

CC 52B Computación Gráfica

Representación de curvas y superficies
(incluyendo mallas de polígonos) para CG y
aplicaciones de ciencias, ingeniería y medicina.

Prof. María Cecilia Rivara
mcrivara@dcc.uchile.cl
Semestre 2005/2

MCRivara/CG2005/2

Representación / modelación de superficies

- Mallas de polígonos
- Superficies paramétricas (superficies curvas)
- Triangulaciones

MCRivara/CG2005/2

2

Motivación en ingeniería

- En aplicaciones de la industria de entretenimientos (CG) no interesa la "modelación precisa" o "representación precisa" de objetos.
- En aplicaciones de ciencias, ingeniería y medicina, la obtención y manejo de modelos o representaciones con una precisión requerida es un problema complejo e importante

MCRivara/CG2005/2

3

Motivación en CG

- Curvas y superficies se usan en muchas aplicaciones de Computación Gráfica
- Muchos objetos del mundo real son intrínsecamente "suaves": aplicaciones CAD en ingeniería, fonts de alta calidad, el camino de una cámara u objeto en secuencia animada.
- Dos tipos de modelación de curvas y superficies
 - modelación de objeto que existe (automóvil, montaña)
 - a partir de "cero": se modela (construye) el objeto a través del proceso.

MCRivara/CG2005/2

4

- Objeto que existe
 - descripción matemática puede no estar disponible
 - puede describirse con pedazos de planos, esferas u otras formas curvas fáciles describir
 - se requiere que puntos del modelo estén "cerca" de puntos del objeto real
- Objeto a partir de cero
 - se puede esculpir interactivamente
 - descripción matemática
 - descripción aproximada

MCRivara/CG2005/2

5

Tipos de modelos

- Modelación de superficies
 - Mallas de polígonos
 - superficies paramétricas
 - superficies polinómicas por pedazos
 - otros (tema muy amplio)
- Modelación de sólidos
representación de volúmenes "rodeados" totalmente por superficies (cubo, avión, edificio)
 - mallas de polígonos
 - » representan bien objetos poliédricos
 - » aproximan superficies curvas (no siempre es adecuado)

MCRivara/CG2005/2

6

Tipos de modelos (cont.)

- Modelación de curvas en el espacio
 - Curvas polinomiales paramétricas
tres polinomios en función de un parámetro $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$
- Curvas por pedazos polinomiales
- Superficies polinomiales por pedazos bivariados (dos variables) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$
 - los bordes de cada pedazo son curvas polinomiales paramétricas
 - se necesitan pocos pedazos (comparado con mallas de polígonos) para obtener precisión dada
 - algoritmos para manejar polinomios bivariados son más complejos que los algoritmos para mallas de polígonos
- Superficies cúbicas
 - definidas implícitamente por ecuación $f(x, y, z) = 0$ donde f es polinomio cúbico

MCRivara/CG2005/2

7

Mallas (abiertas) de polígonos

- Colección de aristas, vértices y caras tales que
 - cada arista es compartida por dos polígonos
 - cada arista conecta dos vértices
 - cara es secuencia cerrada de aristas (o vértices)
 - cada vértice es compartido al menos por dos aristas

Importante

- aristas, vértices y cara son elementos topológicos
- líneas (segmentos), puntos y polígonos son elementos geométricos

MCRivara/CG2005/2

8

- Mallas de polígonos pueden representarse de varias maneras distintas, cada una con ventajas y desventajas
 - es necesario elegir la representación más adecuada para cada aplicación evaluada
 - según criterios de espacio versus tiempo
 - operaciones típicas
 - encontrar aristas que inciden en un vértice
 - encontrar polígonos que compartan un vértice o una arista
 - encontrar aristas de un polígono
 - desplegar la malla
 - identificar errores en la representación

MCRivara/CG2005/2

9

Observaciones

- Cierta grado de redundancia es deseable: se obtienen soluciones más rápidas con más almacenamiento.
- En algunas aplicaciones mucha redundancia puede encarecer el proceso.

MCRivara/CG2005/2

10

Representaciones de mallas de polígonos

1. Representación explícita ingenua (coordenadas duplicadas)
 $P = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n))$
No es útil en general
2. Polígonos definidos mediante punteros a lista de vértices
 - cada vértice se guarda una vez
 - se pueden cambiar fácilmente las coordenadas del vértice
 - difícil encontrar polígonos que comparten una arista
 - cada arista se dibuja dos veces al desplegarse

MCRivara/CG2005/2

11

Representaciones (cont.)

