TAREA3 Parte 1 Medida

I. Construcción de medidas de probabilidad en productos arbitrarios

Sea (E, Θ) un espacio topológico que supondremos separado y separable, y $\Sigma := \sigma(\Theta)$ la σ-álgebra boreliana.

Sea T un conjunto arbitrario de índices. Dado $S \subset T$, denotamos por $E^{\otimes S}$ el espacio producto (es decir, de funciones $x : S \to E$) y para $S \subset S' \subset T$, $\pi_S^{S'} : E^{\otimes S} \to E^{\otimes S'}$ denotará la proyección.

Sea $S \subset T$ finito y $\Sigma^{\otimes S}$ la $\sigma-$álgebra producto en $E^{\otimes S}$ (que coincide con los borelianos del espacio producto si E es separable).

1) Para cada $S \subseteq T$, denotaremos por Σ_S la familia de subconjuntos de E^T

$$\Sigma_S := \{A_S \times E^{T \setminus S} : A_S \in \Sigma^{\otimes S}\}$$

que llamaremos *cilindros con base en* S.

Definimos

$$\Sigma^* = \bigcup_{S \text{ finito}} \Sigma_S \quad \text{y} \quad \Sigma^{\otimes T} := \sigma(\Sigma^*).$$

a) Muestre que es Σ^* un álgebra, y que $\Sigma^{\otimes T} = \bigcup_{S \text{ numerable}} \Sigma_S$.

b) Compare $\Sigma^{\otimes T}$ con los borelianos de $E^{\otimes T}$ y muestre que ambas tribus coinciden ssi T es numerable.

Def.: Una *familia de leyes finito-dimensionales* es una familia de medidas de probabilidad

$$\{\mu_S\}_S$$

indexada por los subconjuntos *finitos* $S \subset T$, tal que para cada S,

$$\mu_S : \Sigma^{\otimes S} \to [0, 1]$$

es una medida de probabilidad en el espacio $E^{\otimes S}$.

2) Sea $\mathbf{P} : \Sigma^{\otimes T} \to [0, 1]$ una medida de probabilidad. La familia

$$\mathbf{P}_S := \mathbf{P} \circ (\pi_S^T)^{-1}, \quad S \subset T \text{ finito}$$

se llama familia de "leyes finito-dimensionales de $\mathbf{P}$".

a) Muestre que se tiene la condición

$$\textbf{(C)} \qquad \forall S \subset S' \text{ finitos }, \quad \mathbf{P}_S(A) = \mathbf{P}_{S'}(A \times E^{S' \setminus S}) \quad \text{para todo } A \in \Sigma^{\otimes S}$$

b) Pruebe que $\mathbf{P}$ está determinda de manera única por sus leyes finito-dimensionales.

La condición **(C)** se llama *condición de consistencia de Kolmogorov.*

3) Supondremos que $\{\mu_S\}_S$ es una familia de leyes finito-dimensionales, que satisface la siguiente condición de regularidad interior por compactos para todo $S \subset T$ finito:

$$\textbf{(R)} : \quad \forall A \in \Sigma^{\otimes S} \text{ se tiene } \mu_S(A) = \sup\{\mu_S(K) : K \subset A \text{ es un compacto de } E^{\otimes S}\}$$

Se probará a continuación el **Teorema de consitencia de Kolmogorov**: Si $\{\mu_S\}_S$ es una familia de leyes finito-dimensionales que satisfacen **(C)** y **(R)**, entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbf{P} : \Sigma^{\otimes T} \to [0,1]$ tal con familia de leyes finito-dimensionales $(\mathbf{P}_S)$ igual a $(\mu)_S$.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n \subset T$ un subconjunto finito y $K_n \subset E^{\otimes S_n}$ un compacto no vacío. Sean $C_n := K_n \subset E^{T \setminus S_n}$ y $T' := \bigcup_n S_n$.

