Clase Auxiliar 7 CC30B - 22/09/04

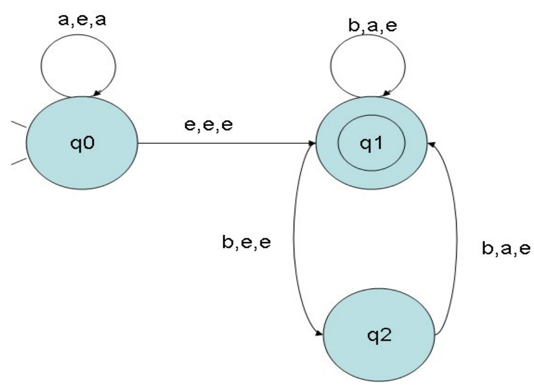
De un autómata de pila a la gramática

Considere el autómata de pila que reconoce el lenguaje $L = \{a^m b^n / m \leq n \leq 2m\}$, definido por $M = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, a, \Delta, q_0, \{q_1\}\}$, con $\Delta = \{((q_0, a, \epsilon), (q_0, a)),$ $((q_0, \epsilon, \epsilon), (q_1, \epsilon)), ((q_1, b, a), (q_1, \epsilon)), ((q_1, b, \epsilon), (q_2, \epsilon)), ((q_2, b, a), (q_1, \epsilon))\}$

Construya la gramática para este lenguaje a partir del autómata M.

Solución:

El autómata descrito en la pregunta es:



La forma en que sabemos pasar de un autómata de pila a la gramática correspondiente supone una forma especial del autómata, donde hay algunas restricciones. Estas son:

1. $\forall((\alpha, p, \gamma)(r, \beta)) \in \Delta$, donde $\alpha \in \Sigma^*, \gamma, \beta \in \Gamma^*, p, r \in K$ se cumple que $|\gamma| \leq 1$.

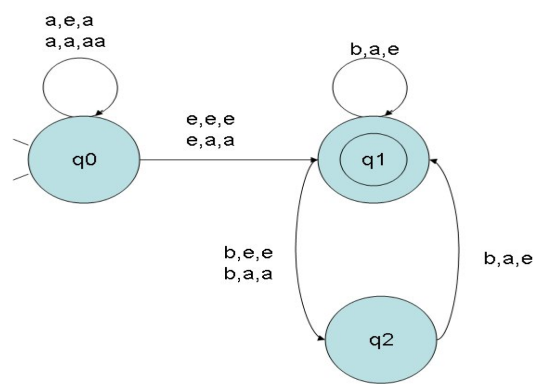
   Es decir, en cada transición se puede sacar a lo más un caracter de la pila.

   Si es que en alguna transición $|\gamma| > 1$, se debe descomponer esa transición en varias transiciones que pasan por estados intermedios, sacando en cada una un caracter de la pila. Para este problema, el autómata cumple esta restricción.

2. Si es que existe una transición $((\alpha, p, \epsilon)(r, \beta)) \in \Delta$, donde $\alpha \in \Sigma^*, \beta \in \Gamma^*, p, r \in K$, deben existir también las transiciones $((\alpha, p, \gamma_i)(r, \beta\gamma_i)), \forall \gamma_i \in \Gamma$.

Es decir, si hay una transición de p a r en que no se consulte el tope de la pila, también deben haber transiciones entre los mismos estados que remuevan un caracter y luego lo apilen nuevamente, para cada caracter del alfabeto del autómata.

Con estas restricciones, el autómata queda:



Ahora podemos empezar a escribir la gramática.

$G = \{V, \Sigma, R, S\}$

donde,

$\Sigma = \Sigma$ de M

$V = \{S\} \cup \{< p, \gamma, q > \forall p, q \in K, \gamma \in \Gamma \cup \{\epsilon\}\}$

Es decir:

$\Sigma = \{a, b\}$

$V = \{S, < q_0, a, q_0 >, < q_0, a, q_1 >, < q_0, a, q_2 >, < q_1, a, q_0 >,$
$< q_1, a, q_1 >, < q_1, a, q_2 >, < q_2, a, q_0 >, < q_2, a, q_1 >, < q_2, a, q_2 >$
$, < q_0, \epsilon, q_0 >, < q_0, \epsilon, q_1 >, < q_0, \epsilon, q_2 >, < q_1, \epsilon, q_0 >, < q_1, \epsilon, q_1 >,$
$< q_1, \epsilon, q_2 >< q_2, \epsilon, q_0 >, < q_2, \epsilon, q_1 >, < q_2, \epsilon, q_2 >\}$

Recordemos que:

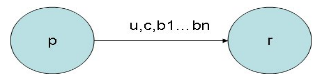
$L(< p, \gamma, q >) = \{x \in \Sigma^*$ tal que M consume x cuando pasa del estado p al q leyendo γ del tope de la pila $\}$.

