ANALISIS

Ejercicios Propuestos
5 de mayo de 2005

Pregunta I Problemas

1. Pruebe que si f es medible son equivalentes en un espacio de medida finita (X, τ, μ) que f sea integrable y que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu \{x \quad \text{tq} \quad k \leq |f| < k+1\} < \infty$$

2. Supongamos que $a_n \geq 0$ y que la serie de potencias $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia 1. Pruebe que

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n$$

3. Determine el rango de p para el cual $f(x) = e^{-x^p \operatorname{sen}^2 x}$ es integrable en $[0, \infty)$.

4. Consideramos $(X, \mathbf{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f \in L^\infty$ una función positiva tal que $0 < \|f\|_\infty$. Se definen $\alpha_n = \int (f(x))^n d\mu(x)$. Pruebe que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty .$$

5. Sea $(X, \mathbf{F}, \mu)$ espacio de medida finita. Decimos que una familia $\{f_n \;\; n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(X, \mathbf{F}, \mu)$ es uniformemente integrabl si

$$\lim_{a \to \infty} \sup_n \int \mathbb{1}_{\{|f_n| > a\}} |f_n| d\mu = 0$$

   a) Supongamos que existe $p > 1$ tal que $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Pruebe que $\{f_n \;\; n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

b) Supongamos que existe $f \in L^1(X, \mathbf{F}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq f \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

c) Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en medida, es decir, $\forall \varepsilon > 0 \ \mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si además $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces pruebe que

$$\int |f_n| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indicación: descomponga la integral en tres, donde $|f_n| > a$, donde $\varepsilon \leq |f_n| \leq a$ y $|f_n| < \varepsilon$.

6. Consideremos $(X, \mathbf{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Supongamos que g es una función medible que verifica

$$\forall f \in L^p \text{ se tiene que } fg \in L^p.$$

Demuestre que $g \in L^\infty$.

7. Sea (X, τ, μ) espacio de medida (no necesariamente finita)

a) Sean $r, s \in [1, \infty]$ con $r < s$ y $t \in [s, r]$. Pruebe que

$$\|f\|_t \leq \|f\|_s^\alpha \|f\|_r^\beta$$

con $\alpha = \frac{r^{-1}-t^{-1}}{r^{-1}-s^{-1}}$ y $\beta = \frac{t^{-1}-s^{-1}}{r^{-1}-s^{-1}}$

b) En esta parte y la siguiente supondremos que para cierto $p_0 \in [1, \infty)$ se tiene $f \in L^{p_0}$.

Pruebe que si $M > 0$, entonces $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq M \liminf_{p\to\infty} (\mu\{|f| > M\})^{\frac{1}{p}}$.

Concluir que $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

c) Usando *a*), demuestre que $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ y concluya que $\lim_p \|f\|_p = \|f\|_\infty$

8. Sea (X, d) un espacio métrico tal que X es σ-compacto. Sea (X, β, μ) un espacio de medida finita, con β la σ-algebra boreliana. Pruebe que μ es regular. Para ello, considere la topología del espacio, Θ, y estudie el conjunto

$$S = \left\{ A \in \mathbf{B}(X) \ : \ \mu(A) = \inf_{A\subseteq\theta\in\Theta} \mu(\theta); \ \mu(A) = \sup_{F\subseteq A, F^c\in\Theta} \mu(F) \right\}.$$

Problema 2 *Funciones a variación finita y absolutamente continuas*
Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que F es a *variación finita* (v.f.)si para cada cada par a, b de reales con $a \leq b$ la cantidad

$$V_F(a,b) = \sup \sum_{i=1}^{n} |F(x_{i+1}) - F(x_i)|$$

es finita, donde el supremo es sobre todas las subdivisiones finitas $x_0 = a < x_1 < \ldots x_n = b$ de $[a, b]$.
Diremos que F es a variación acotada si $\sup_{a \leq b} V_F(a,b) = \lim_{a \to -\infty, b \to \infty} V_F(a,b)$ es finito.

1) a) Muestre que F Lipschitz y F creciente son v.f.

   b) Muestre que para a fijo y F v.f, las funciones $V_F(a,x) + f(x)$ y $V_F(a,x) - f(x)$ son monótonas. Concluya que F es a variación finita ssi es diferencia de funciones crecientes (en particular, F v.f es medible, y tiene discontinuidades numerables).

   c) Muestre que si $F(x)$ es v.f. y continua a la derecha, entonces $V_F(a,x)$ también lo es.

