convexos de la barra están libres de fuerzas normales:
 $\sigma_{rr} = 0$ en $r = a$ y en $r = b$.

- Los esfuerzos normales en los bordes de la barra deben ser iguales solo al momento M :
$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} \cdot dr = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r \cdot dr = -M$$

- No existen fuerzas tangenciales aplicadas en las barras: $\sigma_{r\theta} = 0$.

b) Determinación de constantes:

Utilizando las condiciones i) en las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$\frac{A}{a^2} + B \cdot (1 + 2\log(a)) + 2C = 0 \quad \frac{A}{b^2} + B \cdot (1 + 2\log(b)) + 2C = 0 \quad (4)$$

De la condición ii) y de la relación entre la función de Airy y las tensiones se obtiene

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} \cdot dr = \int_a^b \phi_{,rr} \cdot dr = \phi_{,r} \Big|_a^b = 0,$$

donde substituyendo la definición de la función ϕ (ecuación (1)), se obtiene:

$$\left[\frac{A}{b} + B(b + 2b \log(b)) + 2Cb \right] - \left[\frac{A}{a} + B(a + 2a \log(a)) + 2Ca \right] = 0.$$

Análogamente, se debe cumplir la segunda parte de la condición ii):

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} r \cdot dr = \int_a^b \phi_{,rr} r \cdot dr = -M \quad (5)$$

donde, integrando por partes, se obtiene:

$$\int_a^b \phi_{,rr} r \cdot dr = \phi_{,r} r \Big|_a^b - \int_a^b \phi_{,r} dr = \phi_{,r} r \Big|_a^b - \phi \Big|_a^b,$$

notando de (4) que $\phi_{,r} r \Big|_a^b = 0$ y considerando (5), se encuentra que $\phi \Big|_a^b = M$, reemplazando en (1), se obtiene:

$$A \log\left(\frac{b}{a}\right) + B(b^2 \log(b) - a^2 \log(a)) + C(b^2 - a^2) = M. \quad (6)$$

Esta ecuación (6), en conjunto con las ecuaciones (4), determinan completamente los valores de las constantes A, B y C, los que son:

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log(b) - a^2 \log(a))]$$

donde por simplicidad se utilizó $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2$.

Finalmente, las expresiones para las tensiones quedan:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \log\left(\frac{a}{r}\right) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \log\left(\frac{a}{r}\right) + b^2 - a^2 \right) \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

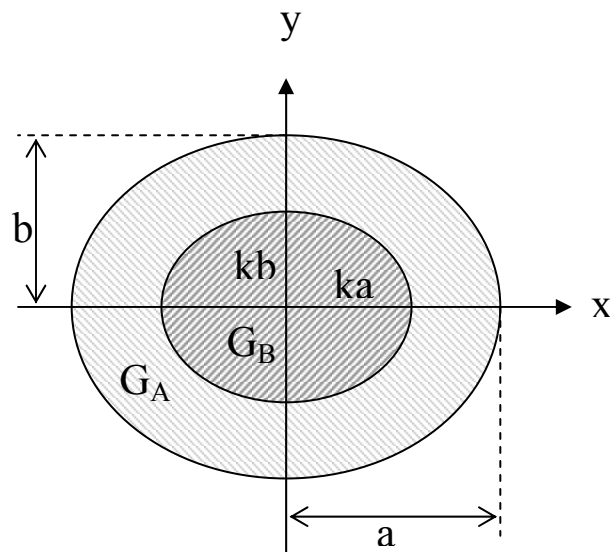
Problema: Resolver mediante la **Función de Prandtl** el problema de **Torsión de Saint Venant** para una sección de forma elíptica (ver figura).

Demostrar que la función de alabeo es un **Paraboloide Hiperbólico**.

Considere en primer término el caso de una elipse hueca (Sólido A) determinando las tensiones y la función de alabeo.

Luego **“llene”** el hueco con un material (Sólido B) de módulo G_B ($G_B \neq G_A$) y vuelva a calcular.

Finalmente determine la relación entre el momento **“interior”** y el momento **“exterior”**, y la relación entre el momento **“interior”** y el momento **“total”**. Analice algunos casos límites.



