



# MA34B – Estadística Teoría De Decisiones

Prof. Rodrigo Abt B.  
[rabt@dim.uchile.cl](mailto:rabt@dim.uchile.cl)

# Introducción (1)

- En el mundo actual, la toma de decisiones tiene un rol fundamental en el quehacer de la sociedad y agentes económicos: gobiernos, empresas y personas se ven enfrentados a ellas diariamente.
- Bueno, pero...¿Qué elementos se consideran en un proceso de toma de decisiones?



## Introducción (2)

- Incluso las decisiones más básicas contemplan los siguientes elementos:
  - ❑ Un sujeto, que actúa como el tomador de decisiones.
  - ❑ Un conjunto de decisiones y/o acciones.
  - ❑ Un criterio, que sirve para determinar que decisión es mejor que otra.

# Ejemplo

Problema: un agricultor tiene un fundo en el sur, en el que puede plantar papas o tomates. Si se plantan papas y llueve, el agricultor gana solo \$500.000 por cargamento, pero si no llueve gana \$1.800.000. En cambio, si planta tomates y llueve, gana \$1.200.000, pero si no llueve, gana solo \$300.000. ¿Qué le conviene plantar al agricultor?.

Para analizar el problema, debemos identificar los elementos del mismo. En primer lugar tenemos:

- ❑ Dos acciones: sembrar papas o sembrar tomates.
- ❑ Dos eventos del clima: llueve o no llueve.
- ❑ Pagos asociados a las combinaciones de ambos elementos. Lo cual se puede resumir en el siguiente cuadro:



	Papas	Tomates
Llueve	500	700
No llueve	1.000	300

Cuadro 1: Ganacias en miles de pesos,  
por tipo de siembra y evento climático

# ¿Cómo Decidir?

- Para que el agricultor decida, debe contar con un criterio o regla, que basándose en la información disponible, le permita obtener el “mejor” resultado.
- Ahora bien, no todos deciden de la misma manera. Por una parte existen los que son arriesgados u optimistas y otros que son más adversos al riesgo o más pesimistas.
- Veamos cómo decidirían personas con distintos tipos de adversidad al riesgo:

# Conservadores, Pesimistas Y Optimistas

- Una persona conservadora tratará de sacar el mayor provecho frente a la adversidad, es decir, sacará “lo mejor de lo peor”, y se dará cuenta que en el caso de plantar papas, lo peor que puede pasar es que llueva y obtenga una ganancia de solo 500, mientras que si planta tomates y no llueve gana 300. Lo mejor de estos dos escenarios es plantar papas, ya que en el peor de los casos se queda con 500 que es mejor que 300. (Criterio de Wald)
- Un enfoque menos conservador es descontar el mejor pago que se pueda obtener para cada evento climático de cada decisión y construir una matriz de pérdidas, y sobre esa sacar el mejor provecho con el criterio anterior. En este caso lo conveniente sería plantar tomates. (Criterio de Savage)
- Otros enfoques buscan balancear con medidas intuitivas los peores escenarios versus los mejores, asignando ponderaciones a los mismos. (Criterio de Hurcwiz)

# Decisiones Bajo Incertidumbre (1)

- En los análisis anteriores no teníamos nociones del estado del tiempo, pero...

*¿Cómo decidiría el agricultor si un informe del tiempo le revela que la probabilidad de lluvia es de 0.75?*

## Decisiones Bajo Incertidumbre (2)

- Si apostamos porque llueve, entonces nos conviene plantar tomates, ya que tenemos un beneficio de 700, frente a los 500 por las papas. Pero existe una probabilidad no negativa de que no llueva, en cuyo caso deberíamos plantar papas por un beneficio de 1.000 frente a los 300 de los tomates.
- Imaginemos que para cada cosecha la probabilidad de lluvia es siempre de 0,75 y plantamos siempre papas. Entonces, en el largo plazo, no equivocaremos un 75% de las veces y nuestras ganancias promedio serán de  $0,75 \cdot 500 + 0,25 \cdot 1000 = 625$ .
- Ahora imaginemos que plantamos siempre tomates. Entonces, nuestra ganancia promedio será de:  $0,75 \cdot 700 + 0,25 \cdot 300 = 600$ .
- Si nos guiamos por lo anterior, entonces nos conviene plantar papas.
- Este es el criterio correspondiente al criterio del mayor valor esperado (cuando hablamos de ganancias, en cada combinación evento-decisión).



