CI 41A HIDRAULICA

Prof. Yarko Niño - Semestre Otoño 2004

Régimen Impermanente en tuberías
Método Inelástico

`Solución numérica del ejemplo usando` *`Mathematica`*

■ Cierre de válvula

En clase se demostró que la variación temporal de la velocidad, u(t), y la sobrepresión, Ha(t), en la tubería asociada al cierre de una válvula está gobernada por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d(u / u_0)}{d(t / T)} + A \left(\frac{(u / u_0)^2}{\square^2} \square 1 \right) = 0$$

$$\frac{d(H_a / H_0)}{d(t / T)} + \frac{2}{\square} \left(\frac{d\square}{d(t / T)} \left(1 + \frac{H_a}{H_0} \right) + A \frac{H_a}{H_0} \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \right) = 0$$

donde,

$$A = \frac{g\, H_0\, T}{u_0\, L}$$

La ley de cierre de la válvula está dada por la función □(t), la cual en el caso de un cierre lineal está dada por:

$$\square = 1 \square (1 \square \square_f) \frac{t}{T}$$

donde □f representa el valor final de □ y T el tiempo total de la operación de cierre.

Las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales anteriores están dadas por:

$$t = 0 \quad ; \quad u(0) = u_0 \quad ; \quad H_a(0) = 0$$

A continuación se presentan un par de progamas escritos en el lenguaje *Mathematica,* los cuales permiten resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales no-lineales de primer orden indicadas previamente.

□ Solución para u(t):

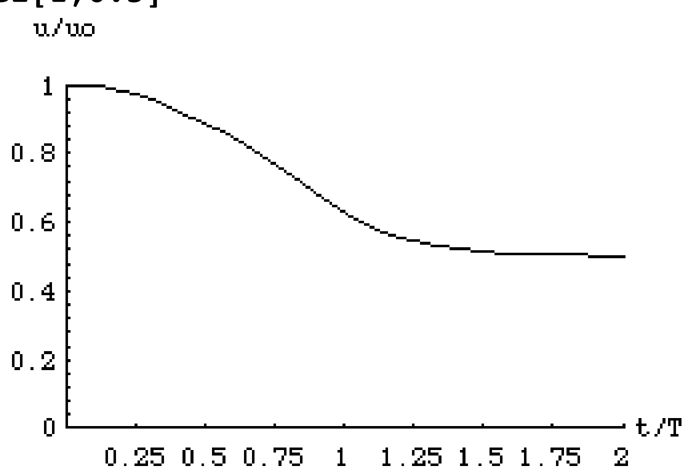
La solución numérica de la ecuación correspondiente se obtiene con la siguiente rutina:

```
vel[aa_,nnf_] := Module[{nn,u},
nn[tt_] := 1 - (1-nnf) tt /; tt <= 1;
nn[tt_] := nnf /; tt > 1 ;
sol = NDSolve[{
u'[t] + aa ( u[t]^2 / nn[t]^2 - 1 ) == 0,
u[0] == 1 },
u, {t,0,2}];
fig = Plot[Evaluate[u[t] /. sol], {t,0,2},
PlotRange -> {{0,2},{0,1}}, AxesLabel ->
{"t/T","u/uo"}]
]
```

donde aa representa el parámetro A, y nnf representa el parámetro □f .

Considerando un valor de A = 1, y un cierre de la válvula al 50% (□f = 0.5) se obtiene la siguiente solución para u(t):

```
vel[1,0.5]
```

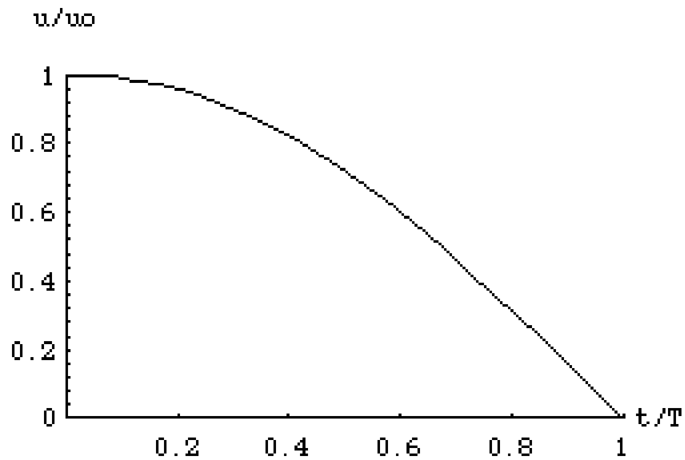



```
-Graphics-
```

Claramente se observa que la velocidad decrece hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio. Es fácil demostrar que la velocidad final es: uf = □f u0 .

Considerando un valor de A = 1, y un cierre total de la válvula (□f = 0) se obtiene la siguiente solución para u(t):

```
vel[1,0.]
```




```
-Graphics-
```

Claramente la solución indica que la velocidad en la tubería disminuye desde la velocidad inicial hasta el valor final u = 0. Este último valor se obtiene justo cuando t = T.

