Problema 2

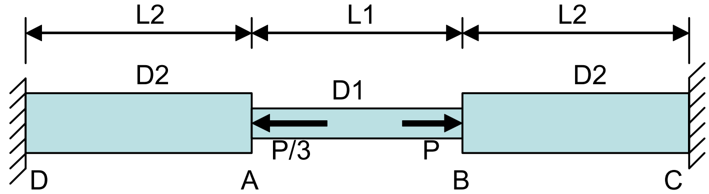

figura 1: problema 2

La barra compuesta de la figura 1 consiste en un segmento AB de acero de diámetro D1 y de largo L1 y de dos segmentos DA y BC de aluminio de diámetro D2 y largo L2. Si en la sección ubicada en B se aplica una carga axial P hacia la derecha y en la sección en A una carga P/3 hacia la izquierda, determine el esfuerzo normal en cada segmento y el cambio de la longitud del tramo central, es decir, ΔL1. Considere conocidos los módulos de elasticidad de los materiales.

Solución

Sumatoria de fuerzas:

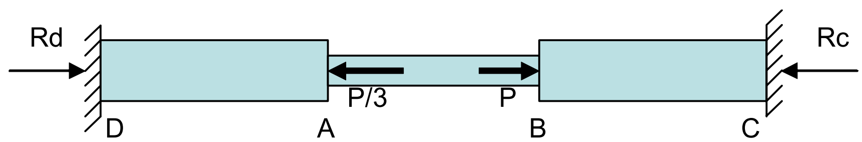

figura 2: DCL

$$\sum F_x = 0$$

$$R_D + P - R_C - \frac{P}{3} = 0 \qquad (1)$$

Se resolverá por superposición, primero sacando la reacción Rc y luego sacando la fuerza P/3.

a)

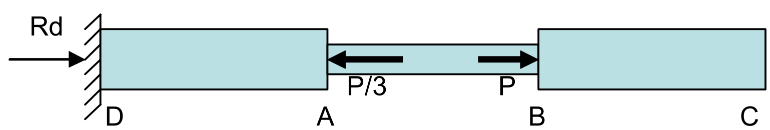

figura 3: sin la reacción en C

$$\delta_{ADa} = -\frac{\frac{P}{3}\cdot L_2}{A_2\cdot E_{aluminio}} + \frac{P\cdot L_2}{A_2\cdot E_{aluminio}} \qquad \delta_{ABa} = \frac{P\cdot L_1}{A_1\cdot E_{acero}} \qquad \delta_{BCa} = 0$$

$$\delta_a = -\frac{\frac{P}{3}\cdot L_2}{A_2\cdot E_{aluminio}} + \frac{P\cdot L_2}{A_2\cdot E_{aluminio}} + P\cdot\frac{L_1}{\left(A_1\cdot E_{acero}\right)} + 0$$

$$\delta_a = \frac{1}{3}\cdot P\cdot\frac{\left(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + 3\cdot L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio}\right)}{\left(A_2\cdot E_{aluminio}\cdot A_1\cdot E_{acero}\right)} \qquad (2)$$

b)

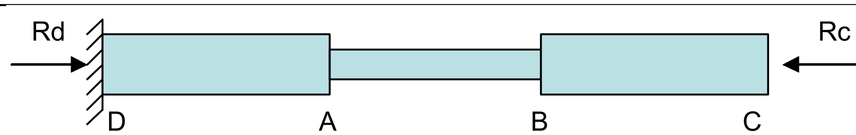

figura 4: sin la fuerza P/3 y P

$$\delta_{BCb} = -\frac{R_C \cdot L_2}{A_2 \cdot E_{aluminio}} \qquad \delta_{ABb} = -\frac{R_C \cdot L_1}{A_1 \cdot E_{acero}}$$

$$\delta_{ADb} = -\frac{R_C \cdot L_2}{A_2 \cdot E_{aluminio}}$$

$$\delta_b = \delta_{BCb} + \delta_{ABb} + \delta_{ADb}$$

$$\delta_b = -2 \cdot R_C \cdot \frac{L_2}{\left(A_2 \cdot E_{aluminio}\right)} - R_C \cdot \frac{L_1}{\left(A_1 \cdot E_{acero}\right)}$$

$$\delta_b = -R_C \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(A_2 \cdot E_{aluminio} \cdot A_1 \cdot E_{acero}\right)} \qquad (3)$$

Además sabemos por compatibilidad geométrica que la suma de los desplazamientos deben ser 0.

$$\delta = \delta_a + \delta_b \qquad \delta = 0 \qquad \delta_a = -\delta_b \qquad (4)$$

(2) y (3) en (4)

$$\frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + 3 \cdot L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(A_2 \cdot E_{aluminio} \cdot A_1 \cdot E_{acero}\right)} = R_C \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(A_2 \cdot E_{aluminio} \cdot A_1 \cdot E_{acero}\right)}$$

$$R_C = \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + 3 \cdot L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)} \qquad (5)$$

(5)en (1)

$$R_D + \frac{2}{3} \cdot P - \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + 3 \cdot L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)} = 0$$

$$R_D = \frac{-1}{3} \cdot P \cdot \frac{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} - L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)}{\left(2 \cdot L_2 \cdot A_1 \cdot E_{acero} + L_1 \cdot A_2 \cdot E_{aluminio}\right)} \qquad (6)$$

Los esfuerzos en cada segmento son:

$$\sigma_{AD} = \frac{R_D}{A_2} \qquad \sigma_{AD} = \frac{-1}{3}\cdot P\cdot\frac{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} - L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})}{\left[(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})\cdot A_2\right]} \qquad (7)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{R_D}{A_1} - \frac{\frac{P}{3}}{A_1} \qquad \sigma_{AB} = \frac{-4}{3}\cdot P\cdot L_2\cdot\frac{E_{acero}}{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})} \qquad (8)$$

otra forma:

$$\sigma_{AB} = -\frac{P}{A_1} + \frac{R_C}{A_1} \qquad \sigma_{AB} = \frac{-4}{3}\cdot P\cdot L_2\cdot\frac{E_{acero}}{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})} \qquad (8)$$

$$\sigma_{BC} = \frac{R_C}{A_2} \qquad \sigma_{BC} = \frac{1}{3}\cdot P\cdot\frac{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + 3\cdot L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})}{\left[(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})\cdot A_2\right]} \qquad (9)$$

La variación de longitud del tramo central:

$$\delta_{AB} = \delta_{ABa} + \delta_{ABb} \qquad \delta_{AB} = P\cdot\frac{L_1}{(A_1\cdot E_{acero})} - R_C\cdot\frac{L_1}{(A_1\cdot E_{acero})}$$

$$\delta_{AB} = P\cdot\frac{L_1}{(A_1\cdot E_{acero})} - \frac{1}{3}\cdot P\cdot\frac{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + 3\cdot L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})}{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})}\cdot\frac{L_1}{(A_1\cdot E_{acero})}$$

$$\delta_{AB} = \frac{4}{3}\cdot P\cdot L_1\cdot\frac{L_2}{(2\cdot L_2\cdot A_1\cdot E_{acero} + L_1\cdot A_2\cdot E_{aluminio})} \qquad (10)$$