# Decisiones Bajo Incertidumbre (3)

- Podemos generalizar este tipo de problemas de decisión, a través de los siguientes elementos:
  - Se tiene un conjunto de **decisiones** o **acciones**  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ .
  - Se tiene un conjunto de **estados** de la naturaleza  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , y una ley de probabilidades *a priori*  $\xi(\theta)$  asociada.
  - Una **función de pérdida** o **costo**  $L: \Theta \times D \rightarrow [0, \infty)$  para cada combinación estado-decisión.
- La información de estos elementos se resumen en una **Matriz de pagos** o **Tabla de pagos**.
- **NOTA:** Dependiendo del contexto del problema, y del uso de signos, la función de pérdida puede reflejar pagos, beneficios o utilidades.

# Decisiones Bajo Incertidumbre (4)

- Para cada decisión  $d_j$  se puede calcular el riesgo (beneficio) esperado  $\rho_j$ :

$$\rho_j = R(\theta, d_j) = E[L(\theta, d_j)] = \sum_{\Theta} L(\theta, d_j) \xi(\theta)$$

- Se elige aquella decisión  $d_l$  que minimice el riesgo esperado:

$$\rho_l = \min_j \rho_j$$

- A dicha decisión se le denomina **decisión Bayes**.
- Una decisión  $d$  se dirá **inadmisible** si existe una decisión  $d^*$  tal que:

$$L(\theta, d^*) \leq L(\theta, d) \quad \forall \theta \in \Theta$$

- Cuando existen decisiones inadmisibles, estas deberán descartarse antes de llevar a cabo cualquier análisis.

# La Información Muestral (1)

- Supongamos que nuestro agricultor quiere asegurarse, y viaja a preguntar la opinión del clima a un viejo agricultor amigo que vive a unos cuantos kilómetros de distancia.
- Nuestro agricultor sabe que su amigo no es infalible, y puede equivocarse. De hecho, de unas 10 veces que le ha preguntado si estaba lloviendo en su parcela, en sólo 2 oportunidades dijo lo contrario; Y de otras 10 veces en que no estaba lloviendo, dijo en 4 oportunidades dijo que sí llovía.
- Esta información se puede resumir en la siguiente tabla:

## La Información Muestral (2)

	Amigo dijo lluvia	Amigo dijo que no había lluvia	Total
Llovió	8	2	10
No llovió	4	6	10

*¿Cómo influye esta información en la toma de decisiones?*

## La Información Muestral (3)

- En base a esta información podemos construir las probabilidades de acertar y equivocarse del agricultor amigo.
- Para ello, definamos la variable  $X$  como la respuesta del amigo agricultor:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el amigo dice lluvia} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

## La Información Muestral (4)

- De lo anterior, se definimos los eventos  $\theta=1$  si llueve y  $\theta=0$  si no, podemos escribir las probabilidades:

$$P(X = 1|\theta = 1) = \frac{8}{10} \quad P(X = 0|\theta = 1) = \frac{2}{10}$$

$$P(X = 1|\theta = 0) = \frac{4}{10} \quad P(X = 0|\theta = 0) = \frac{6}{10}$$

## La Información Muestral (5)

- Claramente la información provista por el amigo nos puede hacer dudar de las probabilidades a priori especificadas para los eventos "llueve" y "no llueve".
- ¿Existe alguna forma de "actualizar" dichas probabilidades a priori dada esta nueva información?.
- La respuesta es sí, gracias a un famoso teorema visto en cursos de probabilidades: el teorema de Bayes.

