

Ejercicio 3 - CC50Q

Teoría de la Información y Redes Neuronales

Prof: Pedro Ortega <peortega@dcc.uchile.cl>
Aux: Francisco Claude <fclaude@dcc.uchile.cl>

12 de agosto de 2005

-Entrega: 19 de Agosto, 12:00 horas, Secretaría Docente DCC-

El objetivo de este ejercicio es aplicar el método de inferencia bayesiana en el aprendizaje de un modelo matemático de una neurona, y verificar los resultados.

Modelo Neuronal

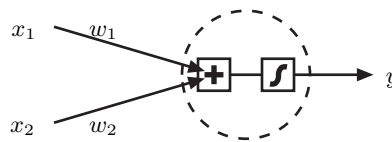
Una neurona puede modelarse por medio de una función que combina n pulsos entrantes y produce un pulso resultante. Los pulsos de entrada son valores reales continuos en $[0; 1]$. El pulso de salida puede tomar uno de dos valores: 0 (apagado) o 1 (encendido). En este caso, consideramos una neurona con dos entradas x_1 y x_2 y cuya probabilidad de salida $P(y = 1, x_1, x_2 | w_1, w_2)$ está dada por

$$P(y = 1, x_1, x_2 | w_1, w_2) = \frac{1}{1 + e^{-(w_1 x_1 + w_2 x_2)}}$$

donde $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$. En la fórmula anterior, w_1 y w_2 son los parámetros ajustables de la neurona, ambos reales $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Cada elección del par (w_1, w_2) constituye una configuración neuronal distinta que determina el comportamiento de la neurona, i.e. modela una función distinta de las entradas x_1 y x_2 .

Nótese que el parámetro w_i (o también llamado *peso* de la conexión neuronal) determina la influencia que tiene la entrada i -ésima sobre el resultado: si $w_i > 0$ entonces influye positivamente; si $w_i < 0$ entonces influye negativamente; y si $w_i = 0$ entonces x_i no influye sobre y .

La neurona puede ilustrarse esquemáticamente como sigue:



modelo neuronal

en donde puede apreciarse una primera etapa (suma ponderada de las entradas) y una segunda etapa (*squashing* del resultado intermedio).

Problema

Considere el problema de ajustar la creencia sobre la configuración neuronal (w_1, w_2) a medida que llegan observaciones nuevas, i.e. *en forma iterativa*. Partiendo desde una distribución a priori normal $\mathcal{N}(0, 1)$ para cada parámetro w_i , es decir

$$P(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_i^2}{2}}$$

calcule las distribuciones a posteriori $P(w_1, w_2|D)$ (D es el conjunto de observaciones visto hasta el instante actual) tras la inclusión de los datos tabulados a continuación:

d_i	$(x_1, x_2) \rightarrow y$
d_1	$(0, 5, 0, 1) \rightarrow 1$
d_2	$(0, 8, 0, 9) \rightarrow 0$
d_3	$(0, 2, 0, 8) \rightarrow 1$
d_4	$(0, 7, 0, 1) \rightarrow 0$

Observe que en este caso, una observación/dato es una tripleta (y, x_1, x_2) de entrada-salida. Utilice una herramienta computacional para calcular las distribuciones a posteriori. Limite el espacio de hipótesis a $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Si Ud. lo desea, puede definirse una grilla sobre el espacio de hipótesis, pero debe contener por lo menos 50 subdivisiones en cada eje.

Entrega

Ud. debe entregar un informe muy breve, escrito a mano (¡letra legible!) o impreso, con los siguientes puntos:

1. *Desarrollo matemático*: Formule el problema de inferencia. Identifique el espacio de hipótesis, el espacio de datos, y plantee la forma particular de la regla bayesiana. Esto requerirá argumentar sus suposiciones de independencia y su formalización matemática. Preguntas que debe saber contestar, entre otras, son: ¿La respuesta entregada por la neurona en el instante t depende de las respuestas en los instantes anteriores? ¿La función verosimilitud en el instante t está condicionada a los datos anteriores?
2. *Tabla de Gráficos*: Para cada instante de tiempo $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, haga 3 gráficos: a) la función modelada por la neurona, i.e. $P(y = 1, x_1, x_2|D)$ en función de (x_1, x_2) ; b) la función verosimilitud $P(d_t|w_1, w_2)$; y c) la distribución a posteriori resultante $P(w_1, w_2|d_t, \dots, d_1)$. Nótese que para el instante $t = 0$ la función verosimilitud será vacía, y que la construcción de la función $P(y = 1, x_1, x_2|D)$ modelada por la neurona requiere de la *marginalización sobre el espacio de hipótesis*.
3. *Análisis y conclusiones*: Verifique visualmente la correctitud de los resultados. Analice los gráficos resultantes en relación a la teoría y concluya.

No se aceptarán entregas atrasadas. No dude en plantear sus dudas en el foro de U-Cursos.