

Auxiliar 3 MA34B-03

Problema 1

Sean X_1, \dots, X_n una m.a. de una población con fn. de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \theta \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}, & x > 1 \quad (\theta > 1) \\ 0, & \sim \end{cases}$$

- 1.1) Encuentre el estimador de los momentos para θ .
- 1.2) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para θ

Sol.:

$$1.1 \quad f(x) = \theta \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} \Rightarrow E(x) = \int_1^{\infty} x \theta \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} dx = \frac{\theta}{1-\theta} x^{-\theta+1} \Big|_1^{\infty} = \frac{\theta}{\theta-1}$$

El estimador de los momentos viene dado por :

$$E(x) = \frac{\theta}{\theta-1} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

1.2 La función de verosimilitud viene dada por:

$$f_n(x_1 \dots x_n / \theta) = \theta^n \left(\frac{1}{\prod_1^n x_i} \right)^{\theta+1} / Ln \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{Ln(\prod_1^n x_i)}$$

Problema 2

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, estimar μ y σ^2 utilizando:

- a) Método de los momentos
- b) Método de Máxima Verosimilitud

Sol.:

a)

Sabemos que para la dist. Normal, $E(x) = \mu$ y $Var(x) = \sigma^2$

$$E(x) = \bar{x} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$E(x^2) = \frac{\sum_i x_i^2}{n} \quad \text{y} \quad Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$\text{Luego } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

b)

$$f_n(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right) \quad / \ln()$$

$$g_n = -n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}$$

Problema 3

Estime de la media de una distribución uniforme usando el método de máxima verosimilitud. Suponga que X_1, X_2, \dots, X_n constituyen una muestra de una distribución uniforme en $(0, \theta)$, donde no se conoce θ .

Sol:

$$\text{Si } X \sim U(0, \theta) \Rightarrow f(x_i / \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x_i < \theta$$

$$\text{Luego } f_n(x_1, \dots, x_n / \theta) = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 < x_i < \theta$$

Tal función se maximiza tomando θ tan pequeña como sea posible. Como θ debe ser por lo menos tan grande como cada uno de los valores x_i observados, entonces el θ más pequeño que podemos tomar es $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Por esto, el estimador de máxima verosimilitud será

$$\hat{\theta} = \max(x_1, \dots, x_n)$$