# El Teorema De Bayes

- El teorema de Bayes establece que dado un conjunto de sucesos elementales (partición)  $\{B_i\}_i$  tales que:

$$\bigcap_{i=1}^N B_i = \emptyset$$

- Y se tiene un suceso  $A$  del que se conocen las probabilidades condicionales  $P(A | B_i)$ , entonces:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^N P(A|B_i)P(B_i)}$$



# Actualización De Probabilidades (1)

- Usando el teorema anterior, podemos actualizar las probabilidades a priori de lluvia  $\xi(\theta=1)$  y no lluvia  $\xi(\theta=0)$ :

$$\xi(\theta = 1|X = 1) = \frac{P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 1|\theta = 0)P(\theta = 0)}$$
$$\approx 0,86$$

$$\Rightarrow \xi(\theta = 0|X = 1) = 1 - \xi(\theta = 1|X = 1) = 1 - 0,86 = 0,14$$

$$\xi(\theta = 1|X = 0) = \frac{P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 0|\theta = 0)P(\theta = 0)}$$
$$= 0,5$$

$$\Rightarrow \xi(\theta = 0|X = 0) = 1 - \xi(\theta = 1|X = 0) = 1 - 0,5 = 0,5$$

## Actualización De Probabilidades (2)

- Del resultado anterior podemos inferir que si el amigo dice “llueve” ( $X=1$ ), lo lógico es que debamos creer aún más en lo dicho por el pronóstico del tiempo.
- Efectivamente si  $X=1$ , entonces la probabilidad de lluvia pasa de 0,75 a 0,86.
- Y si  $X=0$  entonces nuestra “creencia” del pronóstico baja de 0,75 a 0,5.

# Decisión A Posteriori (1)

- ¿Qué decide el agricultor entonces?
- Bueno, depende de la respuesta del amigo. Veamos para cada caso:
- Si  $X=1$ , entonces para las decisiones  $d_1$  (plantar papas),  $d_2$  (plantar tomates) se tiene el beneficio esperado:

$$\rho_1(X = 1) = E[L(\theta|X = 1, d_1)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_1)\xi(\theta = i|X = 1) = 500 \cdot 0.86 + 1000 \cdot 0.14 = 570$$

$$\rho_2(X = 1) = E[L(\theta|X = 1, d_2)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_2)\xi(\theta = i|X = 1) = 700 \cdot 0.86 + 300 \cdot 0.14 = 644$$

- La decisión es entonces plantar tomates ( $d_2$ ).

## Decisión A Posteriori (2)

- Si  $X=0$ , entonces para las decisiones  $d_1$  (plantar papas),  $d_2$  (plantar tomates) se tiene:

$$\begin{aligned}\rho_1(X=0) &= E[L(\theta|X=0, d_1)] = \sum_{i=0,1} L(\theta=i, d_1)\xi(\theta=i|X=0) = \\ &= 500 \cdot 0.5 + 1000 \cdot 0.5 = 750\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2(X=0) &= E[L(\theta|X=0, d_2)] = \sum_{i=0,1} L(\theta=i, d_2)\xi(\theta=i|X=0) = \\ &= 700 \cdot 0.5 + 300 \cdot 0.5 = 500\end{aligned}$$

- La decisión sería entonces plantar papas ( $d_1$ ).

# Política De Decisiones

- Entonces podemos construir una política de decisión  $\delta: X \rightarrow D$  que nos reporte la decisión óptima para cada posible valor de  $X$ :

$$\delta(X) = \begin{cases} d_2 & \text{Si } X = 1 \\ d_1 & \text{Si } X = 0 \end{cases}$$

- ¿Cuál es el beneficio esperado total de usar esta política de decisiones?