3. Representación de polígonos mediante punteros a lista de aristas

- conjunto de vértices (cada vértice aparece una vez)
 - conjunto de aristas (cada arista aparece una vez)
 - polígono: lista de punteros a aristas
 - arista:
 - apunta a sus dos vértices
 - apunta a 1 o 2 polígonos que la contienen
- polígono $P = (E_1, E_2 \dots E_n)$
arista $E = (V_1, V_2, P_1, P_2)$

MCRivara/CG2005/2

12

Consistencia de Representaciones de mallas de polígonos

Chequeos

- todos los polígonos son cerrados
- todas las aristas se usan al menos una vez y (en algunas aplicaciones) con un valor máximo
- cada vértice es referenciado al menos por dos aristas
- en algunas aplicaciones la malla debe ser conexa, o no tener hoyos, etc.

Otros chequeos

- una arista no puede ser usada dos veces por el mismo polígono
- cada vértice es parte (al menos) de un polígono
- otros

Observación: La relación compartir arista es relación de equivalencia binaria. Permite particionar una malla en componentes conexas

Curvas cúbicas por pedazos

- Se pegan exigiendo condiciones de continuidad entre los pedazos
- Un segmento de curva se define por restricciones en los puntos extremos, vectores tangentes y continuidad entre los segmentos
polinomio cúbico \rightarrow 4 coeficientes
 \Rightarrow se necesitan 4 restricciones por pedazo

Tipos de curvas cúbicas por pedazos

- Hermite
 - dos puntos extremos y dos vectores tangentes
- Bézier
dos puntos extremos y otros dos puntos de control que controlan los vectores tangentes en los puntos extremos
- Varios tipos de splines definidos por 4 puntos de control

Curva cúbica paramétrica

$$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Matricialmente

$$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = TC$$

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$$

Derivada de $Q(t)$: vector tangente paramétrico

$$\frac{d}{dt} Q(t) = Q'(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} & \frac{dy(t)}{dt} & \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} \\ = [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0] C$$

Tipos de continuidad

- Si los segmentos de curva se unen tienen continuidad geométrica G^0
- Si las direcciones (pero no necesariamente las magnitudes) de los vectores tangentes son iguales en la juntura \Rightarrow continuidad geométrica G^1 (frecuente en CAD)
pendientes geométricas de los segmentos tangentes son iguales
 $TV_1 = kTV_2$ con $k > 0$
- Si los vectores tangentes de dos segmentos cúbicos son iguales (direcciones y magnitudes iguales) \Rightarrow continuidad C^1

Derivada n-ésima \Rightarrow continuidad C^n

Observación $Q'(t)$ es velocidad de un punto en una curva con respecto al parámetro t ; la segunda derivada es la aceleración.

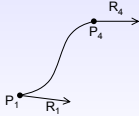
¿Cómo se introducen las restricciones?

- Cada pedazo de curva se escribe como:
 $Q(t) = T \ C_{4 \times 4}$
- Se reescribe C en función de una base de los polinomios que son considerados
 $C = M_{4 \times 4} \ G$
 G : vector de las restricciones geométricas
ejemplo: puntos extremos y vectores tangentes
 G_x : vector columna de los componentes x del vector geométrico

Curvas de Hermite

Restricciones en los puntos extremos P_1 y P_4 y en los vectores tangentes R_1 y R_4 en puntos extremos

Es necesario encontrar la base de Hermite M_H



Curva de Hermite

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad C_x = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x = T C_x = T M_H G_{Hx}$$

Condiciones (restricciones) que definen la curva en coordenadas x

$$x(0) = P_{1x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_H G_{Hx}$$

$$x(1) = P_{4x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_H G_{Hx}$$

Además, como

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H G_{Hx} \Rightarrow$$

$$x'(0) = R_{1x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H G_{Hx}$$

$$x'(1) = R_{4x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H G_{Hx}$$

Las 4 Restricciones juntas \Rightarrow

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = G_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H G_{Hx}$$

Análogamente para y, z

$$G_{Hx} = A M_H G_{Hx} \quad \text{/premultiplicado por } A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} G_{Hx} = M_H G_{Hx} \Rightarrow M_H = A^{-1}$$

$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz única!}$$

Luego

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \underbrace{T M_H}_{\hat{B}_H} G_H$$

y expandiendo

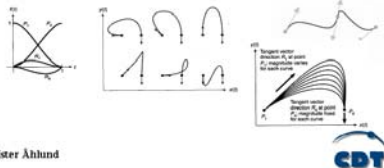
$$\begin{aligned} Q(t) &= B_H G_H = (2t^3 - 3t^2 + 1) P_1 + (-2t^3 + 3t^2) P_4 + \\ &\quad (t^3 - 2t^2 + t) R_1 + (t^3 - t^2) R_4 \\ &= P_1(t) P_1 + P_4(t) P_4 + \\ &\quad R_1(t) R_1 + R_4(t) R_4 \end{aligned}$$