$L(< p, \epsilon, q >) = \{x \in \Sigma^*$ tal que M consume x cuando pasa del estado p al q sin consultar ni modificar la pila $\}$.

Ahora veamos cúales son las reglas de derivación:

1. Agregamos las reglas $S \rightarrow < s, \epsilon, f > \forall f \in F$, esto es:
   $S \rightarrow < q_0, \epsilon, q_1 >$

2. Para las transiciones del tipo



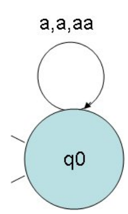
con $u \in \Sigma^*, c \in \Gamma, b_1, ...b_n \in \Gamma$,(transiciones en que se remueve y se apila), agregamos las reglas:

$< p, c, k > \rightarrow u < r, b_1, k_1 >< k_1, b_2, k_2 > \ldots < k_{n-1}, b_n, k >$

$\forall k, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in K$. Es decir, para cada permutación de n estados cualquiera del autómata, o sea, se agregarán $|K|^n$ reglas.

Transiciones de este tipo son:

a)



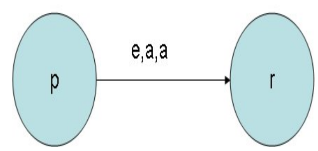
donde $p = r = q_0, u = a, c = a, b_1 = b_2 = a$.

Entonces, agregamos las reglas:

$< q_0, a, q_0 > \rightarrow a < q_0, a, q_0 >< q_0, a, q_0 >$
$< q_0, a, q_0 > \rightarrow a < q_0, a, q_1 >< q_1, a, q_0 >$
$< q_0, a, q_0 > \rightarrow a < q_0, a, q_2 >< q_2, a, q_0 >$
$< q_0, a, q_1 > \rightarrow a < q_0, a, q_0 >< q_0, a, q_1 >$
$< q_0, a, q_1 > \rightarrow a < q_0, a, q_1 >< q_1, a, q_1 >$

$< q_0, a, q_1 > \rightarrow a < q_0, a, q_2 >< q_2, a, q_1 >$
$< q_0, a, q_2 > \rightarrow a < q_0, a, q_0 >< q_0, a, q_2 >$
$< q_0, a, q_2 > \rightarrow a < q_0, a, q_1 >< q_1, a, q_2 >$
$< q_0, a, q_2 > \rightarrow a < q_0, a, q_2 >< q_2, a, q_2 >$

$b)$

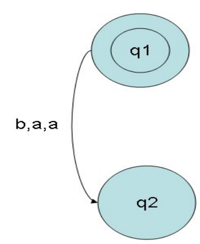


donde $p = q_0, r = q_1, u = \epsilon, c = a, b_1 = a$.

Agregamos las reglas:

$< q_0, a, q_0 > \rightarrow < q_1, a, q_0 >$
$< q_0, a, q_1 > \rightarrow < q_1, a, q_1 >$
$< q_0, a, q_2 > \rightarrow < q_1, a, q_2 >$

$c)$

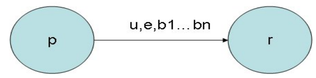


donde $p = q_1, r = q_2, u = b, c = a, b_1 = a$.

Agregamos las reglas:

$< q_1, a, q_0 > \rightarrow b < q_2, a, q_0 >$
$< q_1, a, q_1 > \rightarrow b < q_2, a, q_1 >$
$< q_1, a, q_2 > \rightarrow b < q_2, a, q_2 >$

3. Para las transiciones del tipo

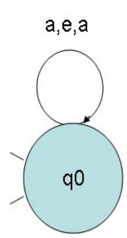


con $u \in \Sigma^*, b_1, ...b_n \in \Gamma$,(transiciones en que no se remueve nada pero se apila), agregamos las reglas:

$< p, \epsilon, k > \rightarrow u < r, b_1, k_1 >< k_1, b_2, k_2 > \ldots < k_{n-1}, b_n, k >$

$\forall k, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in K$. Al igual que antes, $|K|^n$ reglas.

La única transición de este tipo es:

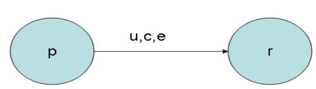


donde $p = q_0, r = q_0, u = a, b_1 = a$.