# Riesgo Global (1)

- Podemos derivar el beneficio, promediando el riesgo Bayes para cada valor de  $X$ . Observemos primero que:

$$\rho(x) = \sum_{\theta} L(\theta, \delta(x)) \xi(\theta|x)$$

- Si tomamos el valor esperado de  $\rho(x)$  se tiene:

$$\rho = E[\rho(x)] = \sum_x \rho(x) P(X = x)$$

## Riesgo Global (2)

- Pero del teorema de Bayes se deduce que:

$$\xi(\theta|X = x) \cdot P(X = x) = P(X = x|\theta) \cdot \xi(\theta)$$

- Luego, reemplazando se tiene:

$$\rho(\delta) = \sum_x \sum_{\theta} L(\theta, \delta(x)) P(X = x|\theta) \xi(\theta)$$

## Riesgo Global (3)

- Finalmente para el caso del agricultor, el beneficio total esperado es:

$$\begin{aligned} &L(d_1, \theta = 1)P(X = 0|\theta = 1)\xi(\theta = 1) + L(d_1, \theta = 0)P(X = 0|\theta = 0)\xi(\theta = 0) + \\ &L(d_2, \theta = 1)P(X = 1|\theta = 1)\xi(\theta = 1) + L(d_2, \theta = 1)P(X = 1|\theta = 0)\xi(\theta = 0) = \\ &500 \cdot 0.2 \cdot 0.75 + 1000 \cdot 0.6 \cdot 0.25 + \\ &700 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 300 \cdot 0.4 \cdot 0.25 = 675 \end{aligned}$$



# Valor De La Información (1)

- El beneficio total calculado en la parte anterior tiene sentido si tuviéramos conocimiento de las posibles respuestas del amigo agricultor.
- Si no tuviéramos la información, deberíamos usar solo la información a priori del pronóstico con un beneficio esperado de 625, plantando papas.
- Si tuviéramos que pagarle a nuestro amigo agricultor, ¿cuánto deberíamos estar dispuestos a darle?

## Valor De La Información (2)

- La respuesta es:

$$675 - 625 = 50$$

# Resumen De La Teoría (1)

- Un problema de decisiones se caracteriza por un conjunto de decisiones  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ , un conjunto de estados de la naturaleza  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  con una ley de probabilidades  $\xi(\theta)$  y una función de pérdida  $L: \Theta \times D \rightarrow [0, \infty)$  para cada combinación de decisión y evento.
- Una decisión  $d$  se dirá inadmisibile si existe una decisión  $d^*$  tal que  $L(\theta, d^*) \leq L(\theta, d) \forall \theta$ .

## Resumen De La Teoría (2)

- El riesgo esperado para la decisión  $d_j$  es:

$$\rho_j = R(\theta, d_j) = E[L(\theta, d_j)] = \sum_{\Theta} L(\theta, d_j) \xi(\theta)$$

- Una decisión  $d_l$  se dirá decisión Bayes (o priori) si:

$$\rho_l = \min_j \rho_j$$

- Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  información muestral, y sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$  la ley de probabilidades en función del estado de la naturaleza  $\theta$ . Entonces la ley  $\xi(\theta | X)$  se puede obtener a través del teorema de Bayes.

# Resumen De La Teoría (3)

- El riesgo esperado para la decisión  $d_j$  es:

$$\rho_j = R(\theta, d_j) = E[L(\theta, d_j)] = \sum_{\Theta} L(\theta, d_j) \xi(\theta)$$

- Una decisión  $d_l$  se dirá decisión Bayes (o priori) si:

$$\rho_l = \min_j \rho_j$$

- Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  información muestral, y sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$  la ley de probabilidades en función del estado de la naturaleza  $\theta$ . Entonces la ley a posteriori  $\xi(\theta | X)$  se puede obtener a través del teorema de Bayes
- Se define el riesgo a posteriori como:

$$\rho(X) = \sum_{\Theta} L(\theta, d) \xi(\theta | x)$$

# Resumen De La Teoría (4)

- Sea  $\delta: X \rightarrow D$  una política de decisiones Bayes, entonces el riesgo esperado de la política de decisiones es:

$$\rho(\delta) = \sum_x \sum_{\theta} L(\theta, \delta(x)) P(X = x | \theta) \xi(\theta)$$

- El valor de la información es:

- $VI = \rho_{\text{priori}} - \rho(\delta)$

si se trabaja con pérdidas

- $VI = \rho(\delta) - \rho_{\text{priori}}$

si se trabaja con beneficios