

PROBLEMA 1 (Las preguntas 1.3 y 1.4 son independientes de las preguntas 1.1. y 1.2)

- 1.1 Sea x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria simple proveniente de la distribución $N(1, 4)$. Calcule la probabilidad de que el promedio \bar{X} pertenezca al intervalo $[1 - 1.65 \frac{2}{\sqrt{n}}, 1 + 1.65 \frac{2}{\sqrt{n}}]$.
- 1.2 Dé el largo del intervalo obtenido en 1.1 para una muestra aleatoria de tamaño 100. Para este mismo intervalo dé el tamaño de muestra requerido para tener un nivel de confianza de 95%.
- 1.3 Un restaurante tiene dos tipos de menús, un menú ejecutivo A del medio día y un menú B con show a la cena de la noche. La ganancia semanal X del restaurante para los menús de tipo A sigue una distribución normal $N(\mu_1, \sigma^2)$. La ganancia semanal X del restaurante para los menús de tipo B sigue una distribución normal $N(\mu_2, 2\sigma^2)$. Se tiene una muestra aleatoria simple x_1, x_2, \dots, x_n de las ganancias semanales para los menús de tipo A para n semanas y una muestra aleatoria simple y_1, y_2, \dots, y_m de las ganancias semanales de los menús de tipo B para m semanas. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de μ_1 , μ_2 y σ^2 (En particular que el estimador de σ^2 es igual a $\hat{\sigma}^2 = \frac{nS_x^2 + (m/2)S_y^2}{n+m}$) suponiendo las dos muestras independientes. Deduzca un estimador insesgado para σ^2 .
- 1.4 El restaurante no atiende en general al mismo número de personas para el menú de tipo A que para el de tipo B y se estima que la ganancia semanal esperada del restaurante es de $4\mu_1 + \mu_2$. Describa como construir un intervalo de confianza del 95% para $4\mu_1 + \mu_2$ utilizando los estimadores de μ_1 , μ_2 y σ^2 .

PROBLEMA 2

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 9$ y una muestra de tamaño $n=36$. Se construye un test para la hipótesis nula $H_0 : \mu = 20$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 18$.

- 2.1 Dé la región crítica del test más potente para un error $\alpha = 0.01$ de tipo I.
- 2.2 Calcule el error β de tipo II del test.
- 2.3 Si $n=49$, determine el valor de α que permita obtener la misma región crítica que en 2.1. Deduzca β .
- 2.4 Si $n=49$ y $\alpha = 0.01$, determine el valor de μ de la hipótesis alternativa que produce el mismo error β de tipo II que en 2.2.

PROBLEMA 3

Sea $X \sim N(\theta, 1)$, una muestra aleatoria simple de tamaño $n=100$ y una media muestral $\bar{x} = 1.2$. Se efectúan los tests siguientes con un error $\alpha = 0.05$ de tipo I.

- 3.1 Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 1.4$. Concluir.
- 3.2 Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0' : \theta = 1.4$ contra $H_1' : \theta = 1$. Concluir. Calcule los errores de tipo II para los dos tests en 3.1 y 3.2.
- 3.3 Observe que los resultados de los dos tests son contradictorios. Justifique. Encuentre el tamaño n de muestra mínimo que permite suprimir esta contradicción.
- 3.4 Si tomamos $n=100$ ¿tendremos una contradicción para el nivel de significación $\alpha = 0.023$?