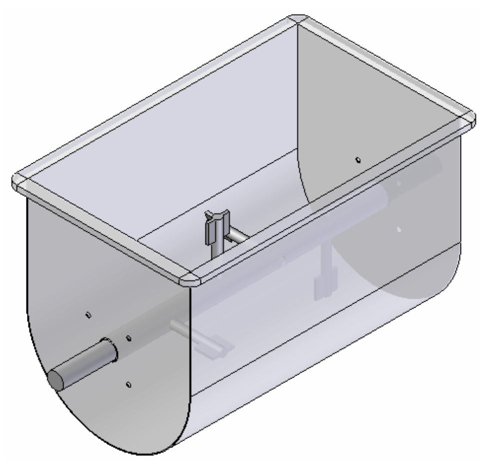
ME56A – Diseño de Elementos de Máquinas
Prof. Roberto Corvalán P.
Semestre Otoño 2005
Ayudante: Darren Ledermann M.
Fecha: 13 de Abril, 2005

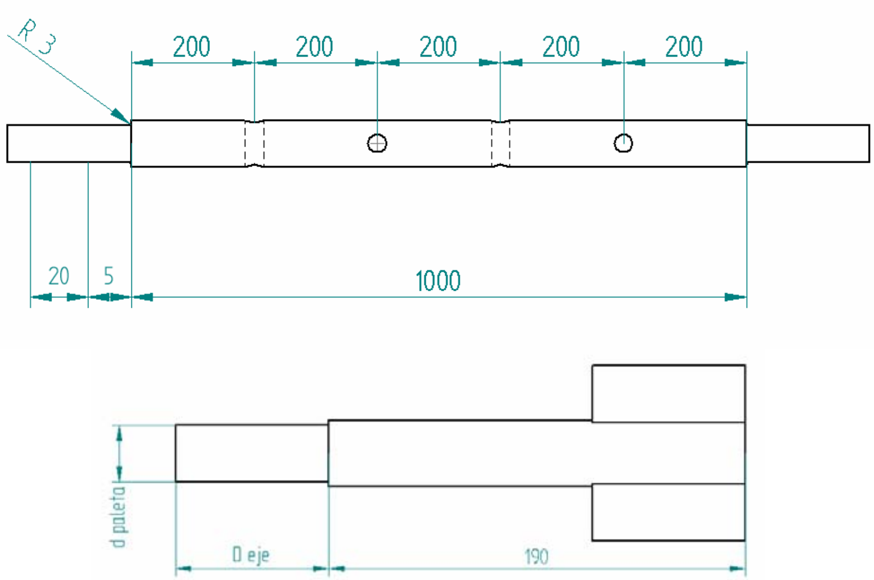
DIMEC
Departamento de Ingeniería Civil Mecánica
Universidad de Chile

EJERCICIO N°2

P1) El eje de la figura corresponde al eje principal de una amasadora de pan destinada a amasar 2 quintales de harina. La batea mostrada es de acero inoxidable y tiene un peso de 30 [kg] y la mezcla de harina, agua, margarina, levadura y sal contenida en la batea tiene un peso aproximado de 170 [kg]. Un motor le entrega al eje una potencia de 5 HP para poder revolver la masa y el eje debe girar a cerca de 30 RPM para poder mezclar correctamente. El eje posee 4 paletas mezcladoras, dispuestas de manera secuencial como muestra la figura. La batea descansa sobre el eje gracias a un par de rodamientos.

