

Auxiliar 5 MA34B-03

Problema 1

A partir de una muestra aleatoria $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de una variable X discreta de Poisson ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$), se desea estimar el parámetro θ ($\theta > 0$) que determina la densidad de X :

$$f(x/\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \text{ si } x = 0, 1, 2, \dots$$

Además, suponga que se cree *a priori* que el parámetro θ de la variable X del problema anterior se distribuye:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{2} e^{-\theta/2} \text{ si } \theta > 0.$$

1.1 Encuentre el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\theta}_m$ de θ .

1.2 Determine la densidad *a posteriori* de θ .

1.3 Determine el estimador de Bayes θ_B bajo función de pérdida cuadrática.

Sol.:

1.1 La función de verosimilitud: $f_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{\theta^{\sum_i x_i} e^{-n\theta}}{x_1! x_2! \dots x_n!},$

$$\log(f_n) = \sum_i x_i \log(\theta) - n\theta - \log(x_1! x_2! \dots x_n!)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log(f_n)}{\partial \theta} = \frac{\sum_i x_i}{\theta} - n \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_m = \bar{x}}.$$

1.2 $\pi(\theta) = \frac{1}{2} e^{-\theta/2}$ si $\theta > 0 \Rightarrow \xi(\theta/x_1, \dots, x_n) = \frac{f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) \pi(\theta)}{g(x_1, \dots, x_n)}$ si $\theta > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\xi(\theta/x_1, \dots, x_n) = K \theta^{\sum x_i} e^{-(n+\frac{1}{2})\theta} \text{ si } \theta > 0} \Rightarrow \theta | x_1, \dots, x_n \sim \text{Gamma}(1 + \sum x_i, \frac{2n+1}{2})$$

1.3 Bajo pérdida cuadrática, $\theta_B = E(\theta/x_1, \dots, x_n) = \frac{2(1 + \sum x_i)}{2n+1}.$

1.4 $E(\theta_m) = E(\bar{x}) = \theta$

$$E(\theta_B) = E\left(\frac{2(1 + \sum x_i)}{2n+1}\right) = \frac{2(1 + E(\sum x_i))}{2n+1} = \frac{2(1 + n\theta)}{2n+1}$$

Pauta pregunta 3 Control 1 Semestre Primavera 2004:

Una gran compañía de energéticos ofrece al dueño de un terreno \$120.000 por los derechos de explotación de gas natural en un sitio determinado y un bono adicional de \$1.380.000 que se podrá cobrar solo si se encuentra gas durante la etapa de exploración. El propietario, considerando que el interés de la compañía energética es una buena indicación de que existe gas, está tentado a desarrollar él mismo el campo. Para hacer esto, deberá contratar equipos con experiencia en exploración y desarrollo. El costo inicial es de \$400.000, los que se perderán si no se encuentra gas. Sin embargo, si descubre gas, el propietario estima un beneficio neto de \$2.000.000. Sea d_1 la decisión de aceptar la oferta de la compañía, y d_2 la decisión de explorar y desarrollar por cuenta propia.

3.1 Contruya la matriz de beneficios asociada al problema, indicando todos los elementos que la componen.

3.2 Suponga que el propietario estima que la probabilidad de encontrar gas es de 0,6. Determine la decisión recomendable a priori.

3.3 El propietario tiene la opción de realizar pruebas de sonido al terreno. La prueba, eso sí, no es perfecta: el %30 de las veces la prueba indicará que no hay gas cuando en realidad había gas, y un %90 de las veces la prueba indicará que no hay gas cuando realmente no había. Con estas condiciones determine la política de decisión adecuada, y determine el precio que debería pagar el propietario por la prueba.

3.4 Suponga que NO se encuentra gas. ¿Cuál sería la decisión a posteriori?

Solución:

3.1 La matriz de pagos asociada al problema es la siguiente:

	d_1	d_2
θ_1	1500	2000
θ_2	120	-400

Donde θ_1 es el evento "Hay gas", mientras que θ_2 corresponde al evento "No hay gas".

