

MA34B – Primavera 2004**Guía de ejercicios: Teoría de decisiones y estimadores de Bayes**

P1) Una empresa de productos electrónicos está decidiendo si va a producir o no un nuevo implemento de comunicación. La decisión de producir el implemento (que denotaremos por " a_1 " implica una inversión de US\$ 5 millones y la demanda por un implemento de éste tipo es desconocida. Si la demanda es alta, la empresa espera un retorno de US\$ 2 millones anuales durante 5 años. Si la demanda es moderada , el retorno será de US\$ 1,6 millones durante cuatro años. Y una demanda baja significa un retorno de US\$ 0,8 millones anuales durante cuatro años. Bajo el supuesto de que la tasa de interes es de 10% se calcularon los valores actuales netos de los flujos, lo que arroja la siguiente tabla de pagos (en millones de US\$).

Si la Demanda es	producir a_1	no producir a_2
Alta	2.58	0
Moderada	0.07	0
Baja	-2.46	0

Se estima que la probabilidad de tener demanda baja es de 0,1 y la probabilidad de una demanda alta de 0,5.

- a) ¿Cuál es la decisión bayesiana?
- b) Se tiene a disposición una investigación con un costo de US\$ 75.000 que tiene las siguientes características:

Los resultados del estudio se muestran favorables o desfavorables con las siguientes probabilidades.

Si la Demanda es	favorable	desfavorable
Alta	0.9	0.1
Moderada	0.5	0.5
Baja	0.0	1.0

¿ Debe la empresa realizar la investigación?

Solución:

Sean θ_1 = Demanda Alta
 θ_2 = Demanda Moderada
 θ_3 = Demanda Baja

La matriz de pagos es:

	d_1	d_2
θ_1 :	$w_{11} = 2,58$	$w_{12} = 0$
θ_2 :	$w_{21} = 0,07$	$w_{22} = 0$
θ_3 :	$w_{31} = -2,46$	$w_{32} = 0$

Del enunciado se tiene que para cada escenario de demanda, las probabilidades son:

$$\xi_1 = P(\theta = \theta_1) = 0,5$$

$$\xi_3 = P(\theta = \theta_3) = 0,1$$

Como los 3 escenarios de demanda son los únicos posibles:

$$\sum P(\theta = \theta_i) = 1 \Rightarrow \xi_2 = P(\theta = \theta_2) = 1 - P(\theta = \theta_1) - P(\theta = \theta_3) = 1 - 0,5 - 0,1 = 0,4$$

$$\therefore \xi_2 = P(\theta = \theta_2) = 0,4$$

a) La decisión Bayesiana corresponde a la decisión tomada a priori. Para cada decisión a_i ($i=1,2$), el pago esperado es:

$$a_1: \quad \rho_1 = w_{11}\xi_1 + w_{21}\xi_2 + w_{31}\xi_3 = 2,58 \cdot 0,5 + 0,07 \cdot 0,4 - 2,46 \cdot 0,1 = 1,702$$

$$a_2: \quad \rho_2 = w_{12}\xi_1 + w_{22}\xi_2 + w_{32}\xi_3 = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \text{ para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_1 > \rho_2$, se elige la decisión a_1

b) Sea $x=1$ si el estudio resulta favorable y $x=0$ si no es favorable. Del enunciado, las probabilidades de los resultados del estudio dados los escenarios de demanda son:

$$P(x=1/\theta = \theta_1) = 0,9$$

$$P(x=1/\theta = \theta_2) = 0,5$$

$$P(x=1/\theta = \theta_3) = 0,0$$

$$P(x=0/\theta = \theta_1) = 0,1$$

$$P(x=0/\theta = \theta_2) = 0,5$$

$$P(x=0/\theta = \theta_3) = 1,0$$

Debemos la probabilidad a posteriori de los escenarios de demanda condicionados a la información otorgada por el estudio:

Para $x = 1$:

$$\xi_1(x=1)=\xi(\theta=\theta_1/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_2(x=1)=\xi(\theta=\theta_2/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_3(x=1)=\xi(\theta=\theta_3/x=1)= \frac{P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}{P(x=1/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=1/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=1/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

Para $x = 0$:

$$\xi_1(x=0)=\xi(\theta=\theta_1/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_2(x=0)=\xi(\theta=\theta_2/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

$$\xi_3(x=0)=\xi(\theta=\theta_3/x=0)= \frac{P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}{P(x=0/\theta = \theta_1) \cdot P(\theta = \theta_1)+P(x=0/\theta = \theta_2) \cdot P(\theta = \theta_2)+P(x=0/\theta = \theta_3) \cdot P(\theta = \theta_3)}$$

Los resultados obtenidos son:

$$\xi(\theta = \theta_1 / x = 1) = 0,69 \quad \xi(\theta = \theta_1 / x = 0) = 0,14$$

$$\xi(\theta = \theta_2 / x = 1) = 0,31 \quad \xi(\theta = \theta_2 / x = 0) = 0,57$$

$$\xi(\theta = \theta_3 / x = 1) = 0 \quad \xi(\theta = \theta_3 / x = 0) = 0,29$$

Luego, los pagos esperados actualizados con las nuevas probabilidades de demanda son:

Para $x=1$:

$$\begin{aligned} a_1 : \quad \rho_1(x=1) &= w_{11}\xi_1(x=1) + w_{21}\xi_2(x=1) + w_{31}\xi_3(x=1) \\ &= 2,58 \cdot 0,69 + 0,07 \cdot 0,31 - 2,46 \cdot 0 = 1,802 \end{aligned}$$

$$a_2 : \quad \rho_2(x=1) = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_1(x=1) > \rho_2(x=1)$, se elige la decisión a_1

Para $x=0$:

$$\begin{aligned} a_1 : \quad \rho_1(x=0) &= w_{11}\xi_1(x=0) + w_{21}\xi_2(x=0) + w_{31}\xi_3(x=0) \\ &= 2,58 \cdot 0,14 + 0,07 \cdot 0,57 - 2,46 \cdot 0,29 = -0,31 \end{aligned}$$

$$a_2 : \quad \rho_2(x=1) = 0 \quad (\text{ya que } w_{i2} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3)$$

Como $\rho_2(x=1) > \rho_1(x=1)$, se elige la decisión a_2

La política de decisiones " δ " entonces es la siguiente:

$$\delta = \begin{cases} a1 & \text{si } x=1 \\ a2 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

El pago global esperado de acuerdo a la anterior decisión es:

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= \xi_1 \cdot w_{11} \cdot P(x=1/\theta=\theta_1) + \xi_2 \cdot w_{21} \cdot P(x=1/\theta=\theta_2) + \xi_3 \cdot w_{31} \cdot P(x=1/\theta=\theta_3) \\ &= 0,5 \cdot 2,58 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,07 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot (-2,46) \cdot 0 = 1,175 \end{aligned}$$

El valor esperado de la información es entonces:

$$\rho(\delta) - \rho(\text{a priori}) = \rho(\delta) - \rho_1 = 1,175 - 1,072 = 0,103 = \text{US\$ } 103.000 > \text{US\$ } 75.000$$

\Rightarrow Conviene realizar la investigación.

P2) Supóngase que el número de defectos en una cinta magnética de grabación de 1200 pies tiene una distribución de Poisson con media θ desconocida y que la distribución inicial de θ es una distribución Gamma con parámetros $\alpha=3$ y $\beta=1$. Cuando se seleccionan cinco cintas al azar y se inspeccionan, el número de defectos que resultan son 2,2,6,0 y 3. Si se utiliza la función de pérdida del error cuadrático. ¿Cuál es la estimación Bayes para θ ?

