

Auxiliar 7 MA34B-03

Problema 1

Se consideran dos variables normales, $X \sim N(2\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$. Se tienen dos muestras independientes: una muestra aleatoria simple x_1, x_2, \dots, x_n de X y una muestra aleatoria simple y_1, y_2, \dots, y_m de Y . Se consideran todos los estimadores de μ de la forma $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$.

1. Determine una condición sobre los coeficientes a_i y b_j para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado.
2. Determine los coeficientes a_i y b_j para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado y de varianza mínima. Deduzca la expresión de $\hat{\mu}$.
3. El estimador $\hat{\mu}$ de 3.2 es de mínima varianza entre los estimadores insesgados de la forma $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$. Usando la desigualdad de Cramer-Rao verifique si $\hat{\mu}$ es de mínima varianza entre todos los estimadores insesgados de μ .

Sol.:

$$1. E(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + \sum_{j=1}^m b_j E(Y_j) = \mu(2 \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j) = \mu \Rightarrow \boxed{2 \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j = 1}$$

$$2. V(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{j=1}^m b_j^2 \text{Var}(Y_j) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \right). \text{ Hay que minimizar}$$

$$\text{Var}(\hat{\mu}) \text{ sujeto a } 2 \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j = 1.$$

$$\Rightarrow Q = \text{Var}(\hat{\mu}) - \lambda(2 \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j - 1) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \right) - \lambda(2 \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j - 1).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0 &\Rightarrow 2\sigma^2 a_i - 2\lambda = 0 \Rightarrow a_i = \frac{\lambda}{\sigma^2} \quad (a_i \text{ todos iguales}) \\ \frac{\partial Q}{\partial b_j} = 0 &\Rightarrow 4\sigma^2 b_j - \lambda = 0 \Rightarrow b_j = \frac{\lambda}{4\sigma^2} \quad (b_j \text{ todos iguales}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_i = 4b_j$$

De $2\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j = 1$ se deduce que $\boxed{a_i = \frac{4}{8n+m}, b_j = \frac{1}{8n+m}}$ y

$$\boxed{\hat{\mu} = \left(\frac{1}{8n+m}\right) \left(4\sum_i X_i + \sum_j Y_j\right)}$$

Es decir que es una media ponderada de todas las observaciones, en donde los X_i tiene un peso 4 veces mayor que el peso de los Y_j .

3. Calculemos la cota inferior de la desigualdad de Cramer-Rao. La función de verosimilitud de las $(n+m)$ valores muestrales es:

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (X_i - 2\mu)^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}\right)^m \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_j (Y_j - \mu)^2\right)$$

$$\log(L) = -\left(\frac{n}{2}\right)\log(2\pi\sigma^2) - \left(\frac{m}{2}\right)\log(4\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i (X_i - 2\mu)^2 + \frac{1}{4} \sum_j (Y_j - \mu)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial \log(L)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 2 \sum_i (X_i - 2\mu) + \frac{1}{2} \sum_j (Y_j - \mu) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log(L)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \left\{ 4n + \frac{m}{2} \right\} = -\frac{1}{\sigma^2} \left\{ \frac{8n+m}{2} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Var}(\hat{\mu}) \geq \frac{2\sigma^2}{8n+m}}$$

Por otro lado: $\text{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2 \left(\sum_i a_i^2 + 2 \sum_j b_j^2 \right) = \frac{2\sigma^2}{8n+m} \Rightarrow \hat{\mu}$ es un estimador insesgado de mínima varianza para μ .

Intervalos de Confianza

Anteriormente vimos métodos de estimación puntual, pero no podemos esperar que la estimación coincida exactamente con el verdadero valor del parámetro. Por lo tanto, buscamos construir un intervalo tal que la probabilidad que θ esté en el intervalo sea alta, es decir:

$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 1 - \alpha$, donde $1 - \alpha$ es llamado nivel de confianza.

$$\theta_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ y } \theta_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$