2) a) Sea $\mu : \beta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una medida con signo finita. Muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ la *función de distribución* definida por $F(x) = \mu(a, x]$ si $x \geq a$, $F(a) = 0$ y $F(x) = -\mu(x, a]$ es a variación acotada. (Notar que si μ es positiva, entonces se tiene $\mu = \mu_F$ es la medida de Stieltjes asociada a F.) Recíprocamente, pruebe que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es v.f. continua a la derecha, entonces para cada intervalo $[a, b]$ existe una unica medida con signo finita $\mu : \beta([a, b]) \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(a) = F(a) - F(a-)$ y $\mu = \mu_F$.

   b) Pruebe que si μ es medida con signo finita (en $\beta(\mathbb{R})$ o $\beta([a, b])$), y F la función v.f. asociada, entonces
   $$|\mu| = \mu_{V_F}$$
   (donde V_F es la función creciente $V_F(a,x)$ o $V_F(-\infty, x)$. Para esto, considere $G(x) = |\mu|((a, x])$ la función de distribución de la medida positiva $|\mu|$. Muestre que $G(x) \geq V_F(a,x)$. Luego pruebe que $|\mu|(I) \leq \mu_{V_F}(I)$ para todo intervalo abierto $I \subset (a, \infty)$. Deduzca esta desigualdad para to abierto y usando regularidad, para todo Boreliano. Concluya que $G(x) \leq V_F(a,x)$.

3) Diremos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* (a.c) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda familia finita (a_i, b_i) de intervalos abiertos disjuntos,

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \quad \sum_i |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \varepsilon$$

   a) Pruebe que si F es a.c entonces es uniformemente continua y v.f.

b) Pruebe que F es a.c. ssi es v.f. y $|\mu_F|$ es absolutmante continua c/r a la medida de Lebesgue λ.

Para probar $\Rightarrow$, considere un boreliano E con $\lambda(E) = 0$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ correspondiente como en la def. de a.c. Prube que existen abiertos $U_1 \supseteq U_2 \supset \dots E$ t.q. $\lambda(U_1) < \delta$ y $\mu_F(U_j) \to \mu_F(E)$.

Muestre que $|\mu_F(U_j)| < \varepsilon$ (Recuerde que U_j es unión numerable disjunta de intervalos abiertos). Concluya el resultado.

c) Si F es a.c, de una expresión de F en términos de $\frac{d|\mu_F|}{d\lambda}$.

Pregunta 3 Sea (X, τ) espacio medible. Denotamos por $\mathcal{M}$ es espacio de medidas con signo finitas $\nu : \tau \to \mathbb{R}$.

a) Pruebe que para todo $\nu \in \mathcal{M}$ y $A \in \tau$ se tiene $\nu(A) = \int_A h d|\nu|$, con $|h| \leq 1$ $|\nu|$–c.t.p. (puede probar que para toda partición (A_i) de $E_r := \{|h| \leq r\}$ se tiene $\sum_i |\nu(A_i)| \leq r|\mu|(E_r)$.)

b) Definimos la *norma de variación total* de $\nu \in \mathcal{M}$ por $\|\nu\| := |\nu|(X)$. Pruebe que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ es e.v normado.

c) Dada un medida (positiva) finita $\mu : \tau \to \mathbb{R}_+$, pruebe que la aplicación que $f \in L^1(\mu)$ le asocia la medida con signo definda por $\nu(A) = \int_A f d\mu$ es una isometría de $L^1(\mu)$ en $\mathcal{M}$. Deduzca que $\mathcal{M}$ es completo (Ind: dada ν_n una suceción, entonces si $\mu := \sum_n \frac{|\nu|}{2^n \|\nu_n\|}$, se tiene $\nu_m << \mu$ para todo $m \in \mathbb{N}$.)

d) Pruebe que $|\nu|(A) = \sup\{\int_A f d\nu : |f| \leq 1\}$.

