

### Problema 1

- a) El estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  es  $\hat{\theta} = \max(x_i)$ , es decir 8.  
b) Un test  $\chi^2$  de ajuste permite responder a la pregunta: El resumen de los cálculos esta en la tabla adjunta. El estadístico del test sigue aproximadamente una  $\chi^2_6$  ya que es un parámetro  $\theta$ . El estadístico aquí es 80,176. Luego se rechaza  $H_0$  si los datos siguen una distribución uniforme.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$f_i$	71	133	129	169	130	146	157	65	1000
$np_i$	125	125	125	125	125	125	125	125	1000
$f_i - np_i$	-54	8	4	44	5	21	32	-60	0
$(f_i - np_i)^2$	2916	64	16	1936	25	441	1024	3600	
	23,328	0,512	0,128	15,488	0,2	3,528	8,192	28,8	80,176

- c) El p-valor es más pequeño que 0.05.  
d)  $F(x) = \frac{x}{\theta}$ .  
e) Si la distribución es uniforme esperamos del gráfico  $(x, F_n(x))$  muestra algo cercano a una recta.  
f) Aquí se ve algo muy parecido a una recta. La pendiente de la recta se obtiene con un par de puntos (se puede usar también los puntos de la tabla): con los puntos de  $(0,0)$  y  $(8,1)$  obtenemos la recta  $y = \frac{1}{8}x$ . Hay un test  $\chi^2$ .

### Problema 2

- a) Para probar si existen diferencias se utiliza un test ANOVA

**NOTA:** Ojo que se está utilizando una fórmula de varianza insesgada (con n-1)

Por un lado se tiene que  $W^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = (5-1)*(20,9+7,83+19,9) = 194,53$ .

El promedio total de las observaciones es  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^3 n_j \bar{y}_j = 5*(53,82+52,78+58,34)/15 = 54,98$ .

Por otro lado  $B^2 = \sum_{j=1}^3 n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = 5*[(52,82-54,98)^2 + (52,78-54,98)^2 + (58,34-54,98)^2] = 5*((-1,16)^2 + (-2,2)^2 + (3,36)^2) = 87,38$

OTRA MANERA:  $B = T - W = 14*20,136 - 194,53 = 87,37$

Completamos la tabla ANOVA:

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	P-Valor	Valor crítico para F
Entre grupos (B)	87,38	2	43,69	2,695	0,11	3,89
Dentro de los grupos (W)	194,53	12	16,21			
Total (T)	281,91	14				

Como el P-Valor es mayor al 5% (e incluso al 10%), no se rechaza la hipótesis de que no hay diferencias entre los catalizadores.

b) Si incorporamos el grupo de control se tiene que

$$W^2 (\text{total}) = W^2 (\text{catalizadores}) + W^2 (\text{control}) = 194,53 + 4 \cdot 2,48 = 204,45$$

El promedio total de las observaciones es  $\bar{y} = (3 \cdot 54,98 + 51,44) / 4 = 54,1$

$$B^2 = \sum_{j=1}^4 n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = 5 \cdot [(52,82 - 54,1)^2 + (52,78 - 54,1)^2 + (58,34 - 54,1)^2 + (51,44 - 54,1)^2] = 5 \cdot ((-2,66)^2 + (-0,27)^2 + (-1,31)^2 + (4,25)^2) = 134,37$$

Completamos la tabla ANOVA:

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	P-Valor	Valor crítico para F
Entre grupos (B)	134,37	3	44,79	3,51	0,04	3,24
Dentro de los grupos (W)	204,44	16	12,78			
Total (T)	338,81	19				

Se concluye entonces que si hay diferencias entre los catalizadores y el grupo de control.

c) Para determinar cuál catalizador difiere del grupo de control se lleva a cabo un test t-Student. Es necesario entonces estimar la varianza común sabiendo que hay 4 grupos. La varianza acumulada se puede obtener fácilmente de la tabla ANOVA como el cuadrado medio de la variación intra-grupos, esto es,  $W/n-q$ , luego:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{W}{n-q} = \frac{204,44}{16} = 12,78$$

El estadístico de prueba será entonces:

$$t_i = \frac{\bar{y}_{\text{catalizad}\phi i} - \bar{y}_{\text{control}}}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n_{\text{catalizad}\phi i}} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{n_{\text{control}}}}} = \frac{\bar{y}_{\text{catalizad}\phi i} - \bar{y}_{\text{control}}}{\tilde{\sigma} \sqrt{2/5}} = \frac{\bar{y}_{\text{catalizad}\phi i} - 51,44}{2,25} = \frac{\bar{y}_{\text{catalizad}\phi i} - 51,44}{2,25}$$

El valor crítico de una t-Student a 16 grados de libertad con  $\alpha/2 = 0,025$  es 2,12

Tenemos entonces:  $t_1 = 1,06$        $t_2 = 0,60$        $t_3 = 3,07$

Como  $t_3$  es el único valor tal que  $|t| > 2,12 \Rightarrow$  El catalizador 3 es el único significativamente diferente al grupo de control.

### Problema 3

a) En este caso, dado que  $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{10}{9} > 1$ , las hipótesis se pueden escribir como

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ contra } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

Sabemos que cuando  $H_0$  es cierto entonces  $\frac{n_1 S_1^2}{(n_1 - 1)} * \frac{(n_2 - 1)}{n_2 S_2^2} \square F_{n_1 - 1, n_2 - 2}$  es decir que

$$\frac{130 * S_1^2}{129} * \frac{79}{80 * S_2^2} \square F_{129, 79}$$

Para establecer la región de rechazo para un nivel  $\alpha = 0,05$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right) \leq \alpha \text{ que es equivalente a } P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > \frac{129 * 80}{130 * 79} t_\alpha\right) \leq \alpha \text{ con } t_\alpha \text{ tal que}$$

$$\Rightarrow t_\alpha = 1,40$$

Así, se rechaza  $H_0$  cuando  $\frac{S_1^2}{S_2^2} > \frac{129 * 80}{130 * 79} * 1,40 = 1,41$

Como acepto  $H_0$ . Esto también se puede hacer fijando  $C=1,11$  y buscando  $\alpha$  que cumpla (1), obteniendo un p-valor mayor que 0,05.

b) Las hipótesis son: . contra .

Primero estimamos  $\sigma^2$  por  $S^2 = \frac{(n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{130 * 10 + 80 * 9}{208} = 9,711$

Si  $H_0$  es cierta, entonces  $T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S} * \sqrt{(n_1 + n_2) / (n_1 * n_2)} \square t_{n_1 + n_2 - 2}$

$$P\left(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > \frac{t_\alpha * S}{\sqrt{(n_1 + n_2) / (n_1 * n_2)}}\right) \leq \alpha \text{ con } t_\alpha \text{ tal que } P(t - student_{208} > t_\alpha) \leq 0.05 \Rightarrow t_\alpha = 1,40$$

$$\text{rechazo } H_0 \text{ si } \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > \frac{1,645 * 3,12}{\sqrt{210/10400}} = \frac{5,132}{0,14} = 36,7$$

Como  $30 < 36,7$  entonces acepto  $H_0$ . Esto también se puede hacer fijando  $C=36,7$  y buscando  $\alpha$  que cumpla (1), obteniendo un p-valor mayor que 0,05.

c) p-valor =  $P(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 36,7 \mid \mu_1 = \mu_2) = 0.09$

d)  $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 36,7 \mid \mu_2 - \mu_1 = 10) = 0.115$   $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 36,7 \mid \mu_2 - \mu_1 = 20) = 0.267$ .  
Aumenta la potencia cuando crece la diferencia, lo que es natural.