

### Auxiliar 4 MA34B-03 (extra)

#### Problema 1

Sea una muestra aleatoria simple  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de una distribución con densidad

$$f(x/\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\theta, \theta + 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

1.1 Encuentre el estimador  $\hat{\theta}_1$  de  $\theta$  obtenido por el método de los momentos.

1.2 Muestre que el estimador de Máxima Verosimilitud no es único.

**Sol.:**

Los valores muestrales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son independientes entre si y tienen una densidad:

$$f(x_i/\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in [\theta, \theta + 1] \\ 0 & \text{si } x_i \notin [\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

$$1.1 \ E(X) = \int_{\theta}^{\theta+1} x dx = \theta + \frac{1}{2}$$

$$E(X) \equiv \frac{1}{n} \sum_i x_i = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta}_1 + \frac{1}{2} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \bar{x} - \frac{1}{2}$$

1.2 La función de verosimilitud es

$$f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall x_i \in [\theta, \theta + 1] \\ 0 & \text{si } \exists x_i \notin [\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) = 1$  si  $\text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \geq \theta$  y  $\text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \theta + 1$ ,  
en el resto de los casos vale  $f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) = 0$ .

Luego  $\hat{\theta} \in [\text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - 1, \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}]$ . El estimador de máxima Verosimilitud no es único salvo si  $\text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + 1$ .

## Problema 2

Sea una muestra aleatoria  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  con función densidad

$$f(x/\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha * 2^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}, \text{ con } \alpha > 0$$

2.1 Encuentre el estimador  $\hat{\alpha}_1$  de máxima verosimilitud de  $\alpha$

2.2 Encuentre el estimador  $\hat{\alpha}_2$  de los momentos de  $\alpha$

**Sol.:**

2.1  $f(x_i) = \alpha * 2^\alpha * x_i^{-(\alpha+1)}$ , calculando la densidad conjunta  $fn(x)$

$$fn(x) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \alpha * 2^\alpha * x_i^{-(\alpha+1)} = \alpha^n * 2^{n\alpha} * \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} \quad / \text{ aplicando } \ln( )$$

$\ln(fn(x)) = n \ln \alpha + n \alpha \ln 2 - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ , derivando e igualando a 0 para maximizar  $fn(x)$

$$\frac{\partial \ln fn(x)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln 2 - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0, \text{ entonces } n + n \alpha \ln 2 - \alpha \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\text{y } \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln 2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{2})}$$

2.2  $\hat{\alpha}_2 = E(x) = \bar{x}$ , calculando la  $E(x)$

$$E(x) = \int_2^\infty x * f(x) dx = \int_2^\infty x * \frac{\alpha * 2^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \int_2^\infty \alpha * 2^\alpha * x^{-\alpha} dx = \alpha * 2^\alpha * \left[ \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_2^\infty = \frac{\alpha * 2^\alpha}{(\alpha-1)2^{\alpha-1}} = \frac{\alpha * 2}{\alpha-1}$$

$$\text{igualando } E(x) = \bar{x}, \text{ tenemos que } \hat{\alpha}_2 = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - 2}$$

### Problema 3

Sea una muestra aleatoria simple  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de una v.a  $X$  de distribución con densidad

$$f(x | \beta) = \begin{cases} \frac{\beta a^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

3.1 Muestre que  $Y = \log\left(\frac{X}{a}\right)$  sigue una distribución exponencial

$$g(y | \beta) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

3.2 Deducir el estimador  $\hat{\alpha}$  de Máxima Verosimilitud de  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ , suponiendo  $a$  conocido.

**Sol.:**

3.1 Consideramos la variable  $Y = \log\left(\frac{X}{a}\right)$ ; su función de densidad es dada por:

$$g(y)dy = f(x(y))dx(y)$$

con  $x = ae^y$  y  $dx = ae^y dy$ .

$$g(y)dy = \frac{\beta a^\beta}{(ae^y)^{\beta+1}} ae^y dy = \beta e^{-\beta y} dy \Rightarrow g(y | \beta) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

3.2 Sean las observaciones  $y_i = \log\left(\frac{x_i}{a}\right) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ , entonces el estimador de Máxima Verosimilitud de  $\alpha = \frac{1}{\beta}$  puede calcularse a partir de los  $y_i$ :

La verosimilitud se escribe:  $g_n(y_1, \dots, y_n) = \alpha^{-n} e^{-\frac{1}{\alpha} \sum_i y_i}$  y  $\frac{\partial \log(g_n)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_i y_i}{n} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i \log\left(\frac{x_i}{a}\right) \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_i \log\left(\frac{x_i}{a}\right)$$