

### Auxiliar 9 MA34B-03

#### Problema 1

Sea  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2 = 9$  y una muestra de tamaño  $n=36$ . Se construye un test para la hipótesis nula  $H_0 : \mu = 20$  contra la hipótesis alternativa  $H_1 : \mu = 18$ .

1. Dé la región crítica del test más potente para un error  $\alpha = 0.001$  de tipo I.
2. Calcule el error  $\beta$  de tipo II del test.
3. Si  $n=49$ , determine el valor de  $\alpha$  que permita obtener la misma región crítica que en la parte 1. Deduzca  $\beta$ .
- 4 Si  $n=49$  y  $\alpha = 0.001$ , determine el valor de  $\mu$  de la hipótesis alternativa que produce el mismo error  $\beta$  de tipo II que en 2.2.

#### Sol.:

1. La región crítica más potente del test esta dada por el lema de N.P.:

$$P(\bar{x} \leq c | \mu = 20) = 0.001. \text{ Como } \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(N(0,1) \leq 2(c - 20)) = 0.001 \Rightarrow \\ 2(c - 20) = -3.09 \Rightarrow c = 18.455. \text{ La región crítica es entonces: } \boxed{\bar{x} \leq 18.455}.$$

2. El error de tipo II es  $\beta = P(\bar{x} > 18.455 | \mu = 18) = P(N(0,1) > 2(18.455 - 18)) = 0.1814 \Rightarrow$   
 $\boxed{\beta = 0.1814}$

3.

$$\alpha = P(\bar{x} \leq 18.455 | \mu = 20) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 20)/3 \leq \sqrt{n}(18.455 - 20)/3) = P(N(0,1) \leq -3.60) = 0.0 \\ \beta = P(\bar{x} > 18.455 | \mu = 18) = P(N(0,1) > 7(18.455 - 18)/3) = P(N(0,1) > 1.0617) = 0.1442 \\ \boxed{\alpha = 0.0 \text{ y } \beta = 0.1442}$$

4.

Para  $n=49$  y  $\alpha = 0.001$  se obtiene una región crítica:

$$\alpha = P(\bar{x} \leq c | \mu = 20) = P(7(\bar{x} - 20)/3 \leq 7(c - 20)/3) = 0.001. \text{ Es decir } 7(c - 20)/3 = -3.09.$$

Finalmente  $c = 18.676$ . En el punto 2.2  $\beta = 0.1814$ . Si  $n = 49$  y  $\alpha = 0.01$ , el error de tipo II se escribe:

$$\beta = P(\bar{x} > 18.676 | \mu) = P(N(0,1) > 7(18.676 - \mu)/3) = 0.1814. \text{ Es decir que hay que cambiar la hipótesis alternativa por: } \boxed{\mu = 18.286}.$$

## Problema 2

Sea  $X \sim N(\theta, 1)$ , una muestra aleatoria simple de tamaño  $n=100$  y una media muestral  $\bar{x} = 1.2$ . Se efectúan los tests siguientes con un error  $\alpha = 0.05$  de tipo I.

1. Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula  $H_0: \theta = 1$  contra  $H_1: \theta = 1.4$ . Concluir.
2. Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula  $H'_0: \theta = 1.4$  contra  $H'_1: \theta = 1$ . Concluir. Calcule los errores de tipo II para los dos tests en 3.1 y 3.2.
3. Observe que los resultados de los dos tests son contradictorios. Justifique. Encuentre el tamaño  $n$  de muestra mínimo que permite suprimir esta contradicción.
4. Si tomamos  $n=100$  ¿tendremos una contradicción para el nivel de significación  $\alpha = 0.023$ ?

**Sol.:**

1.  $X \sim N(\theta, 1) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$ . En el caso de estas hipótesis simples, el lema de Neyman Pearson nos lleva a una región crítica de la forma  $\bar{x} \geq c$  en donde  $c$  está determinado por el error de tipo I:

$P(\bar{x} \geq c | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(c - 1)) = 0.05$  con  $\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \sim N(0, 1)$ . Las tablas nos dan que  $\sqrt{n}(c - 1) = 1.65 \Rightarrow c = 1 + \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.165 \Rightarrow$  se rechaza  $H_0: \theta = 1$

dado que  $\bar{x} = 1.2$ .

2. En el caso de estas nuevas hipótesis simples, el lema de Neyman Pearson nos lleva a una región crítica de la forma  $\bar{x} \geq c'$  en donde  $c'$  está determinado por el error de tipo I:

$P(\bar{x} \leq c' | \theta = 1.4) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \leq \sqrt{n}(c' - 1.4)) = 0.05$  con  $\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \sim N(0, 1)$ . Las tablas nos dan que  $\sqrt{n}(c' - 1.4) = -1.65 \Rightarrow$

$c' = 1.4 - \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.235 \Rightarrow$  se rechaza  $H'_0: \theta = 1.4$

Observamos que en 3.1 y en 3.2 los resultados son opuestos: se rechaza  $\theta = 1$  en 3.1 y se rechaza  $\theta = 1.4$  en 3.2.

El error de tipo II en 3.1 es igual a:

$$P(\bar{x} < 1.165 | \theta = 1.4) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) < \sqrt{n}(1.165 - 1.4)) = P(N(0, 1) < -2.35) = 0.0094.$$

El error de tipo II en 3.2 es igual a:

$$P(\bar{x} > 1.235 | \theta = 1) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) > \sqrt{n}(1.235 - 1)) = P(N(0, 1) > 2.35) = 0.0094$$

3. Las conclusiones encontradas en 3.1 y 3.2 son opuestas. Para eliminar la contradicción basta tomar  $n$  de manera que la región crítica del test de 3.1 sea  $\bar{x} \geq 1.2$  y la región crítica del test de 3.2 sea  $\bar{x} \leq 1.2$ . Entonces se tiene:  $P(\bar{x} \geq 1.2 | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow$

$$P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(1.2 - 1)) = P(N(0,1) \geq 0.2\sqrt{n}) = 0.05 \Rightarrow 0.2\sqrt{n} = 1.65 \Rightarrow n=68.$$

4. Para el test de 3.1:

$$P(\bar{x} \geq c / \theta = 1) = P(N(0,1) \geq 10(c - 1)) = 0.023 \Rightarrow 10(c - 1) = 2 \Rightarrow c = 1.2$$

Para el test de 3.2

$$P(\bar{x} \leq c' / \theta = 1.4) = P(N(0,1) \leq 10(c' - 1.4)) = 0.023 \Rightarrow 10(c' - 1.4) = -2 \Rightarrow c = 1.2$$

**No hay contradicción.**