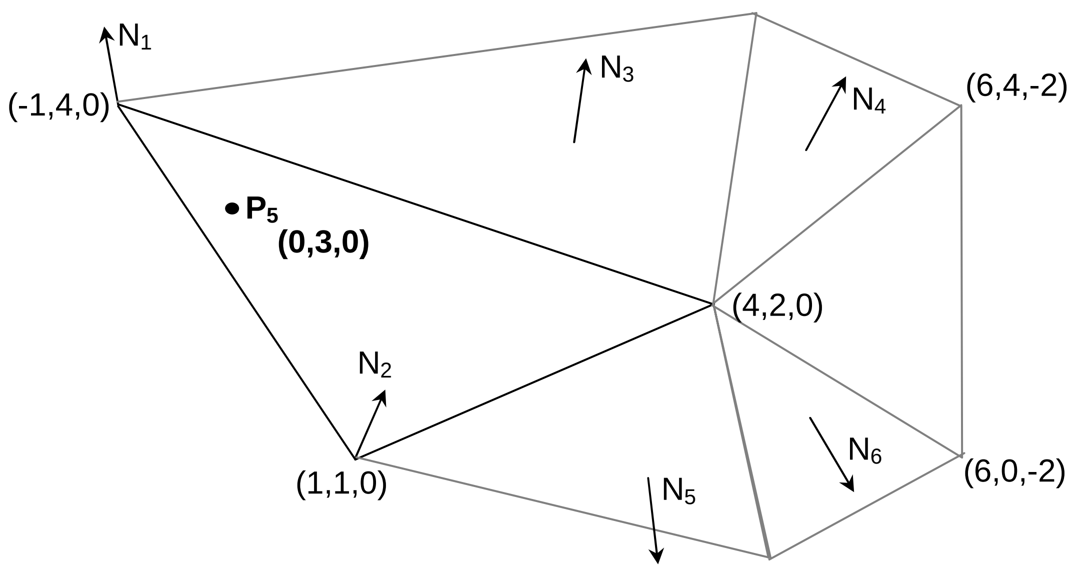
Clase Auxiliar 6 CC52B Computación Gráfica
Iluminación

Auxiliar: Alvaro Neira
Fecha: 20.Mayo.2005

Problema 1

En la siguiente figura se quiere calcular la intensidad de la luz en el punto P_5.



Existe sólo una luz direccional de dirección $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e intensidad 1.0.

La intensidad en los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es I_1, I_2 e I_3 respectivamente.

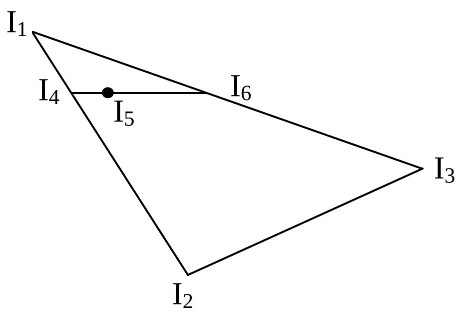
Las normales son:

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \end{pmatrix},$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, N_6 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{20} \\ -3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \end{pmatrix}$$

a) Determine la intensidad en el punto P_5 utilizando sombreado de Gouraud.
b) Determine la intensidad en el punto P_5 utilizando sombreado de Phong.

Solución
a) Se debe hacer interpolación bilinear en el punto pedido, con las intensidades dadas. Para ello se utiliza una línea de barrido paralela al eje *x*.



$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se necesita calcular las coordenadas de los puntos P_4 y P_6, que intersectan la línea de barrido con el triángulo (están a la misma altura que P_5).

Ecuación de la recta: $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$

Se reemplaza con los valores para P_4: $3 = 4 + \frac{1-4}{1-(-1)}\left(x_4 - (-1)\right)$

$$3 = 4 + \frac{-3}{2}\left(x_4 + 1\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{2} x_4$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para P_6: $3 = 4 + \frac{2-4}{4-(-1)}\left(x_6 - (-1)\right)$

$$3 = 4 + \frac{-2}{5}\left(x_6 + 1\right)$$

$$\frac{-3}{5} = \frac{-2}{5} x_6$$

$$x_6 = \frac{3}{2}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se aplica la interpolación bilinear:

$$I_4 = I_1 \frac{y_4 - y_2}{y_1 - y_2} + I_2 \frac{y_1 - y_4}{y_1 - y_2} = I_1 \frac{3-1}{4-1} + I_2 \frac{4-3}{4-1} = I_1 \frac{2}{3} + I_2 \frac{1}{3}$$

$$I_6 = I_1 \frac{y_6 - y_3}{y_1 - y_3} + I_3 \frac{y_1 - y_6}{y_1 - y_3} = I_1 \frac{3-2}{4-2} + I_3 \frac{4-3}{4-2} = I_1 \frac{1}{2} + I_3 \frac{1}{2}$$