Agregamos las reglas:

$< q_0, \epsilon, q_0 > \rightarrow a < q_0, a, q_0 >$
$< q_0, \epsilon, q_1 > \rightarrow a < q_0, a, q_1 >$
$< q_0, \epsilon, q_2 > \rightarrow a < q_0, a, q_2 >$

4. Para las transiciones del tipo

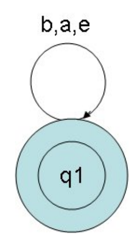


con $u \in \Sigma^*, c \in \Gamma$,(transiciones en que se remueve pero no se apila nada), agregamos las reglas:

$< p, a, k > \rightarrow u < r, \epsilon, k > \forall k \in K$.

Transiciones de este tipo son:

$a)$

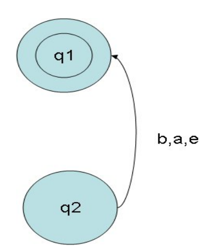


donde $p = r = q_1, u = b, c = a$.

Agregamos las reglas:

$< q_1, a, q_0 > \rightarrow b < q_1, \epsilon, q_0 >$
$< q_1, a, q_1 > \rightarrow b < q_1, \epsilon, q_1 >$
$< q_1, a, q_2 > \rightarrow b < q_1, \epsilon, q_2 >$

$b)$

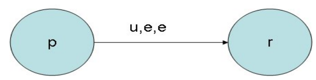


donde $p = q_2, r = q_1, u = b, c = a$.

Agregamos las reglas:

$< q_2, a, q_0 > \to b < q_1, \epsilon, q_0 >$
$< q_2, a, q_1 > \to b < q_1, \epsilon, q_1 >$
$< q_2, a, q_2 > \to b < q_1, \epsilon, q_2 >$

5. Para las transiciones del tipo

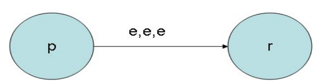


con $u \in \Sigma^*$ (transiciones en que no se remueve ni se apila nada), agregamos las reglas:

$< p, \epsilon, k > \to u < r, \epsilon, k > \forall k \in K.$

Transiciones de este tipo son:

a)

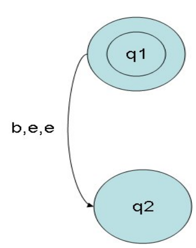


donde $p = q_0, r = q_1, u = \epsilon.$

Agregamos las reglas:

$< q_0, \epsilon, q_0 > \to < q_1, \epsilon, q_0 >$
$< q_0, \epsilon, q_1 > \to < q_1, \epsilon, q_1 >$
$< q_0, \epsilon, q_2 > \to < q_1, \epsilon, q_2 >$

b)



donde $p = q_1, r = q_2, u = b$.

Agregamos las reglas:

$< q_1, \epsilon, q_0 > \rightarrow b < q_2, \epsilon, q_0 >$
$< q_1, \epsilon, q_1 > \rightarrow b < q_2, \epsilon, q_1 >$
$< q_1, \epsilon, q_2 > \rightarrow b < q_2, \epsilon, q_2 >$

6. Por último, agregamos las reglas:

   $< p, \epsilon, p > \rightarrow \epsilon \ \ \forall p \in K.$
   Agregamos entonces:
   $< q_0, \epsilon, q_0 > \rightarrow \epsilon$
   $< q_1, \epsilon, q_1 > \rightarrow \epsilon$
   $< q_2, \epsilon, q_2 > \rightarrow \epsilon$

   Renombrando los no terminales, las reglas quedan:
   $S \rightarrow E_{01}$
   $A_{00} \rightarrow aA_{00}A_{00}|aA_{01}A_{10}|aA_{02}A_{20}|A_{10}$
   $A_{01} \rightarrow aA_{00}A_{01}|aA_{01}A_{11}|aA_{02}A_{21}|A_{11}$
   $A_{02} \rightarrow aA_{00}A_{02}|aA_{01}A_{12}|aA_{02}A_{22}|A_{12}$
   $A_{10} \rightarrow bA_{20}|bE_{10}$
   $A_{11} \rightarrow bA_{21}|bE_{11}$
   $A_{12} \rightarrow bA_{22}|bE_{12}$
   $A_{20} \rightarrow bE_{10}$
   $A_{21} \rightarrow bE_{11}$
   $A_{22} \rightarrow bE_{12}$
   $E_{00} \rightarrow aA_{00}|E_{10}|\epsilon$
   $E_{01} \rightarrow aA_{01}|E_{11}$
   $E_{02} \rightarrow aA_{02}|E_{12}$
   $E_{10} \rightarrow bE_{20}$
   $E_{11} \rightarrow bE_{21}|\epsilon$
   $E_{12} \rightarrow bE_{22}$
   $E_{22} \rightarrow \epsilon$