Para $t \in T'$, definamos $n(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : t \in S_n\}$, y $K_t := \pi_{\{t\}}^{S_{n(t)}}(K_{n(t)})$. Muestre que

$$\bigcap_n C_n = \left[\bigcap_n \left((K_n \cap \prod_{t \in S_n} K_t) \times \prod_{t \in T' \setminus S_n} K_t\right)\right] \times E^{T' \setminus T}$$

b) Suponga que $\bigcap_n C_n = \emptyset$. Pruebe que exite $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left[\bigcap_{n=1}^{N} \left((K_n \cap \prod_{t \in S_n} K_t) \times \prod_{t \in \bigcup_{k=1}^{N} S_k \setminus S_n} K_t)\right)\right] \times \prod_{t \in T' \setminus \bigcup_{k=1}^{N} S_k} K_t = \emptyset.$$

Muestre que

$$\bigcap_{n=1}^{N} (K_n \times \prod_{t \in \bigcup_{k=1}^{N} S_k \setminus S_n} E) \subset \bigcap_{n=1}^{N} \left((K_n \cap \prod_{t \in S_n} K_t) \times \prod_{t \in \bigcup_{k=1}^{N} S_k \setminus S_n} K_t)\right) = \emptyset$$

y concluya que

$$\bigcap_{n=1}^{N} C_n = \emptyset.$$

c) Pruebe el siguiente **Lema**: Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de partes de X y $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ una función aditiva. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ una clase tal que para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq A\}.$$

Suponga que $\mathcal{C}$ tiene la siguiente propiedad: Para toda subfamilia numerable $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \bigcap_{n=0}^{k} C_n = \emptyset.$$

Pruebe que $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ es una medida.

d) Utilizando el lema y la parte *a)*, pruebe el teorema de consistenicia de Kolmogorov

Nota: Note que el teorema es cierto si cada ley finito-diemensional μ_S es una medida de probabilidad regular sobre $E^{\otimes S}$. En particular, la condición **(R)** siempre se satisface si $E = \mathbb{R}^d$ (porqué?).

II. Regularidad de medidas finitas en un espacios métricos separables completos
Sea (E, d) un espacio métrico. En la Tarea 2 se probó que para todo boreliano A y para todo $\varepsilon > 0$, existen un abierto θ y un cerrado F tal que $\nu(\theta\backslash A) < \varepsilon$ y $\nu(A\backslash F) < \varepsilon$. Si el espacio (E, d) es σ-compacto, se probó que entonces ν es regular. Observe que sin esta hipótesis, la aproximación interior por cerrados y exterior por abiertos antes dicha sigue siendo válida (la demostración es la misma).
En esta pregunta se probabará que si, en vez de suponer que (E, d) es σ-compacto, suponemos que es un **espacio métrico completo separable** (también llamado "espacio polaco"), entonces también se tiene que la medida finita ν es regular.
Para ello, consideraremos (z_n) una sucesión densa en E y definimos

$$D_N^p := \bigcup_{n=1}^{N} B(z_n, \frac{1}{p}).$$

a) Sea $\varepsilon > 0$. Pruebe que para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $N_p \in \mathbb{N}$ tal que, para $K_\varepsilon := \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{D_{N_p}^p}$ se tiene

$$\nu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

b) Se probará ahora que K_ε es compacto. Verifique primero que $K_\varepsilon := \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{N} \bar{B}(z_n, \frac{1}{p})$. Considere luego una suceción $(y_n) \subseteq K_\varepsilon$.

   Pruebe que exite una subsucesión (w_n) de (y_n) y una subsuceción $(z_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ de (z_n) tal que para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$w_n \in B(z_{n_p}, \frac{1}{p}) \text{ para todo } n \geq p$$

   y deduzca la compacidad de K_ε.

c) Pruebe que para todo A boreliano de E y para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K tal que $\nu(A\backslash K) \leq \varepsilon$. Concluya el resultado.

   Nota: Así, el teorema de consitencia de Kolmogorov también se aplica al caso en que E es un espacio métrico separable completo.