Función de Prandtl:

$$\phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow m = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$J = 2 \iint_A \phi dA = 2 \left[-\frac{a^2}{a^2 b^2} \left(\frac{1}{a^2} \cdot I_Y + \frac{1}{b^2} \cdot I_X - A_{\text{Ellipse}} \right) \right] = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$M_t = G \psi J \Rightarrow G \psi = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} M_t$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{31} = G\psi\phi_{,2} \\ \sigma_{32} = -G\psi\phi_{,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\sigma}_3 = \frac{2M_t}{\pi ab} \left(\frac{-y}{b^2} \hat{i} + \frac{x}{a^2} \hat{j} \right)$$

Función de Alabeo de Saint Venant :

$$\sigma_{31} = G(u_{3,1} - \psi x_2) \Leftrightarrow G\psi\phi_{,2} = G(u_{3,1} - \psi x_2) \Rightarrow u_{3,1} = \psi(\phi_{,2} + x_2)$$

$$\sigma_{32} = G(u_{3,2} - \psi x_1) \Leftrightarrow -G\psi\phi_{,1} = G(u_{3,2} - \psi x_1) \Rightarrow u_{3,2} = -\psi(\phi_{,1} + x_1)$$

$$u_{3,1} = \psi \left(\frac{-2a^2 x_2}{a^2 + b^2} + x_2 \right) \Rightarrow u_3 = \psi x_2 \left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) x_1 + f(x_2) \quad (1)$$

$$u_{3,2} = -\psi \left(\frac{-2b^2 x_1}{a^2 + b^2} + x_1 \right) \Rightarrow u_3 = -\psi x_1 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) x_2 + g(x_1) \quad (2)$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \psi x_2 \left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) x_1 + f(x_2) = -\psi x_1 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) x_2 + g(x_1)$$

$$\psi x_1 x_2 \left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} + 1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) = g(x_1) - f(x_2)$$

$$g(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_i \Rightarrow \therefore g(x_1) = f(x_2) = 0$$

$$\therefore u_3(x_1, x_2) = -\psi x_1 x_2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right). \quad (\text{Paraboloide Hiperbólico})$$

Elipse “**llena**”:

$$J_{llena} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Elipse “**interior**”:

$$J_B = \frac{\pi (ka)^3 (kb)^3}{(ka)^2 + (kb)^2} = \frac{\pi k^6 a^3 b^3}{k^2(a^2 + b^2)} = \frac{\pi k^4 a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Elipse “**exterior**”:

$$J_A = J_{llena} - J_B = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - k^4)$$

Relación entre momentos:

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{G_B \psi J_B}{G_A \psi J_A} = \frac{G_B}{G_A} \frac{k^4}{(1 - k^4)}$$

Relación entre momento “**interior**” y momento “**total**”:

$$\frac{M_B}{M_A + M_B} = \frac{G_B k^4}{G_A (1 - k^4) + G_B k^4}$$

$$M_B = k^4 \frac{1}{\frac{G_A}{G_B} (1 - k^4) + k^4} M \quad \text{con } (M = M_A + M_B)$$

Casos límites:

$$k \rightarrow 1 \Rightarrow M_B \rightarrow M$$

$$k \rightarrow 0 \Rightarrow M_B \rightarrow 0$$

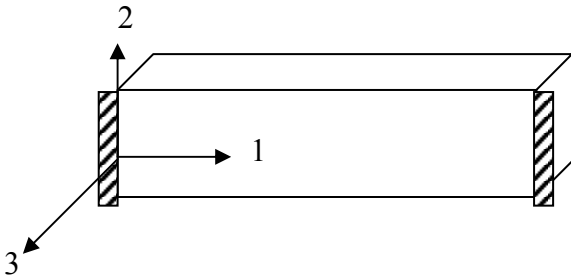
$$G_B \gg G_A \Rightarrow M_B \rightarrow M$$

$$G_B = G_A \Rightarrow M_B \rightarrow k^4 M$$

Ejemplo:

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow M_B = \frac{1}{2^4} M = \frac{1}{16} M$$

Problema: Supongamos un cuerpo sometido a una dilatación térmica uniforme $\Delta T = cte$. Si se permite la expansión térmica libre en las direcciones 2 y 3 (es decir, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$), mientras que en la dirección 1 la expansión esta totalmente restringida, expresar σ_{11} en términos de los módulos elásticos y el coeficiente de dilatación térmica. Evaluar numéricamente este término, como también el alargamiento del cuerpo en las direcciones transversales (i.e., ξ_{22} y ξ_{33}).



$$\alpha = 1.25 \cdot 10^{-5} \quad [1/^{\circ}C]$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \quad [kg/cm^2]$$

$$\Delta T = 30 \quad [^{\circ}C]$$

$$\nu = 0.3$$

Solución:

$$\xi_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\xi_{11} = 0 \quad y \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{11} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T = -2 \cdot 10^6 \cdot 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = -750 \quad [kg/cm^2]$$

