

# Ejercicio 3 - CC50Q

## Teoría de la Información y Redes Neuronales

Prof: Pedro Ortega <peortega@dcc.uchile.cl>  
Aux: Francisco Claude <fclaude@dcc.uchile.cl>

12 de agosto de 2005

-Entrega: 19 de Agosto, 12:00 horas, Secretaría Docente DCC-

El objetivo de este ejercicio es aplicar el método de inferencia bayesiana en el aprendizaje de un modelo matemático de una neurona, y verificar los resultados.

### Modelo Neuronal

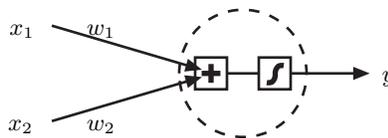
Una neurona puede modelarse por medio de una función que combina  $n$  pulsos entrantes y produce un pulso resultante. Los pulsos de entrada son valores reales continuos en  $[0; 1]$ . El pulso de salida puede tomar uno de dos valores: 0 (apagado) o 1 (encendido). En este caso, consideramos una neurona con dos entradas  $x_1$  y  $x_2$  y cuya probabilidad de salida  $P(y = 1, x_1, x_2 | w_1, w_2)$  está dada por

$$P(y = 1, x_1, x_2 | w_1, w_2) = \frac{1}{1 + e^{-(w_1 x_1 + w_2 x_2)}}$$

donde  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ . En la fórmula anterior,  $w_1$  y  $w_2$  son los parámetros ajustables de la neurona, ambos reales  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ . Cada elección del par  $(w_1, w_2)$  constituye una configuración neuronal distinta que determina el comportamiento de la neurona, i.e. modela una función distinta de las entradas  $x_1$  y  $x_2$ .

Nótese que el parámetro  $w_i$  (o también llamado *peso* de la conexión neuronal) determina la influencia que tiene la entrada  $i$ -ésima sobre el resultado: si  $w_i > 0$  entonces influye positivamente; si  $w_i < 0$  entonces influye negativamente; y si  $w_i = 0$  entonces  $x_i$  no influye sobre  $y$ .

La neurona puede ilustrarse esquemáticamente como sigue:



modelo neuronal

en donde puede apreciarse una primera etapa (suma ponderada de las entradas) y una segunda etapa (*squashing* del resultado intermedio).

## Problema

Considere el problema de ajustar la creencia sobre la configuración neuronal  $(w_1, w_2)$  a medida que llegan observaciones nuevas, i.e. *en forma iterativa*. Partiendo desde una distribución a priori normal  $\mathcal{N}(0, 1)$  para cada parámetro  $w_i$ , es decir

$$P(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_i^2}{2}}$$

calcule las distribuciones a posteriori  $P(w_1, w_2|D)$  ( $D$  es el conjunto de observaciones visto hasta el instante actual) tras la inclusión de los datos tabulados a continuación:

$d_i$	$(x_1, x_2) \rightarrow y$
$d_1$	$(0,5, 0,1) \rightarrow 1$
$d_2$	$(0,8, 0,9) \rightarrow 0$
$d_3$	$(0,2, 0,8) \rightarrow 1$
$d_4$	$(0,7, 0,1) \rightarrow 0$

Observe que en este caso, una observación/dato es una tripleta  $(y, x_1, x_2)$  de entrada-salida. Utilice una herramienta computacional para calcular las distribuciones a posteriori. Limite el espacio de hipótesis a  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Si Ud. lo desea, puede definirse una grilla sobre el espacio de hipótesis, pero debe contener por lo menos 50 subdivisiones en cada eje.

## Entrega

Ud. debe entregar un informe muy breve, escrito a mano (¡letra legible!) o impreso, con los siguientes puntos:

1. *Desarrollo matemático:* Formule el problema de inferencia. Identifique el espacio de hipótesis, el espacio de datos, y plantee la forma particular de la regla bayesiana. Esto requerirá argumentar sus suposiciones de independencia y su formalización matemática. Preguntas que debe saber contestar, entre otras, son: ¿La respuesta entregada por la neurona en el instante  $t$  depende de las respuestas en los instantes anteriores? ¿La función verosimilitud en el instante  $t$  está condicionada a los datos anteriores?
2. *Tabla de Gráficos:* Para cada instante de tiempo  $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , haga 3 gráficos: a) la función modelada por la neurona, i.e.  $P(y = 1, x_1, x_2|D)$  en función de  $(x_1, x_2)$ ; b) la función verosimilitud  $P(d_t|w_1, w_2)$ ; y c) la distribución a posteriori resultante  $P(w_1, w_2|d_t, \dots, d_1)$ . Nótese que para el instante  $t = 0$  la función verosimilitud será vacía, y que la construcción de la función  $P(y = 1, x_1, x_2|D)$  modelada por la neurona requiere de la *marginalización sobre el espacio de hipótesis*.
3. *Análisis y conclusiones:* Verifique visualmente la correctitud de los resultados. Analice los gráficos resultantes en relación a la teoría y concluya.

**No se aceptarán entregas atrasadas. No dude en plantear sus dudas en el foro de U-Cursos.**