Solución:

Sea $x_i = n^\circ$ de defectos, luego x_i sigue una $Poisson(\theta)$. Además la distribución a priori de θ es una $Gamma(\alpha=3, \beta=1)$. La distribución conjunta de "x" es entonces:

$$f_n(x/\theta) = \prod f(x_i/\theta) = P(X=x_i/\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$$

y la distribución a priori de θ es:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \text{ y del enunciado } x_1=2, x_2=2, x_3=6, x_4=0, x_5=3 \text{ (n=5)}$$

∴ La distribución a posteriori de θ dado x es proporcional al producto de la distribución conjunta de "x" con la distribución a priori de θ , es decir:

$$\begin{aligned} \xi(\theta/x) &\propto f_n(x/\theta) \cdot \pi(\theta) \\ \xi(\theta/x) &\propto \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta} \cdot \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \\ \xi(\theta/x) &\propto \theta^{\sum x_i + \alpha - 1} e^{-(n+\beta)\theta} \end{aligned}$$

Reconociendo términos, se observa que $\xi(\theta/x)$ corresponde a una distribución Gamma de parámetros $\alpha' = \sum x_i + \alpha$, y $\beta' = n + \beta$. Como se tiene función de pérdida del error cuadrático, el estimador de Bayes es la esperanza de la distribución a posteriori. En el caso de una distribución Gamma:

$$E[\theta/x] = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\sum x_i + \alpha}{n + \beta} = \frac{13 + 3}{5 + 1} = \frac{16}{6}$$

NOTA: En el estudio de la proporcionalidad se consideran sólo aquellos términos que involucran a θ , ya que los demás se consideran constantes.

P3) Suponga que una empresa quiere decidir si lanzar o no un producto al mercado. Hay dos estados de la naturaleza descritos por una demanda débil y una fuerte. Suponga que la función de pérdida viene dada por:

	Θ_1	Θ_2
d_1	0	L_1
d_2	L_2	0

donde Θ_1 es la demanda débil
 Θ_2 es la demanda fuerte
 d_1 la decisión de no lanzar el producto al mercado
 d_2 la decisión de lanzar el producto al mercado

Suponga que los conocimientos a priori que la empresa tiene de los estados de la naturaleza vienen dados por $P(\Theta_1) = \alpha$ y $P(\Theta_2) = 1 - \alpha$. Sea X la variable aleatoria definida por

$X = 1$ si un cliente compra el producto
 $X = 0$ si el cliente no compra el producto

Suponga que las distribuciones condicionales de X bajo los dos estados de la naturaleza vienen dadas por :

$$\begin{aligned} P(X=1/\Theta_1) &= 0.25 & P(X=0/\Theta_1) &= 0.75 \\ P(X=1/\Theta_2) &= 0.80 & P(X=0/\Theta_2) &= 0.20 \end{aligned}$$

La empresa puede probar el mercado del producto para revisar su probabilidad a priori sobre el estado de la demanda (Θ_1 y Θ_2).

a) Antes de hacer una prueba de mercado. ¿Cuál sería la decisión bayesiana de la empresa si $L_1 = L_2$?

b) Suponga que la empresa prueba el producto con un cliente y el cliente lo compra. ¿Cuál es la decisión bayesiana, suponiendo que $L_1 = L_2$?

c) Suponga que $\alpha = 0.5$, con lo que inicialmente la empresa empieza con los mismos conocimientos a priori sobre que la demanda sea débil o fuerte. Suponga que el producto lo prueban 5 clientes y que los valores de X observados son 1,1,0,1,0. ¿Cuál es el valor de α a posteriori ? Suponiendo que $L_1 = L_2$ ¿Cuál es la decisión bayesiana de la empresa? ¿Cuál es el valor que la empresa da a la información muestral (prueba de mercado) en este caso?

Solución:

Se tiene la tabla de pagos:

	d_1	d_2
θ_1	$w_{11}=0$	$w_{12}=L_2$
θ_2	$w_{21}=L_1$	$w_{22}=0$

Donde $\xi_1=P(\theta_1)=\alpha$, y $\xi_2=P(\theta_2)=1-\alpha$

a) La decisión bayesiana a priori en este caso es aquella que minimiza la función de pérdida esperada

$$d_1: \rho_1 = w_{11}\xi_1 + w_{21}\xi_2 = 0 \cdot \alpha + L_1 \cdot (1-\alpha) = L_1 \cdot (1-\alpha)$$

$$d_2: \rho_2 = w_{12}\xi_1 + w_{22}\xi_2 = L_2 \cdot \alpha + 0 \cdot (1-\alpha) = L_2 \cdot \alpha$$

Como $L_1=L_2=L$, la decisión a tomar depende de α .

