

PREGUNTA 1

Sea X una v.a. de distribución exponencial de parámetro β : $f(x|\beta) = \beta e^{-\beta x}$ si $x > 0$.

1.1 Muestre que la v.a. $Y = \frac{X}{a}$, en que a es una constante positiva, sigue una distribución exponencial de parámetro $a\beta$.

1.2 Sean los valores muestrales x_1, x_2, \dots, x_n de X . Dé el estimador de Máxima Verosimilitud de β .

1.3 Sea x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria simple proveniente de la distribución $N(1, 4)$.

Calcule la probabilidad de que el promedio \bar{X} pertenezca al intervalo $[1 - 1.96 \frac{2}{\sqrt{n}}, 1 + 1.96 \frac{2}{\sqrt{n}}]$.

1.4 Supongamos que se extraen 100 muestras independientes del mismo tamaño. Deduzca el número esperado de veces que la media muestral \bar{X} pertenezca al intervalo $[1 - 1.96 \frac{2}{\sqrt{n}}, 1 + 1.96 \frac{2}{\sqrt{n}}]$.

PREGUNTA 2

Una fábrica trabaja con dos máquinas, una de tipo A y la otra de tipo B. El costo semanal X de reparación para las máquinas de tipo A sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. El costo semanal Y de reparación para las máquinas de tipo B sigue una distribución normal $N(\mu, 2\sigma^2)$.

Se tienen dos muestras independientes: una muestra aleatoria simple x_1, x_2, \dots, x_n de costos para las máquinas de tipo A y una muestra aleatoria simple y_1, y_2, \dots, y_m de costos para las máquinas de tipo B y se consideran

los estimadores de μ de la forma $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$.

2.1 Determine una condición sobre los a_i y b_j para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado.

2.2 Determine los a_i y b_j para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado y de varianza mínima. Deduzca la expresión de $\hat{\mu}$.

2.3 El estimador $\hat{\mu}$ de 2.2 es de mínima varianza entre los estimadores insesgados de la forma

$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$. Usando la desigualdad de Cramer-Rao verifique si $\hat{\mu}$ es de mínima varianza entre todos los estimadores insesgados de μ .

2.4 Determine los a_i y b_j para que el estimador $\mu^* = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$ minimice $E\{(\mu^* - \mu)^2\}$.

2.5 Deduzca la varianza de μ^* . ¿Cuál de $\hat{\mu}$ o μ^* tiene la varianza más pequeña?

PREGUNTA 3

Suponga que se desea estimar el parámetro θ ($0 < \theta < 2$) que determina la densidad de una variable aleatoria X y

que la densidad de X está dada por $f(x|\theta) = \begin{cases} \theta + 2(1-\theta)x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Por otra parte, suponga que se cree *a priori* que θ se distribuye uniforme: $\pi(\theta) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } 0 \leq \theta \leq 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Por último, suponga que se tiene una sola observación de x , es decir $n=1$.

3.1 Determine la densidad *a posteriori* de θ .

3.2 Determine el estimador de Bayes θ_B bajo función de pérdida cuadrática.

3.3 ¿Es θ_B un estimador insesgado de θ ?

3.4 Si $x=1/2$, encuentre k tal que $\text{Prob}(0 < \theta < k | x=1/2) = 1/2$.