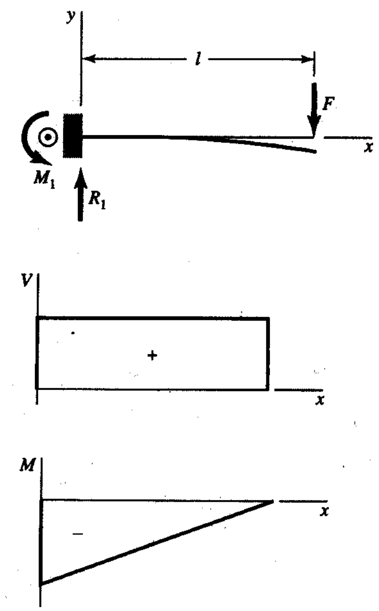
a) Diseñe las paletas. Muestre el diagrama de momentos para las paletas. Calcule el momento flector máximo. Calcule el diámetro mínimo del eje de cada paleta para soportar el torque efectuado sobre ellas en función del material. (Suponga que el eje de las paletas es de sección circular) *(1.5 pts)*
b) Calcule el valor de las reacciones en los descansos para el eje principal. Determine el diagrama de momentos, obtenga el valor del momento máximo y el par de torsión máximo en el eje. Calcule finalmente el diámetro mínimo del eje sin considerar efectos de fatiga. *(1.5 pts.)*
c) Para poder contener las paletas, el eje principal debe tener 4 perforaciones que lo atraviesan. El eje está torneado (maquinado) y se le pide una confiabilidad del 95%. Para poder montar los rodamientos en los descansos, el eje tiene un entalle de radio r = 3 [mm]. Calcule los valores de k_i que estime pertinente y obtenga el diámetro mínimo del eje considerando fatiga. *(3 pts.)*





Pauta Ejercicio 2 ME56A
Diseño de Elementos de Máquinas

Parte a) (1.5 pts.) La paleta se puede modelar como un brazo de sección circular empotrado en el eje principal de la amasadora. Por esto, es posible utilizar los siguientes diagramas y datos de Shigley para vigas en voladizo, como se muestra en la figura.



$R_1 = V = F \quad M_1 = -Fl$

$M = F(x-l)$

$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x-3l)$

$y_{máx} = -\frac{Fl^3}{3EI}$

Figura 1: Diagrama de Momentos y Fórmulas Aplicables a la Paleta.

Como se menciona en el enunciado, el eje posee 4 paletas y se le entrega una potencia de 5 HP al eje, por lo tanto, esta potencia debe repartirse de manera pareja entre las 4 paletas. Por lo tanto, para cada paleta, se puede escribir:

$$T_{paleta} = \frac{T_{eje}}{4} \tag{1}$$

Como la relación entre HP y W es $1[hp] = 746[W]$ y además se cumple que $P = T \cdot \omega$, entonces es posible calcular el torque efectuado en el eje y, por consiguiente, el torque en cada paleta. Recordemos que el eje gira a 30 RPM.

$$N_{[rad/s]} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{RPM}}{60} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot 30}{60} = 3{,}1415[rad/s] \tag{2}$$

$$5[HP] = 3730[W] = T \cdot 3{,}1416[rad/s] \Rightarrow T_{eje} = 1187{,}33[N \cdot m] \Rightarrow T_{paleta} = 296{,}83[N \cdot m] \quad (3)$$

Teniendo esto en cosideración, se sabe que la paleta tiene un largo de $L = 190[mm] = 0{,}19[m]$ y, por lo tanto, como se conoce el torque que actúa sobre la paleta y su largo, como $T = F \cdot L$ entonces es posible calcular la fuerza que se ejerce sobre la paleta.

$$296{,}83[N \cdot m] = F \cdot 0{,}19[m] \Rightarrow F = 1562{,}26[N] \quad (4)$$

Ahora procederemos a calcular el momento flector máximo sobre la paleta. Para una viga en voladizo con una carga puntual en el extremo, este valor se calcula de la siguiente forma:

$$M_{max} = F \cdot -L \Rightarrow |M_{max}| = 1562{,}26[N] \cdot 0{,}19[m] = 296{,}83[N \cdot m] \quad (5)$$

Para calcular el esfuerzo máximo al cual está sometido la paleta, se utiliza la siguiente relación:

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad (6)$$

Para estimar las dimensiones de la sección circular de la paleta, se debe seleccionar un material, considerar que su momento de inercia es $I = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$, que la distancia c del eje neutro a la fibra externa es $D/2$ y se debe despejar el valor de la siguiente ecuación. Supondremos para efectos de cálculo que la paleta es de acero SAE 1018, con un valor de $S_{uts} = 341[MPa]$. Aplicando factor de diseño $n = 2$, se tiene lo siguiente:

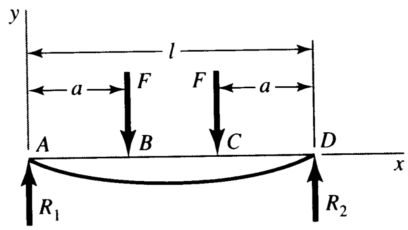
$$\frac{S_{uts}}{n} = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{341 \cdot 10^6}{2} = \frac{296{,}83[N \cdot m] \cdot D/2}{\frac{\pi \cdot D^4}{64}} \quad (7)$$

Despejando para D, se obtiene que

$$D = 0{,}026[m] \Rightarrow D = 26[mm] \quad (8)$$

Parte b) (1.5 pts.)

El eje del sistema se puede modelar de la siguiente forma, para simplificar el problema:



$$R_1 = R_2 = F \quad V_{AB} = F \quad V_{BC} = 0$$

$$V_{CD} = -F$$

$$M_{AB} = Fx \quad M_{BC} = Fa \quad M_{CD} = F(l-x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fx}{6EI}(x^2 + 3a^2 - 3la)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa}{6EI}(3x^2 + a^2 - 3lx)$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{Fa}{24EI}(4a^2 - 3l^2)$$

Figura 2: Diagrama de Momentos y Fórmulas Aplicables al Modelo.

Dada la simetría del sistema, $R_1 = R_2$. Además se tiene que la carga combinada entre la batea de acero inoxidable y la masa es de 200 [kg] $\Rightarrow$ la fuerza ejercida sobre el eje es $F = g \cdot m = 9{,}8 \cdot 200 = 1960[N]$. Gracias a la simetría, $R_1 = R_2 = F/2 \Rightarrow R_i = 980[N]$

El momento flector máximo en el eje se calcula aplicando los valores recién descritos a las fórmulas que se muestran arriba. De esta forma, se tiene que $M_{max} = F \cdot a = 980[N] \cdot 20[mm] = 19{,}6[N \cdot m]$.

El par de torsión máximo en el eje se da por efecto de la potencia que entrega el motor al eje. De la parte anterior, se sabe que este par de torsión es $T_{max} = 1187{,}33[N \cdot m]$.

Con estos valores es posible calcular el diámetro mínimo del eje sin considerar efectos de fatiga utilizando la siguiente expresión:

$$d_{min} = [(\frac{32 \cdot n}{\pi \cdot S_{uts}}) \cdot \sqrt{M_{max}^2 + T_{max}^2}]^{1/3} \tag{9}$$

Evaluando y considerando un factor de diseño $n = 2$, se obtiene que el diámetro mínimo a considerar es el siguiente:

$$d_{min} = 0{,}04139[m] \Rightarrow d_{min} = 41{,}39[mm] \tag{10}$$

Parte c) (3 pts.) **NOTA: En sta sección, las fórmulas utiliazdas dependen de la versión del libro de Shigley consultada. Esto está tomado en cuenta en la corrección. Estas fórmulas corresponden a la Sexta Edición del texto.**

En este caso, se deben considerar los siguientes factores:

1. Terminación superficial
2. Tamaño
3. Confiabilidad
4. Concentración de Esfuerzos, tanto por perforación como por entalle
5. Carga

Entonces, la resistencia del material a utilizar para determinar el diámetro de la pieza será:

$$S_i = \prod_i k_i \cdot S_{ut} \tag{11}$$

Procedamos con los cálculos. Para estos efectos, supondremos el mismo acero SAE 1018 y $d_{fatiga} = 75[mm]$. En general, todas las fórmulas presentadas en el texto están pensadas para ser aplicadas con las unidades directamente en [MPa] y [mm], por lo tanto convertir unidades es un error.