Si $\alpha = 0,5$ se elige d_1 o d_2

Si $\alpha < 0,5$ se elige d_2

Si $\alpha > 0,5$ se elige d_1

b) Para la decisión a posteriori se debe incorporar la información muestral de compra del cliente

Sea $X=1$ si el cliente compra y $X=0$ si no. Luego X sigue una distribución de Bernoulli. Las probabilidades para cada uno de estos valores dados θ_1 y θ_2 se encuentran en el enunciado. Luego, actualizamos las probabilidades de estado usando el teorema de Bayes:

$$\xi_1(X=1) = P(\theta_1 / X=1) = \frac{P(X=1/\theta_1) \cdot P(\theta_1)}{\sum_j P(X=1/\theta_j) \cdot P(\theta_j)} = \frac{0.25\alpha}{0.25\alpha + 0.80(1-\alpha)}$$

$$\xi_2(X=1) = P(\theta_2 / X=1) = 1 - P(\theta_1 / X=1) = \frac{0.80\alpha}{0.25\alpha + 0.80(1-\alpha)}$$

$$d_1: \rho_1(X=1) = w_{11}\xi_1(X=1) + w_{21}\xi_2(X=1) = \frac{0.80\alpha}{0.25\alpha + 0.80(1-\alpha)} L_1$$

$$d_2: \rho_2(X=1) = w_{12}\xi_1(X=1) + w_{22}\xi_2(X=1) = \frac{0.25\alpha}{0.25\alpha + 0.80(1-\alpha)} L_2$$

Como $L_1=L_2$, y el denominador es siempre mayor que 0 para todo α , debemos mirar los numeradores para decidir en función de α . Luego :

Si $\alpha=0.76$ se elige d_1 o d_2

Si $\alpha<0.76$ se elige d_2 , ya que $\rho_2 < \rho_1$

Si $\alpha>0.76$ se elige d_1 , ya que $\rho_1 < \rho_2$

c) El desarrollo es el mismo que en la parte anterior, lo único que cambia es la información muestral.

En este caso, si identificamos a cada cliente con un subíndice para X , se tiene:

$X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0$. Para calcular α a posterior se hace uso del teorema de Bayes:

$$P(\theta_1 / X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0) = \frac{P(X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0 / \theta_1)P(\theta_1)}{\sum_j P(X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0 / \theta_j)P(\theta_j)} =$$

$$\frac{P(X_1=1 / \theta_1)P(X_2=0 / \theta_1)P(X_3=0 / \theta_1)P(X_4=1 / \theta_1)P(X_5=0 / \theta_1)P(\theta_1)}{\sum_j P(X_1=1 / \theta_j)P(X_2=0 / \theta_j)P(X_3=0 / \theta_j)P(X_4=1 / \theta_j)P(X_5=0 / \theta_j)P(\theta_j)}$$

$$= \frac{0.25^3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.5}{0.25^3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.5 + 0.80^3 \cdot 0.20^2 \cdot 0.5} = 0.30$$

$$P(\theta_2 / X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0) = 1 - P(\theta_1 / X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1, X_5=0) = 0.70$$

Suponiendo $L_1=L_2=L$, las pérdidas esperadas para cada decisión son:

$$d_1: \rho_1(\mathbf{X}) = w_{11}\xi_1(\mathbf{X}) + w_{21}\xi_2(\mathbf{X}) = 0.7 \cdot L$$

$$d_2: \rho_2(\mathbf{X}) = w_{12}\xi_1(\mathbf{X}) + w_{22}\xi_2(\mathbf{X}) = 0.3 \cdot L$$