Análogamente:

$$\xi_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) + \alpha \cdot \Delta T = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha \cdot \Delta T = (1 + \nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\xi_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) + \alpha \cdot \Delta T = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha \cdot \Delta T = (1 + \nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\nu = 0.3 \quad \Rightarrow \quad \xi_{22} = \xi_{33} = (1 + 0.3) \cdot 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 4.88 \cdot 10^{-4}$$

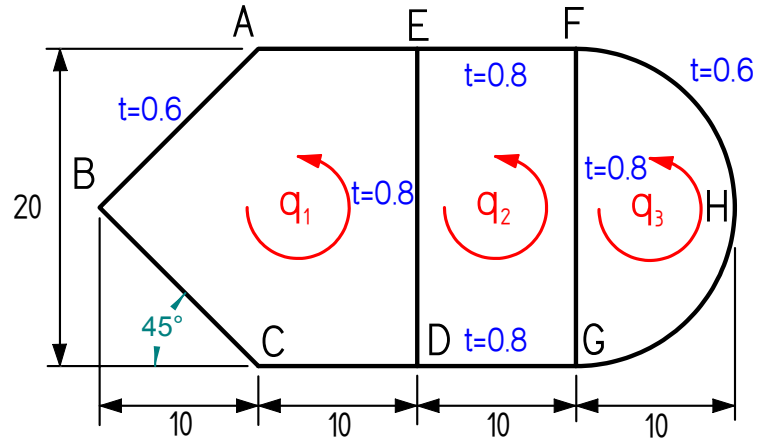
Torsión de tubos multicelulares: analogía de la membrana

Problema: Considere la sección de la figura. Se pide determinar la tensión de corte en una barra de esa sección sometida a un momento torsor $M = 7$ [tonf m] y el valor de la constante torsional.

Solución: Considerando una analogía con las leyes de Kirchhoff se tiene:

$$\sum_n \left(q_n \cdot \frac{1}{G\chi} \oint_C \frac{ds}{t_n} \right) = 2\Omega_c$$

donde los q_n son los flujos de corte a determinar en cada una de las células.



Célula EABCD:

$$q_1 \frac{1}{G\chi} \oint_{EABCD} \frac{ds}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{1}{G\chi} \oint_{DE} \frac{ds}{0.8} = 2 \left(\frac{20 \cdot 10}{2} + 20 \cdot 10 \right)$$

$$1.4142q_1 - q_2 = 18 \cdot G\chi \quad (1)$$

Célula EDGF:

$$(q_2 - q_1) \frac{1}{G\chi} \oint_{ED} \frac{ds}{0.8} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{DG} \frac{ds}{0.8} + (q_2 - q_3) \frac{1}{G\chi} \oint_{GF} \frac{ds}{0.8} + q_2 \frac{1}{G\chi} \oint_{FE} \frac{ds}{0.8} = 2(20 \cdot 10)$$

$$-q_1 + 3q_2 - q_3 = 16 \cdot G\chi \quad (2)$$

Célula FGHF:

$$(q_3 - q_2) \frac{1}{G\chi} \oint_{FG} \frac{ds}{0.8} + q_3 \frac{1}{G\chi} \oint_{GHF} \frac{ds}{0.6} = 2 \left(\frac{\pi \cdot 10^2}{2} \right)$$

$$-q_2 + 3.0944q_3 = 12.566 \cdot G\chi \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$(1), (2) \text{ y } (3) \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 24.499 \cdot G\chi \\ q_2 = 16.6465 \cdot G\chi \\ q_3 = 9.4404 \cdot G\chi \end{cases}$$

Constante torsional (2 veces el volumen encerrado bajo la función ϕ):

$$J = 2 \sum \Omega_i \phi_i = \frac{2}{G\chi} \sum \Omega_i q_i$$

$$J = \frac{2}{G\chi} \left[\left(\frac{20 \cdot 10}{2} + 20 \cdot 10 \right) \cdot 24.499 G\chi + 20 \cdot 10 \cdot 16.6465 G\chi + \left(\frac{\pi \cdot 10^2}{2} \right) \cdot 9.4404 G\chi \right] = 24324.8 \text{ [cm}^4\text{]}.$$

Dado el momento torsional aplicado se obtiene:

$$G\chi = \frac{M}{J} = \frac{700.000}{24324.8} = 28.78 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right].$$

