

Auxiliar 1 MA34B-03

Problema 1

Suponga que las variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son independientes y que cada x_i proviene de una distribución Normal con media μ y varianza σ^2

1.1 Determine la distribución de la variable $\frac{n(\bar{x}_n - \mu)^2}{\sigma^2}$.

1.2 Suponga que el tamaño de la muestra n es par ($n=2m$). Defina $Z_i = \frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$ e

$Y = \left(\sum_{i=1}^m Z_i \right)^2 + \left(\sum_{i=m+1}^n Z_i \right)^2$. Determine el valor de la constante k , tal que la variable aleatoria

kY se distribuye χ^2 . Determine los grados de libertad de la distribución.

1.3 Si $n=10$, determine la constante c , tal que $P(\bar{x}_n \leq \mu + c\sigma) = 0.95$.

1.4 Si $n=9$, calcule la probabilidad conjunta de que $\bar{x}_n \leq \mu + 0.2\sigma$ y $S_n^2 \leq 1.2\sigma^2$.

Sol.:

$$1.1 \frac{(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 \sim \chi_1^2$$

1.2 $Z_i = \frac{(x_i - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^m Z_i \sim N(0,m)$ y $\sum_{i=m+1}^n Z_i \sim N(0,m)$. Si normalizamos obtenemos

$\frac{\sum Z_i}{\sqrt{m}} \sim N(0,1)$ Luego $\left(\sum_{i=1}^m Z_i \right)^2 / m \sim \chi_1^2$ y $\left(\sum_{i=m+1}^n Z_i \right)^2 / m \sim \chi_1^2$. Además como los Z_i son

independientes $\frac{1}{m}Y \sim \chi_2^2$.

$$1.3 P(\bar{x}_n \leq \mu + c\sigma) = P\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c\sqrt{n} \right) = 0.95 \Rightarrow c\sqrt{n} = c\sqrt{10} = 1.64 \Rightarrow c = 0.5186.$$

$$1.4 P(\bar{x}_n \leq \mu + 0.2\sigma) = P\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma} \leq 0.2 \right) = P\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{9}} \leq 0.2\sqrt{9} \right) = P\left(\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/3} \leq 0.6 \right) = 0.7257.$$

¡Ojo acá que la media tiene implícita una \sqrt{n} !

$$P(S_n^2 \leq 1.2\sigma^2) = P\left(\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq 1.2n \right) = P(\chi_8^2 \leq 10.8) = 0.7867. \text{ Los grados de libertad son } n-1$$

Finalmente como en el caso de la normal \bar{x}_n y S_n^2 son independientes, la probabilidad conjunta es el producto de las dos probabilidades o sea 0.5710

Problema 2

Una fábrica estudia la calidad de sus productos que son ampolletas de 100W. El investigador del estudio se interesa a la distribución de la duración de vida de las ampolletas utilizando una muestra de tamaño n . Se llama X a la variable duración de vida de las ampolletas.

- a) Justifique porque se utiliza una muestra y no un censo.
- b) El investigador supone que la variable poblacional X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. ¿Cuál es la expresión de la varianza de la media las duraciones de vida de las n ampolletas de la muestra en función de la varianza poblacional σ^2 ?
- c) El investigador supone ahora que la variable poblacional X sigue una distribución exponencial $Exp(\lambda)$. ¿Cuál es la expresión de la varianza de la media las duraciones de vida de las n ampolletas de la muestra en función del parámetro λ ?
- d) Si el investigador no quiere una varianza mayor que *** ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra cuando supone
 - d1) la distribución normal
 - d2) la distribución exponencial

Sol.:

- a) ¡En un censo se estaría probando todas las ampolletas hasta que se quemen! Es obvio que aquí hay que usar una muestra.
- b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- c) $X \sim Exp(\lambda)$ y $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$.
- d) $Var(\bar{x}) \leq 1000$
 - d1) $n > \frac{800000}{1000} = 800$
 - d2) $n > \frac{\lambda^2}{1000} = \frac{1000000}{1000} = 1000$

Problema 3

El número de días de gestación para el ser humano varía aproximadamente como una distribución normal $N(266, 16)$.

- i) ¿En que intervalo de días el 95% de las gestaciones cae cuando se toma como centro del intervalo 266 días?
- ii) ¿Cuál es el mayor tiempo de gestación del 1% de los menores tiempos de gestación? ¿Cuál es el menor tiempo de gestación del 5% de los mayores tiempos de gestación?
- iii) ¿Cuál es el porcentaje de tiempos de gestación menor que 210 días (7 meses)?
- iv) ¿Cuál es el porcentaje de tiempos de gestación entre que 240 y 270 días (entre 8 y 9 meses)?

Sol.:

i)

$$P(a < X < b) = 0,95$$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{a-266}{4} < Z < \frac{b-266}{4}\right) = 0,95$$

$$P\left(Z > \frac{b-266}{4}\right) = 0,025 \Rightarrow \frac{b-266}{4} = 1,96 \Rightarrow b = 273,84$$

De la misma forma

$$\frac{a-266}{4} = -1,96 \Rightarrow a = 258,16$$

$$I = [258,16; 273,84]$$

ii)

a)

$$P(Z < z_1) = 0,01$$

Por simetría

$$P(Z > z_2) = 0,01$$

De la tabla

$$z_2 = 2,33 \Rightarrow z_1 = \frac{a-266}{4} = -2,33 \Rightarrow a = 256,68$$

b)

$$P(Z > z_1) = 0,05$$

$$z_1 = 1,65 \Rightarrow \frac{b-266}{4} = 1,65 \Rightarrow b = 272,6$$

iii)

$$P(Z < z_1)$$

$$z_1 = \frac{210-266}{4} = -14$$

$$P(Z < -14) \rightarrow 0$$

iv)

$$P\left(\frac{240-266}{4} < Z < \frac{270-266}{4}\right)$$

$$P(-6,5 < Z < 1)$$

$$1 - P(Z > 1) - P(Z > 6,5)$$

$$1 - 0,1587 - 0 = 0,8413$$