$P_1(t), P_4(t), R_1(t), R_4(t)$: funciones de mezcla

Hermite Curves

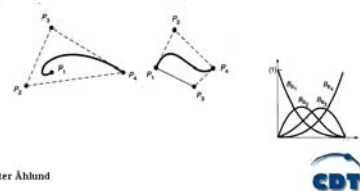
• Constraints on the endpoints

$$\begin{aligned} Q(t) &= G_H \cdot M_H \cdot T = G_H \cdot B_H \\ &= (2t^3 - 3t^2 + 1) P_1 + (-2t^3 + 3t^2) P_4 + (t^3 - 2t^2 + t) R_1 + (t^3 - t^2) R_4 \end{aligned}$$



Bezier Curves

$$R_1 = Q'(0) = 3(P_2 - P_1), \quad R_4 = Q'(1) = 3(P_4 - P_3)$$



Curvas de Bezier

- Se definen en función de P_1, P_2, P_3, P_4 donde P_1 y P_4 son los extremos del segmento.
- P_2 y P_3 son solo puntos de control. P_1 y P_4 son puntos de control e interpolación
- Los vectores tangentes en los puntos extremos se definen indirectamente en función los P_i

$$\begin{aligned} R_1 &= Q'(0) = 3(P_2 - P_1) \\ R_4 &= Q'(1) = 3(P_4 - P_3) \end{aligned} \quad G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \text{ vector de la geometría}$$

Curvas de Bezier (cont.)

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = M_{HB} G_B$$

M_{HB} : matriz de traspaso de la geometría

Base de Hermite

$$M_B = M_H G_{HB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = T M_B G_B = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$

Polinomios de Bernstein

Curvas de Bezier (cont.)

Propiedades

- Los polinomios de Bernstein son ≥ 0
- Su suma es uno para cada t
- La curva de Bezier está contenida en el cierre convexo de los P_i (útil para reducir trabajo al hacer clipping)

Splines

- Splines naturales (usados en métodos numéricos)
- B-Splines \Rightarrow Computación Gráfica

Spline Cúbico natural

- Tiene continuidad C^0, C^1, C^2 , más que Hermite y Bezier
- Los coeficientes de los polinomios en cada segmento dependen de todos los puntos de control.

Deventajas:

- cálculo \Rightarrow invertir matriz de $(n+1) \times (n+1)$
- movimiento de un punto afecta toda la curva

B-Spline cúbico

- Coefficientes de los segmentos de polinomios dependen de pocos puntos de control

Ventajas

- control local: movimiento de un punto afecta solo 4 segmentos cúbicos
- bajo tiempo de cálculo

Notación especial B-Splines cúbicos

- $(m+1)$ puntos de control P_0, P_1, \dots, P_m con $m \geq 3$
- $(m-1)$ nodos t_i (extremos de los parámetros de los segmentos de las curvas)
 t_3, t_4, \dots, t_{m+1} (UNIFORME: $t_i = i-3$)
- $(m-2)$ segmentos de curvas cúbica Q_i definida para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

Ejemplo; $m = 3$ (1 curva)

Q_3 definida para $t_3 \leq t \leq t_4$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$ puntos de control: P_0, P_1, P_2, P_3 ,

Matricialmente B-Spline cúbico uniforme

- $Q_i(t) = T_i M_{BS} \cdot G_{BS}$ $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

donde

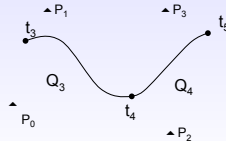
$$T_i = [(t-t_i)^3 \ (t-t_i)^2 \ (t-t_i) \ 1]$$

$$G_{BS} = \begin{bmatrix} P_i - 3 \\ P_i - 2 \\ P_i - 1 \\ P_i \end{bmatrix} \text{ vector de la geometría}$$

$$M_{BS} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriz de base}$$

Propiedades

- cada segmento definido por 4 puntos
- cada punto de control influye sobre 4 curvas
- continuidad C^0 , C^1 , C^2 entre Q_i y Q_{i+1}
- para definir curva cerrada se repiten P_0, P_1, P_2 al final de la curva
- se puede forzar a interpolar puntos de control repitiendo los puntos



B-Spline general (no uniforme)

- Más general y más flexible
- Funciones de mezcla $B_i(t)$
 $Q_i(t) = P_{i-3} B_{i-3}(t) + P_{i-2} B_{i-2}(t) + P_{i-1} B_{i-1}(t) + P_i B_i(t)$
- $B_{i-3}, B_{i-2}, B_{i-1}, B_i$ son polinomios de tercer grado y se construyen recursivamente en función de polinomios de grado 0, 1, 2.