Como $\rho_2(\mathbf{X}) < \rho_1(\mathbf{X}) \Rightarrow$ elegimos d_2

d) Al hacer una sola observación sin saber el resultado, tenemos 2 casos:

Si $X=1$:

Utilizamos los resultados de la parte b) para $\alpha = 0.5$, de donde:

$$P(\theta_1/X=1) = 0.24, \text{ y } P(\theta_2/X=1) = 1 - P(\theta_1/X=1) = 1 - 0.24 = 0.76$$

Las pérdidas esperadas son:

$$d_1: \rho_1(X=1) = w_{11}\xi_1(X=1) + w_{21}\xi_2(X=1) = 0.76 \cdot L$$

$$d_2: \rho_2(X=1) = w_{12}\xi_1(X=1) + w_{22}\xi_2(X=1) = 0.24 \cdot L \Rightarrow \text{elegimos } d_2$$

Si $X=0$, hacemos el desarrollo análogo a la parte b) pero para $X=0$, obteniendo:

$$P(\theta_1/X=0) = 0.79, \text{ y } P(\theta_2/X=0) = 1 - P(\theta_1/X=0) = 1 - 0.79 = 0.21$$

Las pérdidas esperadas son:

$$d_1: \rho_1(X=0) = w_{11}\xi_1(X=0) + w_{21}\xi_2(X=0) = 0.21 \cdot L \Rightarrow \text{elegimos } d_1$$

$$d_2: \rho_2(X=0) = w_{12}\xi_1(X=0) + w_{22}\xi_2(X=0) = 0.79 \cdot L$$

Luego, la política de decisiones es:

$$\delta = \begin{cases} d_1 & \text{si } X=0 \\ d_2 & \text{si } X=1 \end{cases}$$

Se calcula ahora la pérdida esperada de la política de decisiones:

$\rho(\delta) = \sum_i \sum_j w_{ij} \xi_i P(X = X(d_j) / \theta_i)$, donde $X=X(d_j)$ proviene de la política de decisiones, y corresponde al valor de X cuando se eligió la decisión d_j , es decir $j=1,2$ puesto que en la política de decisiones sólo aparecen las decisiones d_1 y d_2 . Luego:

$$\rho(\delta) = w_{11}\xi_1 P(X=X(d_1)/\theta_1) + w_{21}\xi_2 P(X=X(d_1)/\theta_2) + w_{12}\xi_1 P(X=X(d_2)/\theta_1) + w_{22}\xi_2 P(X=X(d_2)/\theta_2)$$

=>

$$\rho(\delta) = w_{11}\xi_1 P(X=0/\theta_1) + w_{21}\xi_2 P(X=0/\theta_2) + w_{12}\xi_1 P(X=1/\theta_1) + w_{22}\xi_2 P(X=1/\theta_2) = 0 \cdot 0.5 \cdot 0.75 + L \cdot 0.5 \cdot 0.20 + L \cdot 0.5 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 \cdot 0.80 = 0.225 \cdot L$$

De la parte a), la pérdida a priori es $\rho_{\text{priori}} = 0.5 \cdot L$, luego el valor de la información es:

$$VI = \rho_{\text{priori}} - \rho(\delta) = 0.5 \cdot L - 0.225 \cdot L = 0.275 \cdot L$$

P4) La longitud del tiempo que una persona debe esperar el bus cada mañana para ir al trabajo, se distribuye uniformemente en el intervalo $(0, \theta)$, donde θ es desconocida y su distribución a priori es Pareto con parámetros $\theta_0 > 0$ y α .

a.- Se decide tomar una muestra de tamaño n , X_1, \dots, X_n . Demuestre que la distribución a posteriori de Θ dada la muestra es una distribución de Pareto con parametro θ_0' y $\alpha + n$ donde $\theta_0' = \max\{\theta_0, x_1, \dots, x_n\}$.

b.- Se pide determinar el estimador Bayes de θ utilizando la función de pérdida del error cuadrático.

c.- Suponga que $\alpha = 1$. ¿ Cuantas mañanas debe observar el tiempo de espera, para estar capacitado para especificar un intervalo de 0,01 unidades de tiempo, tal que la probabilidad de que el valor desconocido de $\text{Log}[\Theta/\theta_0']$ caiga en este intervalo sea a lo menos 0,95?

d.- Considere una muestra de tamaño n , X_1, \dots, X_n y determine el estimador máximo verosímil de θ_0 de la distribución de Pareto cuando α es conocido.