Por lo tanto los flujos de corte valen:

$$q_1 = 24.449 \cdot 28.78 = 703.60 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right]$$

$$q_2 = 16.6465 \cdot 28.78 = 479.06 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right]$$

$$q_3 = 9.4404 \cdot 28.78 = 271.68 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right].$$

Por lo tanto las tensiones valen: (definición de flujo de corte: $q = \tau \cdot h \Rightarrow \tau = \frac{q}{h}$)

$$\text{Rama EABCD: } \tau = \frac{q_1}{t_1} = \frac{703.60}{0.6} = 1172.67 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$\text{Rama DE: } \tau = \frac{q_1 - q_2}{t_2} = \frac{703.60 - 479.06}{0.8} = 280.68 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

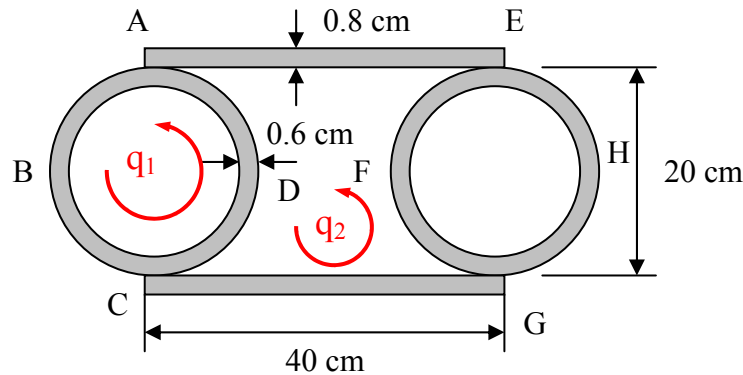
$$\text{Rama DG y FE: } \tau = \frac{q_2}{t_2} = \frac{479.06}{0.8} = 598.82 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$\text{Rama GF: } \tau = \frac{q_2 - q_3}{t_2} = \frac{479.06 - 271.68}{0.8} = 259.22 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$\text{Rama GHF: } \tau = \frac{q_3}{t_3} = \frac{271.68}{0.6} = 452.80 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right].$$

Problema: Resolver el problema de torsión del tubo multicelular de la figura mediante analogía con un circuito de corriente continua equivalente. Dado un momento torsor $M = 12[\text{ton} \cdot \text{m}]$, determine las tensiones en cada una de las ramas:

Rama ABCDA:



$$q_1 \frac{1}{G\psi} \oint_{ABC} \frac{ds}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{1}{G\psi} \oint_{CDA} \frac{ds}{0.6} = 2\pi(10)^2$$

$$q_1 \frac{10\pi}{0.6} + (q_1 - q_2) \frac{10\pi}{0.6} = 2\pi(10)^2 \cdot G\psi$$

$$2q_1 - q_2 = 12 \cdot G\psi \quad (1)$$

Rama ADCGFEA:

$$(q_2 - q_1) \frac{1}{G\psi} \oint_{ADC} \frac{ds}{0.6} + q_2 \frac{1}{G\psi} \oint_{CG} \frac{ds}{0.8} + (q_2 - q_1) \frac{1}{G\psi} \oint_{GFE} \frac{ds}{0.6} + q_2 \frac{1}{G\psi} \oint_{EA} \frac{ds}{0.8} = 2(40 \cdot 20 - \pi(10)^2)$$

$$(q_2 - q_1) \frac{10\pi}{0.6} + q_2 \frac{40}{0.8} + (q_2 - q_1) \frac{10\pi}{0.6} + q_2 \frac{40}{0.8} = 2(40 \cdot 20 - \pi(10)^2) \cdot G\psi$$

$$-2q_1 + 3.9099q_2 = 18.5577 \cdot G\psi \quad (2)$$

$$(1) \quad y \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 10.5015 \cdot G\psi \\ q_2 = 11.2507 \cdot G\psi \end{cases}$$

Constante torsional (2 veces el volumen encerrado bajo la función ϕ):

$$J = 2 \sum \Omega_i \phi_i = \frac{2}{G\psi} \sum \Omega_i q_i$$

$$J = \frac{2}{G\psi} [2\pi(10)^2 \cdot 11.2507 \cdot G\psi + (40 \cdot 20 - \pi(10)^2) \cdot 10.5051 \cdot G\psi] = 24.342 [cm^4]$$

Dado el momento torsional aplicado se obtiene:

$$G\psi = \frac{M}{J} = \frac{1.200.000}{24.342} = 49.30 \left[\frac{kg}{cm^3} \right]$$