Superficies Paramétricas Bicúbicas

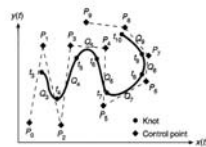
- parámetros s, t
- Hermite, Bezier, B-Splines, NURBS
- Los pedazos de superficies (y las curvas) se pueden subdividir para mejorar la aproximación agregando NODOS
- NURBS: non-uniform rational B-Splines

TAREA: Usar las funciones de OpenGL relacionadas con curvas y superficies (OpenGL "avanzado")

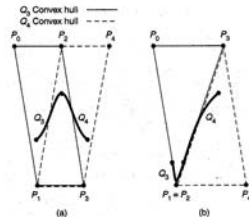
Uniform, Nonrational B-Splines

$$Q(t) = G_{BS} \cdot M_{BS} \cdot T, \quad T = G_{BS} \cdot M_{BS} \cdot T$$

$$= G_{BS} \cdot B_{BS} = P_{i-3} \cdot B_{i-3} + P_{i-2} \cdot B_{i-2} + P_{i-1} \cdot B_{i-1} + P_i \cdot B_{i0}$$



Nonuniform, Nonrational B-Splines



Christer Ahlund



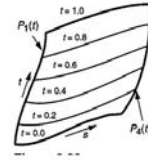
MCRivara/CG2005/2

37

Parametric Bicubic Surfaces

Like parametric curves but in two dimensions

$$x(s, t) = G_{H_s}(t) \cdot M_H \cdot S = [P_1(t) \ P_2(t) \ R_1(t) \ R_2(t)] \cdot M_H \cdot S$$



Christer Ahlund



MCRivara/CG2005/2

38

Resumen

- Las mallas de polígonos pueden ser poco adecuadas para objetos con caras curvas
- Curvas y superficies cúbicas paramétricas se usan ampliamente en CG y CAD
 - proveen control local
 - puede aproximar o interpolar los puntos de control
 - computacionalmente eficientes
 - refinamiento por subdivisión y adición de nodos
 - se transforman fácilmente, transformando los puntos de control
- Temas importantes: despliegue y rendering de superficies paramétricas

MCRivara/CG2005/2

39

Triangulaciones

- Caso especial de malla de polígonos
- Muy usada en CG y aplicaciones de ingeniería
- Modelación de superficies: 2D, 2½D, 3D; abiertas y cerradas
- Muy versátil para aproximar bien geometrías complejas con mallas no uniformes
- Cada triángulo (polígono) define exactamente un plano
- Más difícil de manejar que mallas de cuadriláteros (algoritmos, estructura de datos)
- Triangulaciones para CG: tema de gran desarrollo en los últimos años

MCRivara/CG2005/2

40

Problemas actuales en CG

- Tener modelos con distinta resolución de un objeto 3D: triangulaciones jerárquicas
- Dado un objeto 3D escaneado, obtener una representación que use el mínimo número de puntos necesario dados los requerimientos
- Representaciones comprimidos

OBS: En las aplicaciones se necesitan "buenas triangulaciones"

MCRivara/CG2005/2

41

Problemas algorítmicos con Triangulaciones (algunos)

- Triangularizar conjunto de puntos en 2D
- Triangularización óptima para algún criterio
- Triangularizar conjunto de puntos sobre una superficie en 3D (abierto o cerrado)
- Triangularización de volumen (puntos asociados a un objeto)
- Triangularización de un objeto dada su geometría
- Triangularización automática de "buena calidad" de un objeto

MCRivara/CG2005/2

42

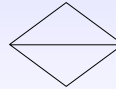
Cont.

- Triangulaciones jerárquicas de un objeto
- Algoritmos de simplificación de triangulaciones
- Algoritmos de refinamiento de triangulaciones
- Algoritmos de mejoramiento de triangulaciones
- Triangulaciones no obtusas (o poco obtusas)

Triangulación válida (acceptable o conforme)

$P = \{\text{vértices}\}$
 $T = \{\text{triángulos}\}$

- dos triángulos se intersectan en vértice o arista común



Algoritmos para triangularizar {puntos}

Triangulación Delaunay

$T = \{\text{triángulos}\}$ $P = \{\text{vértices}\}$

- T incluye todos los vértices de P y es triangulación válida
- Para todo triángulo t
 $C(t)$: círculo circunscrito de t no contiene en su interior ningún vértice de P

