

Auxiliar 2 MA34B-03

Problema 1

Se tiene una M.A.S $\{x_1, \dots, x_n\}$.

$$X \rightarrow \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ para } \lambda > 0.$$

Usted se da cuenta que los datos parecen tener una distribución “a priori” como se muestra:

$$\Pi(\lambda) = \text{Gamma}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$$

Determine la distribución a posteriori de λ .

Sol.:

Distribución a posteriori

$$\xi(\lambda / x) = \frac{f_n(x_1, \dots, x_n / \lambda) * \pi(\lambda)}{\int f_n(x_1, \dots, x_n / \lambda) * \pi(\lambda) d\lambda} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i} \beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i! * \int f_n \pi(\lambda) d\lambda} = K * \lambda^{\alpha-1 + \sum x_i} * e^{-(n+\beta)\lambda}$$

Reconociendo términos

$$\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum x_i, n + \beta)$$

P1) Una empresa de productos electrónicos está decidiendo si va a producir o no un nuevo implemento de comunicación. La decisión de producir el implemento (que denotaremos por " a_1 " implica una inversión de US\$ 5 millones y la demanda por un implemento de éste tipo es desconocida. Si la demanda es alta, la empresa espera un retorno de US\$ 2 millones anuales durante 5 años. Si la demanda es moderada , el retorno será de US\$ 1,6 millones durante cuatro años. Y una demanda baja significa un retorno de US\$ 0,8 millones anuales durante cuatro años. Bajo el supuesto de que la tasa de interes es de 10% se calcularon los valores actuales netos de los flujos, lo que arrojo la siguiente tabla de pagos (en millones de US\$).

Si la Demanda es	producir a_1	no producir a_2
Alta	2.58	0
Moderada	0.07	0
Baja	-2.46	0

Se estima que la probabilidad de tener demanda baja es de 0,1 y la probabilidad de una demanda alta de 0,5.

a) ¿Cuál es la decisión bayesiana?

b) Se tiene a disposición una investigación con un costo de US\$ 75.000 que tiene las siguientes características:

Los resultados del estudio se muestran favorables o desfavorables con las siguientes probabilidades.

Si la Demanda es	favorable	desfavorable
Alta	0.□	0.1
Moderada	0.5	0.5
Baja	0.0	1.0

¿ Debe la empresa realizar la investigación?

Solución:

Sean θ_1 = Demanda Alta
 θ_2 = Demanda Moderada
 θ_3 = Demanda Baja

La matriz de pagos es:

	d_1	d_2
θ_1 :	$w_{11} = 2,58$	$w_{12} = 0$
θ_2 :	$w_{21} = 0,07$	$w_{22} = 0$
θ_3 :	$w_{31} = -2,46$	$w_{32} = 0$

Del enunciado se tiene que para cada escenario de demanda, las probabilidades son:

$$\xi_1 = P(\theta = \theta_1) = 0,5$$

$$\xi_3 = P(\theta = \theta_3) = 0,1$$

Como los 3 escenarios de demanda son los únicos posibles:

$$\sum P(\theta = \theta_i) = 1 \Rightarrow \xi_2 = P(\theta = \theta_2) = 1 - P(\theta = \theta_1) - P(\theta = \theta_3) = 1 - 0,5 - 0,1 = 0,4$$

$$\therefore \xi_2 = P(\theta = \theta_2) = 0,4$$

a) La decisión Bayesiana corresponde a la decisión tomada a priori. Para cada decisión a_i ($i=1,2$), el pago esperado es:

$$a_1: \quad \rho_1 = w_{11}\xi_1 + w_{21}\xi_2 + w_{31}\xi_3 = 2,58 \cdot 0,5 + 0,07 \cdot 0,4 - 2,46 \cdot 0,1 = 1,702$$

$$a_2: \quad \rho_2 = w_{12}\xi_1 + w_{22}\xi_2 + w_{32}\xi_3 = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \text{ para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_1 > \rho_2$, se elige la decisión a_1

b) Sea $x=1$ si el estudio resulta favorable y $x=0$ si no es favorable. Del enunciado, las probabilidades de los resultados del estudio dados los escenarios de demanda son:

$$P(x=1/\theta = \theta_1) = 0, \square$$

$$P(x=1/\theta = \theta_2) = 0,5$$

$$P(x=1/\theta = \theta_3) = 0,0$$

$$P(x=0/\theta = \theta_1) = 0,1$$

$$P(x=0/\theta = \theta_2) = 0,5$$

$$P(x=0/\theta = \theta_3) = 1,0$$

Debemos la probabilidad a posteriori de los escenarios de demanda condicionados a la información otorgada por el estudio:

Para $x = 1$:

$$\xi_1(x=1)=\xi(\theta=\theta_1/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_2(x=1)=\xi(\theta=\theta_2/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_3(x=1)=\xi(\theta=\theta_3/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

Para $x= 0$:

$$\xi_1(x=0)=\xi(\theta=\theta_1/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_2(x=0)=\xi(\theta=\theta_2/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_3(x=0)=\xi(\theta=\theta_3/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

Los resultados obtenidos son:

$$\begin{array}{ll} \xi(\theta = \theta_1 / x = 1) = 0,6 & \xi(\theta = \theta_1 / x = 0) = 0,14 \\ \xi(\theta = \theta_2 / x = 1) = 0,31 & \xi(\theta = \theta_2 / x = 0) = 0,57 \\ \xi(\theta = \theta_3 / x = 1) = 0 & \xi(\theta = \theta_3 / x = 0) = 0,2 \end{array}$$

Luego, los pagos esperados actualizados con las nuevas probabilidades de demanda son:

Para $x=1$:

$$\begin{aligned} a_1 : \quad \rho_1(x=1) &= w_{11}\xi_1(x=1) + w_{21}\xi_2(x=1) + w_{31}\xi_3(x=1) \\ &= 2,58 \cdot 0,6 + 0,07 \cdot 0,31 - 2,46 \cdot 0 = 1,802 \end{aligned}$$

$$a_2 : \quad \rho_2(x=1) = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_1(x=1) > \rho_2(x=1)$, se elige la decisión a_1

Para $x=0$:

$$\begin{aligned} a_1 : \quad \rho_1(x=0) &= w_{11}\xi_1(x=0) + w_{21}\xi_2(x=0) + w_{31}\xi_3(x=0) \\ &= 2,58 \cdot 0,14 + 0,07 \cdot 0,57 - 2,46 \cdot 0,2 = -0,31 \end{aligned}$$

$$a_2 : \quad \rho_2(x=1) = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_2(x=1) > \rho_1(x=1)$, se elige la decisión a_2

La política de decisiones " δ " entonces es la siguiente:

$$\delta = \begin{cases} a1 & \text{si } x=1 \\ a2 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

El pago global esperado de acuerdo a la anterior decisión es:

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= \xi_1 \cdot w_{11} \cdot P(x=1/\theta=\theta_1) + \xi_2 \cdot w_{21} \cdot P(x=1/\theta=\theta_2) + \xi_3 \cdot w_{31} \cdot P(x=1/\theta=\theta_3) \\ &= 0,5 \cdot 2,58 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,07 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot (-2,46) \cdot 0 = 1,175 \end{aligned}$$

El valor esperado de la información es entonces:

$$\rho(\delta) - \rho(\text{a priori}) = \rho(\delta) - \rho_1 = 1,175 - 1,072 = 0,103 = \text{US\$ } 103.000 > \text{US\$ } 75.000$$

\Rightarrow Conviene realizar la investigación.

Problema 3

¿Qué representan las funciones de densidad *a priori* y *a posteriori*? ¿Cómo se obtienen?

Sol.:

La función de verosimilitud es la distribución conjunta de los valores muestrales. Si la muestra es aleatoria los valores muestrales son independientes esta función se obtiene como producto de las funciones de densidad de los valores muestrales.

La función de densidad *a priori* traduce una cierta idea subjetiva que se tiene sobre el valor que puede tomar el parámetro de la distribución de población. La función de densidad *a posteriori* es la densidad condicional del parámetro dado los valores muestrales. La densidad $\pi(p)$ *a priori* se determina antes de tomar la muestra y es subjetiva. La función de densidad $\xi(p|x_1, \dots, x_n)$ *a posteriori* se obtiene de la formula de Bayes a partir de la función de verosimilitud (densidad de los valores muestrales dado el parámetro) y de la densidad *a priori* del parámetro.

$$\xi(p|x_1, \dots, x_n) = \frac{f_n(x_1, \dots, x_n | p)\pi(p)}{\int f_n(x_1, \dots, x_n | p)\pi(p)dp}.$$