□ **Solución para Ha(t):**

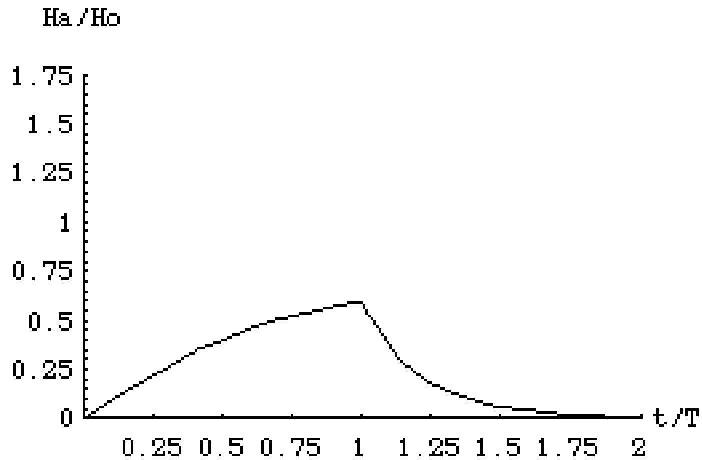
La solución numérica de la ecuación correspondiente se obtiene con la siguiente rutina:

```
pres[aa_,nnf_] := Module[{nn,u},
nn[tt_] := 1 - (1-nnf) tt /; tt <= 1;
nn[tt_] := nnf /; tt > 1 ;
dnn[tt_] := - (1-nnf) /; tt <= 1;
dnn[tt_] := 0 /; tt > 1;
sol = NDSolve[{
H'[t] + 2/nn[t] ( dnn[t] (1+H[t]) + aa H[t]*
                                Sqrt[1+H[t]]) == 0,
H[0] == 0 },
H, {t,0,2}];
fig1 = Plot[Evaluate[H[t] /. sol], {t,0,2},
PlotRange -> {{0,2},{0,1.75}}, AxesLabel ->
{"t/T","Ha/Ho"}]
]
```

donde nuevamente aa representa el parámetro A, y nnf representa el parámetro □f .

Considerando un valor de A = 1, y un cierre de la válvula al 50% (□f = 0.5) se obtiene la siguiente solución para Ha(t), asociada a la solución obtenida previamente para u(t):

pres[1,0.5]

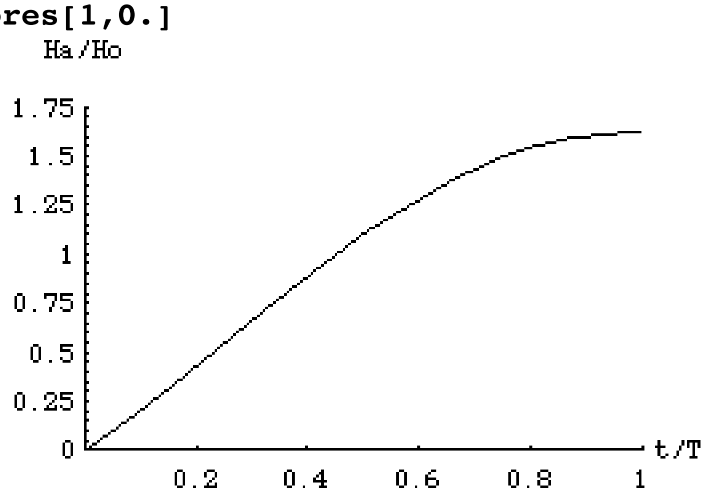


-Graphics-

Se puede apreciar que la sobrepresión aumenta desde el valor inicial Ha = 0, hasta alcanzar un máximo cuando t = T, el cual está dado por la ecuación para $Ha_{máx}$ determinada en clase. Para valores mayores de t, la sobrepresión decrece hasta hacerse nuevamente nula cuando se alcanza el nuevo régimen de equilibrio final, en el que la velocidad vuelve a ser constante.

Considerando un valor de A = 1, y un cierre total de la válvula (□f = 0) se obtiene la siguiente solución para Ha(t), asociada a la solución obtenida previamente para u(t):

pres[1,0.]



-Graphics-

La solución indica que la sobrepresión en la tubería aumenta desde el valor inicial Ha = 0, hasta un valor final que se obtiene cuando la válvula se encuentra completamente cerrada. Este valor corresponde a $Ha_{máx}$ el cual puede determinarse de la ecuación deducida en clase. Es importante notar que una vez que la válvula está totalmente cerrada, la sobrepresión en dicho punto induce un gradiente de presiones que es en sentido contrario al inicial, es decir, la presión en la válvula es mayor que en el estanque de aguas arriba, lo cual induciría un reflujo (velocidad en la dirección del estanque). Esta última solución, si bien es físicamente factible y de hecho ocurre en la realidad, no es admisible desde el punto de vista de la ecuación de continuidad dentro del marco del método inelástico, donde el fluido se considera incompresible y la tubería indeformable. Un modelo más cercano a la realidad que libera estas dos últimas restricciones es el método elástico.