Nota:

1. Se dice que la v.a. se distribuye Pareto con parámetros x_0 y α si su f.d.p. es:

$$f(x/x_0, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x_0 \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución:

- a) Sea X = longitud de tiempo que se espera el bus, luego X sigue una distribución uniforme en $(0, \theta)$. Además, sabemos que θ se distribuye según una Pareto de parámetros $\theta_0 > 0$ y α , es decir:

$$f(x_i/\theta) = 1/\theta \quad \text{cuando } 0 < x_i < \theta, \text{ y } 0 \text{ en otro caso.}$$

La función de verosimilitud es $f_n(x/\theta) = 1/\theta^n$ cuando todos los x_i son menores que θ , o lo que es lo mismo, cuando $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} < \theta$ y 0 en otro caso.

$$\pi(\theta/\theta_0, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & \text{si } \theta_0 \leq \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sabemos que:

$$\xi(\theta/X) = \frac{f_n(X/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Omega} f_n(X/\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}}{\int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} d\theta}$$

La expresión anterior es válida siempre y cuando θ cumpla las 2 condiciones de bode de cada función de distribución, es decir, $\theta > \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\theta \geq \theta_0$, que es lo mismo que $\theta > \theta_0' = \max\{\theta_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Luego los límites de integración son $\theta_0' = \max\{\theta_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y ∞ .

Al integrar entre estos límites se obtiene que $\xi(\theta/x)$ es una Pareto con los parámetros indicados en el enunciado.

- b) Bajo pérdida cuadrática, el estimador de Bayes es la esperanza de la variable θ/X . Como la esperanza de una Pareto no aparece en tablas, es necesario calcularla a partir de la f.d.p.:

$E[\theta/X] = \int_{\Omega} \theta \xi(\theta/X) d\theta$, y los límites de integración son los mismo de la parte anterior. Se obtiene de la integración:

$$\theta^* = E[\theta/X] = \frac{n + \alpha}{n + \alpha - 1} \theta_0'$$

- c) La expresión a calcular era la siguiente:

$$P(0 \leq \ln(\theta/\theta_0') \leq 0.01) \geq 0.95$$

$$P(e^0 \leq \theta/\theta_0' \leq e^{0.01}) \geq 0.95$$

$$P(1 \leq \theta/\theta_0' \leq e^{0.01}) \geq 0.95$$

De donde $P(\theta_0' \leq \theta \leq \theta_0' e^{0.01}) \geq 0.95$. Usando $\alpha = 1$ la probabilidad se resuelve por medio de la integral de la f.d.p. :

$$P(\theta_0' \leq \theta \leq \theta_0' e^{0.01}) = \int_{\theta_0'}^{\theta_0' e^{0.01}} \pi(\theta) d\theta \geq 0.95$$

El desarrollo de la integral da por resultado que $n \geq 299$

d) Se tiene que $X \sim \text{Pareto}(\theta_0, \alpha)$, luego:

$$f(x_i / \theta_0, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} & \text{si } \theta_0 \leq x_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de verosimilitud es $f_n(X/\theta_0, \alpha) = \frac{(\alpha \theta_0^\alpha)^n}{\prod_i x_i^{\alpha+1}}$, cuyo máximo no se puede obtener por

derivación. Sabemos que $\theta_0 \leq x_i$ para $i=1, \dots, n$. Luego, la función de verosimilitud se maximizará cuando θ_0 alcance su máximo valor, y esto ocurrirá cuando $\theta_0 = \min\{x_i\}$ (de las restricciones planteadas).