EJEMPLO DE APLICACION METODO INELASTICO
Régimen Transitorio en un Sistema Estanque–Tubería

CI41A HIDRAULICA   Prof. Y. Niño
Sem. Otoño 2002

PROBLEMA:

Consideremos el flujo impermanente de un fluido ideal en una tubería que desagua un estanque de nivel constante, donde el régimen transitorio es causado por la operación de una válvula ubicada en el extremo de aguas abajo. La situación es la mostrada en la Fig. 1.

SOLUCION:

Apliquemos la ecuación para el régimen impermanente en tuberías deducida a partir de la ecuación de Euler:

$$\frac{\Delta s}{g}\frac{du}{dt} + B_2 - B_1 = 0 \tag{1}$$

donde B_1 y B_2 representan el Bernoulli en las secciones 1 y 2, es decir aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, Δs denota la distancia entre las secciones 1 y 2 y u denota la velocidad media instantánea a lo largo de la tubería.

Aplicando la Ec.(1) entre las secciones (0) y (1) de la Fig.1, donde se supone que puede despreciarse el efecto impermanente si el estanque es suficientemente grande como para mantener su nivel constante a pesar de la operación de la válvula, se tiene:

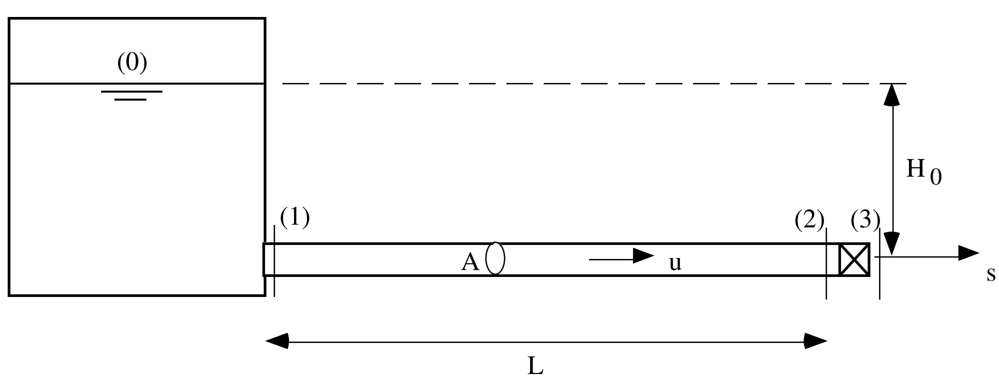

Figura 1: Esquema del sistema estanque–tubería.

$$B_0 = B_1 = H_0$$

Aplicando la misma ecuación ahora entre las secciones (1) y (2) de la Fig.1, se tiene:

$$\frac{L}{g}\frac{du}{dt} + B_2 - B_1 = 0$$

donde L denota la longitud del tramo entre (1) y (2). Por lo tanto, es posible escribir:

$$\frac{L}{g}\frac{du}{dt} + B_2 - H_0 = 0$$

Para las secciones (2) y (3) antes y después de la válvula, puede también despreciarse el efecto impermanente, principalmente por la corta distancia entre dichas secciones. Podemos plantear entonces:

$$B_2 \approx B_3$$

Considerando el esquema de la Fig. 2, suponiendo que la sección (3) está abierta a la atmósfera, se tiene:

$$B_3 = \frac{u_3^2}{2g}$$

donde u_3 representa la velocidad en la sección de máxima contraccion aguas abajo de la válvula. Por continuidad, es posible expresar la velocidad u_3 en función de la velocidad media en la tubería u, de modo que:

$$Q = A\,u = C_c\,A_v\,u_3$$

donde Q denota el caudal, C_c denota el coeficiente de contracción del flujo aguas abajo de la válvula, A denota el area de la tubería y A_v denota el area abierta de la válvula. A_v varía en el tiempo y ello es lo que genera el flujo impermanente en el sistema. Con esta consideración se obtiene:

$$u_3 = \frac{A}{C_c\,A_v}\,u$$

y:

$$B_2 = (\frac{A}{C_c\,A_v})^2\,\frac{u^2}{2g}$$

Por lo tanto:

$$\frac{L}{g}\frac{du}{dt} + (\frac{A}{C_c\,A_v})^2\,\frac{u^2}{2g} - H_0 = 0 \tag{2}$$