Pregunta 4 Sean (X_i, τ_i), $i = 1, 2$. espacios medibles y ν_i, μ_i medidas σ-finitas sobre (τ_i).

a) suponga que $\nu_i << \mu_i$. Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 << \mu_1 \otimes \mu_2$ y que

$$\frac{\partial(\nu_1 \otimes \nu_2)}{\partial(\mu_1 \times \mu_2)} = \frac{\partial \nu_1}{\partial \mu_1} \frac{\partial \nu_2}{\partial \mu_2} \quad \mu_1 \otimes \mu_2 \ c.t.p$$

b) Probar que $\nu_1 \coprod \mu_1$ o $\nu_2 \coprod \mu_2$ implica $\nu_1 \otimes \nu_2 \coprod \mu_1 \otimes \mu_2$

c) Sea $\nu_1 \otimes \nu_2 = (\nu_1 \otimes \nu_2)_a + (\nu_1 \otimes \nu_2)_s$ la descompoaición de Lebesgue de $\nu_1 \otimes \nu_2$ c/r a $\mu_1 \otimes \mu_2$.Probar que $(\nu_1 \otimes \nu_2)_a = (\nu_1)_a \otimes (\nu_2)_a$ y $(\nu_1 \otimes \nu_2)_s = (\nu_1)_s \otimes (\nu_2)_s$, donde $\nu_i = (\nu_i)_a + (\nu_i)_s$ es la descomposición de ν_i c/r a μ_i.

Pregunta 5 *Función Maximal de Hardy-Littlewood y derivada de Lebesgue*
En esta pregunta se denotará indistintamente por λ o por dx la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Medibilidad será siempre c/r a las tribus de Lebesgue.

1) Sea $\mathcal{C}$ una familia de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ y $U = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. Sea $c < \lambda(U)$. Se probará que existe bolas disjuntas $B_1, \ldots, B_k$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda(B_i) > 3^{-n}c$.

   a) Muestre que existe un compacto $K \subseteq U$ y una cantidad finita de bolas $A_1, \ldots A_m \in \mathcal{C}$ tales que $\lambda(K) > c$ y $K \subseteq \cup_{j=1}^m A_j$.

   b) Defina B_1 como la bola A_j con mayor radio, y recursivamente, B_{i+1} como la bola de mayor radio entre las A_j que son disjuntas de $B_1, \ldots B_i$, y asíhasta que ya no se pueda continuar el proceso. Muestre que si para cierto $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene A_j no es ninguna B_i, entonces existe $i(j)$ tal que $A_j \cap B_{i(j)} \neq \emptyset$ y $A_j \subseteq B^*_{i(j)}$ donde $B^*_{i(j)}$ es la bola concéntrica a $B_{i(j)}$ de radio tres veces mayor. Concluya la desigualdad buscada.

2) Una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *localemte integrable* si $\int_K |f(x)|dx < \infty$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

   Para f localmente integrable, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ definimos

$$A_r f(x) := \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

   donde $B(x,r)$ es la bola de centro x y radio r.

   a) Pruebe que para cada $r > 0$, $A_r f$ es medible en x (Ind.: muestre que $A_r f(x) = \sigma r^n \int_{\mathbb{R}^n} g_r(x,y)f(y)dy$ para cierta constante $\sigma > 0$ y cierta función medible $g_r : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.)

   b) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $A_r f(x)$ es continua como función de r. Deduzca que la *función maximal de Hardy-Littlewood* Hf, definda por

$$Hf(x) := \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

   es medible en x.

   c) Pruebe el **Teorema maximal**: Existe $C > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ y toda f integrable,

$$\lambda(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)|dx.$$

   Para ello, se sugiere definir $E_\alpha := \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Muestre que para cada $x \in E_\alpha$ existe $r_x > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha} \int_{B(x,r_x)} f(y)dy > \lambda(B(x,r_x))$ y considere la familia de bolas $\{B(x,r_x)\}_{x\in E_\alpha}$ y $c < \lambda(E_\alpha)$ cualquiera.

3) Se probará que para todo f localmente integrable, $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)\ dx - c.t.p.$

a) Pruebe el resultado pirmero para g continua integrable.

b) Considere f integrable y una función g como antes a distancia ε de f en norma p (porque existe?). Defina $D_\alpha = \{x : \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\}$ y $F_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}$. De una mayoración para $\lambda(F_{\frac{\alpha}{2}})$ y pruebe que

$$\lambda(D_\alpha) \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \frac{2C\varepsilon}{\alpha}.$$

c) Concluya el resultado para f integrable y luego para f localmente integrable.