Por lo tanto los flujos de corte valen:

$$q_1 = 11.2507 \cdot 49.30 = 554.63 \left[\frac{kg}{cm} \right]$$

$$q_2 = 10.5015 \cdot 49.30 = 517.69 \left[\frac{kg}{cm} \right]$$

Por lo tanto las tensiones valen (definición de flujo de corte $q = \tau \cdot h \Rightarrow \tau = \frac{q}{h}$):

$$\text{Rama ABC y GHE: } \tau = \frac{q_1}{h_1} = \frac{554.63}{0.6} = 924.38 \left[\frac{kg}{cm^2} \right]$$

$$\text{Rama CG y EA: } \tau = \frac{q_2}{h_2} = \frac{517.67}{0.8} = 647.16 \left[\frac{kg}{cm^2} \right]$$

$$\text{Rama ADC y GFE: } \tau = \frac{q_1 - q_2}{h_1} = \frac{554.63 - 517.67}{0.6} = 61.56 \left[\frac{kg}{cm^2} \right]$$

Método de Ritz o Método Variacional Directo

Problema: Viga en voladizo. Use el Método de Ritz para determinar la elástica de la figura. Emplee un polinomio de dos términos que sea compatible con las condiciones de borde. Suponga propiedades constantes de la viga (de constantes “E” e “I”) y un apoyo elástico (de constante “k”) y solo deformaciones por flexión.

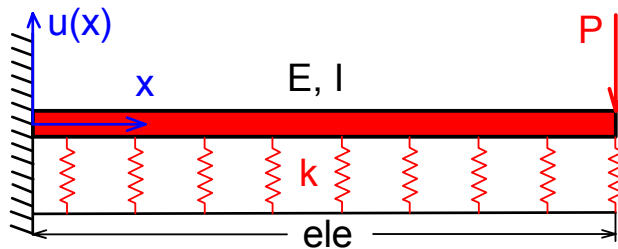
Solución: Sea $u(x) = a_1x^2 - a_2x^3$, las condiciones de borde del problema son: $u(0) = 0$ y $u'(0) = 0$:

$$u(0) = 0 \quad \text{O.K.}$$

$$u'(x) = 2a_1x + 3a_2x^2$$

$$u'(0) = 0 \quad \text{O.K.}$$

$$u''(x) = 2a_1 + 6a_2x$$



La energía de deformación esta dada en este caso por:

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l u''^2(x) dx + \frac{k}{2} \int_0^l u^2(x) dx - P \cdot u(l)$$

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_1 + 6a_2x)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l (a_1x^2 + a_2x^3)^2 dx - P \cdot (a_1l^2 + a_2l^3)$$

$$\pi = \frac{EI}{2} (4a_1^2l + 12a_1a_2l^2 + 12a_2^2l^3) + \frac{k}{2} \left(\frac{a_1^2}{5} l^5 + \frac{a_1a_2}{3} l^6 + \frac{a_2^2}{4} l^7 \right) - P(a_1l^2 + a_2l^3).$$

En la situación de equilibrio $\delta\pi = 0$:

$$\frac{\partial\pi}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{2} (8a_1l + 12a_2l^2) + \frac{k}{2} \left(\frac{2}{5} a_1l^5 + \frac{1}{3} a_2l^6 \right) - Pl^2 = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{2} (12a_1l^2 + 24a_2l^3) + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{3} a_1l^6 + \frac{2}{7} a_2l^7 \right) - Pl^3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1A + a_2B = Pl \\ a_1C + a_2D = Pl \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{A} \left(Pl - Pl \left(\frac{A-C}{AD-BC} \right) \right) \\ a_2 = Pl \left(\frac{A-C}{AD-BC} \right) \end{array} \right. \quad \therefore u(x) = a_1x^2 + a_2x^3.$$

Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios

Problema: Enrejado. Considere un enrejado plano isostático como el de la figura, sometido a las cargas que se indican (P y $2P$ en el nodo A).

Utilice el Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios para evaluar el desplazamiento horizontal del nodo B y el desplazamiento relativo AD.