Es importante notar que la función $A_v(t)$ representa el área de abertura de la válvula en el tiempo t. Esta función define la *ley de operación de la válvula.*

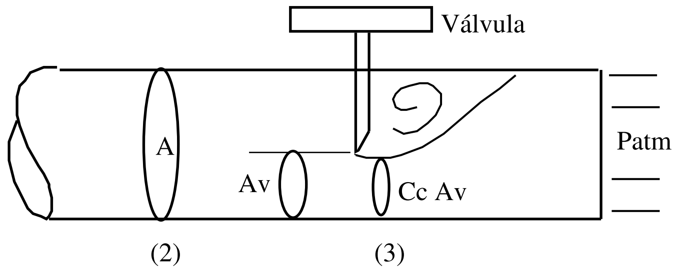

Figura 2: Esquema de flujo en la válvula.

Suponiendo que inicialmente la válvula tiene una abertura A_{v0}, constante en el tiempo, y por lo tanto el régimen de escurrimiento es permanente ($du/dt = 0$), entonces puede considerarse: $u = u_0$, y de la Ec.(2):

$$(\frac{A}{C_c\, A_{v0}})^2\, \frac{u_0^2}{2g} - H_0 = 0$$

de donde se obtiene la velocidad del flujo en el régimen permanente inicial:

$$u_0 = (\frac{C_c\, A_{v0}}{A})^2\, \sqrt{2gH_0}$$

y ésta representa la condición inicial del problema de flujo impermanente que se genera cuando se comienza a operar la válvula. Es decir, u_0 corresponde al valor de u en $t = 0$.

Consideremos ahora la ley de operación de la válvula:

$$\eta(t) = \frac{A_v(t)}{A_{v0}}$$

Por ejemplo, si el cierre es lineal, de modo que η varía linealmente entre 1 (válvula abierta) y η_f (válvula parcialmente cerrada) en un tiempo total de cierre T (Fig.3), entonces, la ley de operación es simplemente:

$$\eta(t) = 1 - (1 - \eta_f)\, \frac{t}{T}$$

Un caso especial es el de cierre total, para el que: $\eta_f = 0$.

Es conveniente expresar la Ec.(2) en términos adimensionales, multiplicándola por $(Tg)/(u_0L)$:

$$\frac{d(u/u_0)}{d(t/T)} + (\frac{A}{C_c\, A_v})^2\, \frac{Tg}{u_0L}\, \frac{u^2}{2g} - \frac{H_0Tg}{u_0L} = 0$$

Reemplazando las expresiones para u_0 y η obtenidas previamente se llega a:

$$\frac{d(u/u_0)}{d(t/T)} + \frac{H_0Tg}{u_0L}\, \left[\frac{(u/u_0)^2}{\eta^2} - 1\right] = 0 \qquad (3)$$

ecuación que debe resolverse para determinar la variación de la velocidad adimensional u/u_0 en función del tiempo adimensional t/T, para una ley de operación de la válvula $\eta(t)$ impuesta externamente.

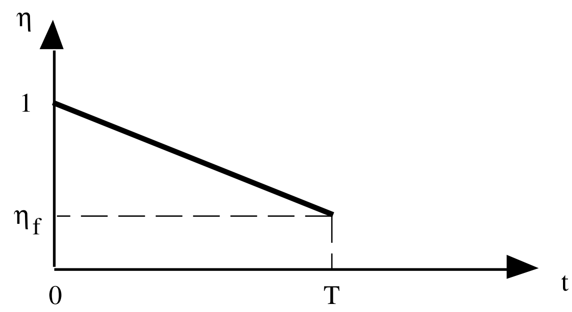

Figura 3: Ley de operación de la válvula.

Antes de intentar resolver la ecuación diferencial ordinaria, no lineal, anterior, analicemos la variación temporal del Bernoulli en la sección inmediatamente aguas arriba de la válvula, $B_2(t)$.

