MA34B/2 **PAUTA CONTROL 2** **22.10.2001**
Duración: 2:30 horas **N. Lacourly**

PROBLEMA 1

1.1 La razón de verosimilitudes es monótona en la media muestral $\overline{x}$ (o en $\sum_i x_i$):

La función de verosimilitud es: $f_n = \dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} exp(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \mu)^2)$.

Luego la razón de verosimilitudes $\dfrac{f_n(x \mid \mu_1)}{f_n(x \mid \mu_o)} = exp\{-\dfrac{1}{\sigma^2}(2(\mu_o - \mu_1)\sum_i x_i + n(\mu_1^2 - \mu_o^2))\}$

es monótona creciente. El lema de Neyman Pearson para $H_o : \mu = 10$ contra la hipótesis alternativa unilateral $H_1 : \mu < 10$) nos da una región de rechazo de la forma:

$\overline{x} \le c \mid \mu = 10$ con $P(\overline{x} \le c \mid \mu = 10) = 0.05$. Como $\overline{x} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ con $\sigma^2 = 1$ y $n = 100$, bajo

H_o , $z = \sqrt{n}(\overline{x} - \mu)/\sigma = 10(\overline{x} - 10) \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ c verifica $P(z \le 10(c - \mu) \mid \mu = 10) = 0.05$
en donde $z \sim N(0,1)$.

$\Rightarrow$ $10(c - 10) = -1.65$ $\Rightarrow$ la región de rechazo es $\boxed{\{\overline{x} \le 9.835\}}$.

1.2 El p-valor del test es:

$P(\overline{x} \le 9.8 \mid \mu = 10) = P(z \le 10(9.8 - 10)) = P(z \le -0.6667) = \underline{0.0228}$.

Es un p-valor suficientemente pequeño para rechazar $H_o : \mu = 10$. De hecho 9.8 pertenece a la región de rechazo para $\alpha = 0.05$.

1.3 La potencia del test para $\mu = 9$ es:

$$P(\overline{x} \le 9.835 \mid \mu = 9) = P(z \le \frac{\sqrt{n}(9.5 - 9)}{\sigma}) = P(z \le 8.35) = 1 .$$

La potencia del test para $\mu = 9.8$ es:

$$P(\overline{x} \le 9.835 \mid \mu = 9.8) = P(z \le \frac{\sqrt{n}(9.835 - 9.8)}{\sigma}) = P(z \le 0.35) = 0.6368 .$$

1.4 Si $n=120$; $P(z \le \dfrac{\sqrt{n}(9.835 - \mu)}{\sigma} \mid \mu = 10) = P(z \le -1.8075) = \underline{0.0353}$.

PROBLEMA 2

2.1 Un estimador para σ^2 esta dado por: $S^2 = \dfrac{1}{n+m}(nS_1^2 + mS_2^2)$ con $S_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ y

$S_2^2 = \sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2$. Este estimador es sesgado para σ^2 . El estimador insesgado asociado

es: $\boxed{S_*^2 = \dfrac{1}{n+m-2}(nS_1^2 + mS_2^2)}$. Se tiene $\boxed{\dfrac{(n+m-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}}$.

2.2 La diferencia $\boxed{d = \overline{x} - \overline{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{\sigma^2}{m})}$.

El estadístico $T = \dfrac{(d-(\mu_1-\mu_2))}{\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}\sqrt{S_*^2}} \sim t_{n+m-2}$.

Si $P(|t_{n+m-2}| \leq a) = 1-\alpha$, entonces:

$$\boxed{P\left(d - a\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}\sqrt{S_*^2} \leq \mu_1-\mu_2 \leq d + a\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}\sqrt{S_*^2}\right) = 1-\alpha}$$

2.3 $P(|t_{n+m-2}| \leq a) = 1-\alpha \Rightarrow P(|t_{20}| \leq 2.086) = 0.95$.
$[d - 2.086 * 0.7292, d + 2.086 * 0.7292] = [-0.921, 2.121]$

2.4 El p-valor es: $P\left(|t_{n+m-2}| \geq \dfrac{d}{\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}\sqrt{S_*^2}}\right) = P(|t_{20}| \geq 0.8229) = 0.42$. No se rechaza la igualdad de las medias.

PROBLEMA 3

3.1 Hay que calcular el estadístico $Q = \sum_i \dfrac{(M_i - np_i)^2}{np_i}$ bajo $H_o : p_i = \dfrac{1}{6} \ \forall i$.

Número del dado	1	2	3	4	5	6	Total
Frecuencia M_i observadas	80	60	78	70	70	62	420
Frecuencia Esperada np_i	70	70	70	70	70	70	420

Bajo H_o. $Q \sim \chi_5^2$, $P(\chi_5^2 \geq 11.07) = 0.05$

$\boxed{Q = 4.6857}$. Como $Q<11.07$, no se rechaza la hipótesis nula H_o. Se puede decir que el dado es equilibrado.

3.2 El p=valor es $P(\chi_5^2 \geq 4.6857) > P(\chi_5^2 \geq 11.07) > 0.05$

De hecho vale $P(\chi_5^2 \geq 4.6857) = 0.4554$

3.3 Un estimador insesgado de p es $\hat{p} = (M_2 + M_4 + M_6)/n$ y la distribución de $n\hat{p}$ es una binomial $B(n,p)$. Aquí $\hat{p} = 0.4571$.

3.4 Le conviene (T_2) de manera a controlar el error de tipo I cuando rechaza $H_o' : p = 0.45$.