Solución:

A partir del enunciado general del Principio de Trabajos Virtuales Complementarios, que establece que:

$$\iiint_V \delta \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = \iiint_V \delta f_i \cdot u_i dV + \iint_S \delta p_i \cdot u dS,$$

y considerando que en este caso, las únicas fuerzas que “trabajan” corresponden a los esfuerzos internos en las barras, este principio puede reformularse como:

$$\iiint_V \delta \sigma_{ij}^1 \cdot \varepsilon_{ij} dV = 1 \cdot \Delta \Rightarrow \sum_{\text{Barras}} \delta \sigma_{ij}^1 \cdot \varepsilon_{ij} dV = 1 \cdot \Delta$$

En esta formulación, las fuerzas virtuales unitarias, inducirán estados tensionales en las barras, los que denominaremos σ_{ij}^1 , correspondientes al “Estado 1” (denotado por el supraíndice 1 en las ecuaciones).

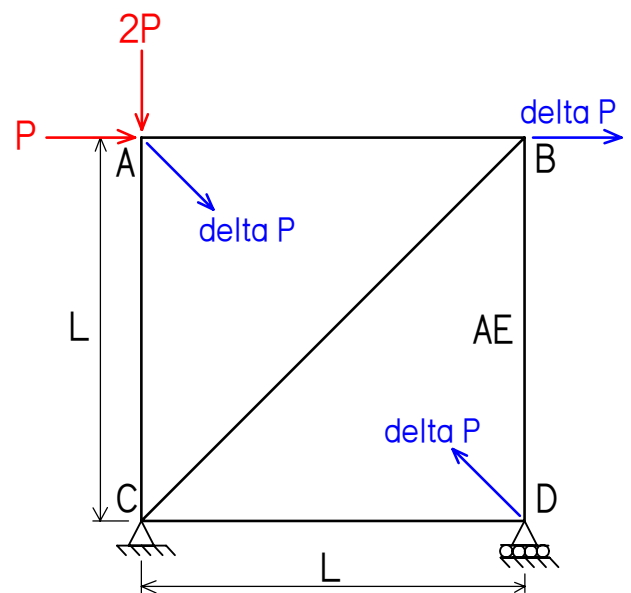
El desplazamiento total en la dirección de análisis, quedará determinado por la sumatoria del producto de los esfuerzos virtuales de las barras (inducidos solo por el estado de carga virtual, “Estado 1”) con las deformaciones de las barras (inducidas solo por el estado de cargas original).

Reemplazando en la última ecuación, las expresiones para las tensiones y las deformaciones en las barras, se obtiene:

$$\sum_{\text{Barras}} \left(\frac{T_i^1}{A_i} \right) \left(\frac{T_i}{A_i E_i} \right) A_i L_i = \sum_{\text{Barras}} \frac{T_i^1 T_i L_i}{A_i E_i} = \Delta$$

En particular, para determinar el desplazamiento horizontal del nodo B, se deberá considerar una fuerza ficticia unitaria $\delta P = 1$ actuando sobre el nodo B, en esa dirección (dirección de deformación compatible con las ligazones del sistema).

Análogamente, en el caso del desplazamiento relativo AD, se deberá considerar una fuerza ficticia unitaria $\delta P = 1$ actuando sobre la diagonal AD, tal como muestra la figura.



Una forma rápida de realizar los cálculos, consiste en confeccionar la siguiente tabla, donde se resumen las características geométricas del enrejado, las propiedades mecánicas de los elementos y las tensiones inducidas en los elementos, ya sean “reales”, debidas al sistema de cargas o “virtuales”, debidas a la fuerza ficticia supuesta.

Desplazamiento horizontal nudo B:

Movimiento relativo diagonal AD:

Barra	L_i	T_i	T_i^1	$T_i T_i^1 L_i$	E_i	A_i	T_i^1	$T_i T_i^1 L_i$
AB	L	P	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
AC	L	2P	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-2PL/\sqrt{2}$
BD	L	P	-1	$-PL$	E	A	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
CD	L	0	0	0	E	A	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}PL$	E	A	1	$2PL$
$\sum T_i T_i^1 L_i = -3.828 PL$					$\sum T_i T_i^1 L_i = -4.828 PL$			

En cada caso, los desplazamientos finales se obtienen sumando los trabajos internos realizados por las barras, para cada una de las combinaciones de carga.

Finalmente se obtiene:

$$D_{Horizontal \ B} = -3.828 \frac{PL}{EA},$$

$$D_{Diagonal \ AD} = -4.828 \frac{PL}{EA}.$$

Observaciones:

- Se debe tener cuidado de considerar las propiedades específicas de cada barra en la sumatoria (en este caso en particular las constantes E y A eran las mismas para todas las barras).
- El signo final del desplazamiento (en estos dos casos negativos), indica que el desplazamiento tiene sentido contrario a la dirección en que se supuso la fuerza unitaria ficticia (ver figura).