

Auxiliar 8 MA34B-03

Anteriormente vimos métodos de estimación puntual, pero no podemos esperar que la estimación coincida exactamente con el verdadero valor del parámetro. Por lo tanto, buscamos construir un intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ tal que la probabilidad de que θ esté en el intervalo sea alta, es decir:

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 1 - \alpha, \quad \text{donde } (1 - \alpha) \text{ es llamado el nivel de confianza.}$$

$$\text{Con } \theta_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \theta_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Distribuciones utilizadas

- T-student

Se forma con una distribución Normal y una Chi-cuadrado .

- Sea $X \rightarrow N(0,1)$ e $Y \rightarrow \chi_n^2$, con X e Y independientes

$$\Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightarrow t_n$$

- Si $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$ y $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n-1}}{S_n} \rightarrow t_{n-1}$$

Problema 1

Sea una m.a.s. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ desconocida. Encuentre el intervalo de confianza para la media considerando los siguientes casos:

- a) σ^2 conocido.
- b) σ^2 desconocido.

Sol.:

Caso a: Debemos buscar una función de distribución conocida que dependa del parámetro desconocido y de los conocidos para despejar la incógnita. En este caso construimos una función Normal.

Buscamos a, b tal que $P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$, como

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(-a \geq -\mu \geq -b) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{x} - b)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow P(z_1 \leq z \leq z_2) = 1 - \alpha$ con $z \rightarrow N(0,1)$, suponiendo intervalo simétrico $z_1 = -z_2$ (este supuesto entrega el intervalo de largo mínimo para un mismo nivel de confianza). Además podemos escribir $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P(z \geq z_1) - P(z \geq z_2)$

$$\Rightarrow P(z \geq z_1) - P(z \geq z_2) = 1 - P(z \leq z_1) - P(z \geq z_2) = 1 - P(z \leq -z_2) - P(z \geq z_2) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(z \geq z_1) - P(z \geq z_2) = 1 - P(z \geq z_2) - P(z \geq z_2) = 1 - 2P(z \geq z_2) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(z \geq z_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Caso b: Si σ^2 es desconocido, debemos buscar una función distribución que dependa de ese parámetro y de otros conocidos. En este caso construimos una t-student.

Buscamos a, b tal que $P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$, como $\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{(n-1)}}{S_n} \rightarrow t_{n-1}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{x} - b)\sqrt{(n-1)}}{S_n} \leq \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{(n-1)}}{S_n} \leq \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{(n-1)}}{S_n}\right) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow P(t_1 \leq t_{n-1} \leq t_2) = 1 - \alpha$, suponiendo intervalo simétrico $t_1 = -t_2$, entonces con el mismo desarrollo de la parte anterior

$$\Rightarrow P(t_{n-1} \geq t_2) = \frac{\alpha}{2}$$

c) Encuentre el intervalo de confianza para la varianza σ^2 , si $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$.

En este caso buscamos a, b tal que $P(a \leq \sigma^2 \leq b) = 1 - \alpha$, como $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2$

$$\Rightarrow P\left(\frac{a}{nS_n^2} \leq \frac{\sigma^2}{nS_n^2} \leq \frac{b}{nS_n^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{nS_n^2}{b} \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{nS_n^2}{a}\right) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow P(u_1 \leq v \leq u_2) = 1 - \alpha$, en este caso como la función Ji-cuadrado no es simétrica, no podemos utilizar el supuesto que $u_1 = -u_2$.

Pero si podemos suponer que $P(v \leq u_1) = P(v \geq u_2) = \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\boxed{\Rightarrow P(v \geq u_2) = \frac{\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad \boxed{P(v \geq u_1) = 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

Problema 2

Sea una m.a.s. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ desconocida y $\sigma^2 = 9$.

- Dé el intervalo de confianza de largo mínimo para un nivel de confianza 0.95
- ¿Qué tamaño mínimo de muestra hay que tomar para tener un intervalo de largo igual o a lo más de 2/5?
- Suponga que X_i tiene una distribución $N(\mu, \nu^2)$, con ν^2 desconocido. Deduzca el intervalo de confianza para μ con $\alpha = 0.05$ tome $n=21$. Determine el largo del intervalo anterior.

Sol.:

$$\text{a) } X_i \rightarrow N(\mu, \sigma^2), \text{ entonces } \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

queremos que $P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha = 0.95$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{x} - b)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow P(z_1 \leq z \leq z_2) = 0.95$$

el intervalo de largo mínimo mas corto es el simétrico, entonces $z_1 = -z_2$

$$\Rightarrow P(z \geq z_2) = \frac{\alpha}{2} = 0.025. \quad \text{De la tabla } N(0,1), \quad z_2 = 1.96$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = 1.96 \quad \Rightarrow a = \bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow b = \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow I_1 = \left[\bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \right], \text{ pero } \sigma = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow I_1 = \left[\bar{x} - \frac{5.88}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{5.88}{\sqrt{n}} \right]$$

b) El largo del intervalo es $L = b - a = \bar{x} + \frac{5.88}{\sqrt{n}} - \bar{x} + \frac{5.88}{\sqrt{n}} = 2 * \frac{5.88}{\sqrt{n}}$

Para que $L \leq \frac{2}{5}$, $\Rightarrow 2 * \frac{5.88}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow 29.4 \leq \sqrt{n} \Rightarrow 864.36 \leq n$

c) Si $X_i \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ y quiero calcular el intervalo de la media, utilizo t-student

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{x} - b)\sqrt{(n-1)}}{S_n} \leq t_{n-1} \leq \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{(n-1)}}{S_n} \right) = 0.95, \text{ suponiendo intervalo simétrico}$$

$$\Rightarrow P(t_{n-1} \geq t_2) = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow t_2 = 2.086$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n-1}}{S_n} = 2.086 \quad \Rightarrow a = \bar{x} - \frac{2.086S_n}{\sqrt{n-1}} \text{ y } b = \bar{x} + \frac{2.086S_n}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow L = b - a = \frac{2 * 2.086 * S_n}{\sqrt{n-1}}$$