3.2 Del enunciado se tiene que $\xi(\theta_1) = P(\theta_1) = 0,6$, por lo que $\xi(\theta_2) = P(\theta_2) = 1 - P(\theta_1) = 0,4$. Los beneficios esperados a priori son los siguientes:

$$\rho_1 = E[L(d_1, \theta)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i) = 1500 \cdot 0,6 + 120 \cdot 0,4 = 948$$

$$\rho_2 = E[L(d_2, \theta)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i) = 2000 \cdot 0,6 + (-400) \cdot 0,4 = 1040$$

Como $\rho_2 > \rho_1$, entonces elijo d_2 .

3.3 Sea

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Si la prueba revela que hay gas} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Del enunciado se tienen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(X = 0|\theta_1) &= 0,3 & P(X = 1|\theta_1) &= 0,7 \\ P(X = 0|\theta_2) &= 0,9 & P(X = 1|\theta_2) &= 0,1 \end{aligned}$$

Para $X = 0$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta_1|X = 0) &= \frac{P(X = 0|\theta_1)P(\theta_1)}{P(X = 0|\theta_1)P(\theta_1) + P(X = 0|\theta_2)P(\theta_2)} = \frac{1}{3} \\ \xi(\theta_2|X = 0) &= 1 - \xi(\theta_1|X = 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Para $X = 1$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta_1|X = 1) &= \frac{P(X = 1|\theta_1)P(\theta_1)}{P(X = 1|\theta_1)P(\theta_1) + P(X = 1|\theta_2)P(\theta_2)} = \frac{21}{23} \\ \xi(\theta_2|X = 1) &= 1 - \xi(\theta_1|X = 1) = \frac{2}{23} \end{aligned}$$

Por lo que los beneficios a posteriori son:

Para $X = 0$:

$$\begin{aligned}\rho_1(X = 0) &= E[L(d_1, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 1500 \cdot \frac{1}{3} + 120 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 580 \\ \rho_2(X = 0) &= E[L(d_2, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 2000 \cdot \frac{1}{3} + (-400) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 400\end{aligned}$$

Luego, elijo d_1 .

Para $X = 1$:

$$\begin{aligned}\rho_1(X = 1) &= E[L(d_1, \theta | X = 1)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 1) = 1500 \cdot \frac{21}{23} + 120 \cdot \frac{2}{23} \\ &= 1380 \\ \rho_2(X = 1) &= E[L(d_2, \theta | X = 1)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 1) = 2000 \cdot \frac{21}{23} + (-400) \cdot \frac{2}{23} \\ &= 1791\end{aligned}$$

Luego, elijo d_2 .

La política de decisiones correspondiente es:

$$\delta(X) = \begin{cases} d_1 & \text{Si } X = 0 \\ d_2 & \text{Si } X = 1 \end{cases}$$

El beneficio esperado de esta política es entonces:

$$\begin{aligned}\rho(\delta) &= E_\theta[E_Y[L(\delta(Y), \theta)]] = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} L(\delta(Y), \theta_i) P(Y = Y(d_j) | \theta_i) P(\theta_i) \\ &= 1500 * 0,3 * 0,6 + 120 * 1 * 0,4 + 2000 * 0,7 * 0,6 + (-400) * 0,1 * 0,4 = 1137\end{aligned}$$

Y por ende, el valor de la información es entonces:

$$VI = \rho(\delta) - \rho_{\text{priori}} = 1137 - 1040 = 97$$

Luego, el propietario debe estar dispuesto a desembolsar \$97.000 por contar con la información derivada de la prueba de sonido.

3.4 Si no se encuentra gas ($X = 0$), el beneficio esperado por cada decisión es:

$$\begin{aligned}\rho_1(X = 0) &= E[L(d_1, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 1500 \cdot \frac{1}{3} + 120 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 580 \\ \rho_2(X = 0) &= E[L(d_2, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 2000 \cdot \frac{1}{3} + (-400) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 400\end{aligned}$$

Luego, elijo d_1 .