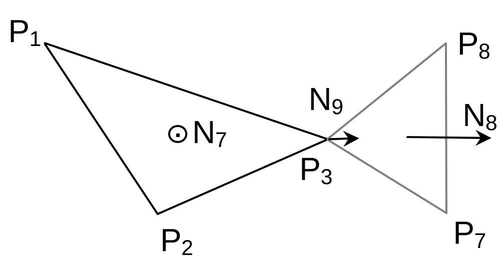
$$I_5 = I_4 \frac{x_6 - x_5}{x_6 - x_4} + I_6 \frac{x_5 - x_4}{x_6 - x_4} = I_4 \frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{3}{2} - \frac{-1}{3}} + I_6 \frac{0 - \frac{-1}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{-1}{3}} = I_4 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{6}} + I_6 \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{6}} = I_4 \frac{18}{22} + I_6 \frac{6}{33} = I_4 \frac{9}{11} + I_6 \frac{2}{11}$$

$$I_5 = \left(I_1 \frac{2}{3} + I_2 \frac{1}{3} \right) \frac{9}{11} + \left(I_1 \frac{1}{2} + I_3 \frac{1}{2} \right) \frac{2}{11} = I_1 \frac{18}{33} + I_2 \frac{9}{33} + I_1 \frac{2}{22} + I_3 \frac{2}{22} = I_1 \frac{36+6}{66} + I_2 \frac{9}{33} + I_3 \frac{2}{22}$$

$$\boxed{I_5 = I_1 \frac{7}{11} + I_2 \frac{3}{11} + I_3 \frac{1}{11}}$$

b) Para el sombreado de Phong se necesitan las normales de los 3 vértices. Falta la del punto P_3. Se debe calcular como el promedio de las caras que poseen P_3. O sea, como el promedio de N_3, N_4, N_5, N_6, la normal del triángulo P_1, P_2, P_3, y la del triángulo P_3, P_7, P_8.

Donde $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, P_8 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$



La del triángulo P_1, P_2, P_3 es trivialmente $N_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La del P_3, P_7, P_8 se calcula como el producto cruz de los lados del triángulo:

$$(P_7 - P_3) \times (P_8 - P_3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4+4) - \hat{j}(-4+4) + \hat{k}(4+4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

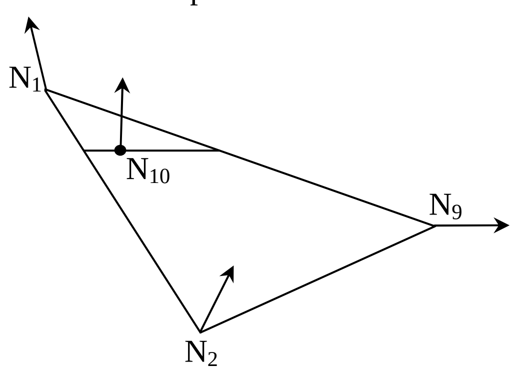
Normalizando $N_8 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ahora se calcula la normal en el vértice P_3 como el promedio de N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8:

$$\frac{N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8}{6} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{20}}+\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{20}}+0+\frac{1}{\sqrt{2}}}{6} \\ \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt{20}}-\frac{2}{3}-\frac{3}{\sqrt{20}}+0+0}{6} \\ \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt{20}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt{20}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{24\sqrt{5}+40+15\sqrt{8}}{60}}{6} \\ \dfrac{0}{6} \\ \dfrac{\frac{36\sqrt{5}+140+15\sqrt{8}}{60}}{6} \end{pmatrix}$$

Normalizando $N_9 = \begin{pmatrix} \dfrac{24\sqrt{5}+40+15\sqrt{8}}{\sqrt{34160+1800\sqrt{40}+12000\sqrt{5}+5400\sqrt{8}}} \\ 0 \\ \dfrac{36\sqrt{5}+140+15\sqrt{8}}{\sqrt{34160+1800\sqrt{40}+12000\sqrt{5}+5400\sqrt{8}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 \\ 0 \\ 0,888 \end{pmatrix}$

La normal interpolada tiene los mismos coeficientes que en la parte anterior:



$$N_1\frac{7}{11}+N_2\frac{3}{11}+N_9\frac{1}{11}$$
$$=\frac{7}{11}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}+\frac{3}{11}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}+\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 0,46 \\ 0 \\ 0,888 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -0,0605 \\ 0,677 \\ 0,498 \end{pmatrix}$$

Normalizando $N_{10} = \begin{pmatrix} -0,0718 \\ 0,803 \\ 0,591 \end{pmatrix}$

Entonces la intensidad en el punto P_5 según Phong es la intensidad por el producto punto de la dirección invertida y la normal calculada:

$$I = 1.0$$

$$L = -\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$I_5 = IN_{10}L = 1.0 \cdot \begin{pmatrix} -0,0718 \\ 0,803 \\ 0,591 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 1.0 \cdot (-0,0415 + 0,464 + 0,341) = \boxed{0,7635} \quad \blacksquare$$