En $t = 0$, en el régimen permanente inicial, se tiene:

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = H_0$$

y por lo tanto, $B_2(0) = H_0$. Definiendo:

$$B_2(t) = B_2(0) + H_a(t) = H_0 + H_a(t)$$

entonces, $H_a(t)$ representa la variación impermanente del Bernoulli antes de la válvula con respecto al régimen permanente inicial. Ya dedujimos que:

$$B_2(t) = (\frac{A}{C_c\, A_v(t)})^2\, \frac{u^2(t)}{2g}$$

de donde se obtiene:

$$u(t) = \frac{C_c\, A_v(t)}{A}\, \sqrt{2g\,(H_0 + H_a(t))}$$

Dividiendo por u_0 y considerando la expresión determinada previamente para esta variable en términos de la carga H_0 y la abertura de la válvula se llega a:

$$u/u_0 = \eta\, \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}}$$

expresión que permite relacionar la velocidad impermanente en la tubería con el Bernoulli impermanente en la sección inmediatamente aguas arriba de la válvula. Derivando esta expresión con respecto al tiempo y reemplazando en la Ec.(3), se llega a una ecuacion equivalente a esta última pero que permite determinar la variación de la variable adimensional H_a/H_0 en función del tiempo:

$$\frac{d(H_a/H_0)}{d(t/T)} + \frac{2}{\eta}\, \left[\frac{d\eta}{d(t/T)}(1 + \frac{H_a}{H_0}) + \frac{H_0 T g}{u_0 L}\, \frac{H_a}{H_0}\, \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \right] = 0 \tag{4}$$

con condición inicial $H_a/H_0 = 0$ en $t/T = 0$ y $\eta(t/T)$, ley de operación de la válvula.

La variable H_a se relaciona con la cota piezométrica del flujo de la siguiente manera:

$$B_2(t) = \frac{u^2(t)}{2g} + \frac{\hat{p}_2(t)}{\gamma} = H_0 + H_a(t)$$

donde $\hat{p}_2/\gamma$ representa la cota piezométrica instantánea en la sección inmediatamente aguas arriba de la válvula. Despreciando la altura de velocidad en la tubería se obtiene:

$$\frac{\hat{p}_2(t)}{\gamma} = H_0 + H_a(t)$$

de donde se concluye que $H_a(t)$ representa la sobrepresión que ocurre inmediatamente aguas arriba de la válvula en el tiempo t, debido a la operación de ella.

Si bien la Ec.(4) no se puede resolver analíticamente, debido a su carácter no lineal, es posible, sin embargo, determinar el valor máximo de la sobrepresión H_a que ocurrirá para una ley de operación de la válvula dada. Para ello basta con imponer la condición $(dH_a)/(dt) = 0$ en (4). Llamando H_{amax} a la sobrepresión máxima, entonces se obtiene la ecuación cuadrática:

$$H_{amax}^2 - \frac{u_0^2 L^2}{g^2} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{u_0^2 L^2}{g^2 H_0} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 H_{amax} = 0$$

cuya solución es:

$$H_{amax} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_0 L}{g}\right)^2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \frac{1}{H_0} \pm \sqrt{\left(\frac{u_0 L}{g}\right)^4 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^4 \frac{1}{H_0^2} + 4 \left(\frac{u_0 L}{g}\right)^2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} \right]$$

de donde se obtiene:

$$\left(\frac{H_a}{H_0}\right)_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_0 L}{g H_0 T}\right)^2 \left(\frac{d\eta}{d(t/T)}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{u_0 L}{g H_0 T}\right)^{-2} \left(\frac{d\eta}{d(t/T)}\right)^{-2}} \right]$$

Para el caso de cierre lineal, como el considerado previamente, se tiene:

$$\frac{d\eta}{d(t/T)} = -(1 - \eta_f)$$

y en ese caso la sobrepresión máxima resulta ser función sólo de la fracción de cierre final η_f y el parámetro adimensional: $(u_0 L)/(g H_0 T)$.