Factor de terminación superficial

$$k_a = a \cdot S_{uts}^b \tag{12}$$

En este caso, $S_{uts} = 341[MPa]$ y de acuerdo con el tipo de terminación (maquinado), los factores a y b valen 4.51 y -0.265, respectivamente. Evaluando, se tiene

$$k_a = 0{,}948812 \tag{13}$$

Factor de tamaño

Aquí se debe suponer un diámetro a fatiga. Como ya se mencionó, se supondrá un diámetro mínimo de $75[mm]$ y, por suponer un valor entre 51 y 254 [mm], el valor se calcula como

$$k_b = 0{,}859 - 0{,}000837 \cdot d \tag{14}$$

Se tiene, entonces,

$$k_b = 0{,}796225 \tag{15}$$

Factor de confiabilidad

Este valor sale directamente de la tabla de confiabilidad que se muestra en los apuntes. Por ello, el factor es $k_c = 0{,}868$

Factor de carga

Este factor dpara flexión vale 1 por definición y no hay carga axial, por lo que sólo vale el factor para torsión, que se calcula de la siguiente forma:

$$k_d = 0{,}258 \cdot S_{ut}^{0{,}125} \tag{16}$$

Por lo tanto, se tiene que este factor vale

$$k_d = 0{,}534827 \tag{17}$$

Factor de concentración de esfuerzos por perforaciones

Aquí nuevamente se debe utilizar el diámetro supuesto. Además, el factor K_{ts} depende de la relación entre el diámetro del eje y el diámetro de la perforación. Este último se considera el diámetro de la sección circular de la paleta antes calculada. Entonces, $d/D = 26/75 = 0{,}34666$. Este valor se escapa de los valores mostrados por Shigley, pero extrapolando se encuentra una valor para $K_{ts}(d/D) = 2{,}65$. El valor de $\sqrt{a} = 174/S_{uts} = 0{,}5102639$ sale de una tabla y posteriormente se procede a calcular lo siguiente.

$$K_{fs} = \frac{K_{ts}}{1 + \frac{2}{\sqrt{r}} \cdot \frac{K_{ts}-1}{K_{ts}} \cdot \sqrt{a}} \tag{18}$$

A continuación, se calcula el valor del factor de la siguiente manera.

$$k_{fs} = \frac{1}{K_{fs}} \tag{19}$$

Reemplazando los valores antes mencionados, se obtiene que

$$k_{fs} = 0{,}4438621 \tag{20}$$

Factor de concentración de esfuerzos por entalle

Este factor se calcula de manera análoga al factor por perforación.En este caso, se utiliza la relación d/D entre las secciones de eje principal y rebajada, además de la relación r/d entre el radio del entalle y la sección menor del eje. La sección menor del eje es 6[mm] menor que el eje calculado, es decir de 69 [mm]. Estas relaciones, entonces, cobran los siguientes valores: $r/d = 0{,}0434 \wedge D/d = 1{,}086$. De la tabla, extrapolando nuevamente, entonces, $K_{ts} = 1{,}075$ (valor estimado). Por tratarse de un entalle, $\sqrt{a} = 139/S_{uts} = 0{,}407$. Entonces, realizando un cálculo análogo al anterior, se deduce que este factor vale:

$$k_{fe} = 0,96077994 \tag{21}$$

Por lo tanto se tiene que la pitatoria de factores es como sigue:

$$\prod k_i = 0{,}948812 \cdot 0{,}796225 \cdot 0{,}868 \cdot 0{,}534827 \cdot 0{,}4438621 \cdot 0{,}96077994 = 0{,}1495619 \tag{22}$$

Teniendo esto en cuenta, se calcula S_e:

$$S_e = 51[MPa] \tag{23}$$

Entonces, reutilizando la fórmula de Sodelberg para calcular el diámetro mínimo considerando S_e y un factor de diseño $n = 2$ se tiene que

$$d_{min,fatiga} = 77{,}98[mm] \tag{24}$$

Con esto se puede concluir que la suposición inicial de $d_{min} = 75[mm]$ era bastante acertada.

Darren Ledermann M.
19 de Abril de 2005
Si encuentran errores, favor avisar a dlederma@cec.uchile.cl