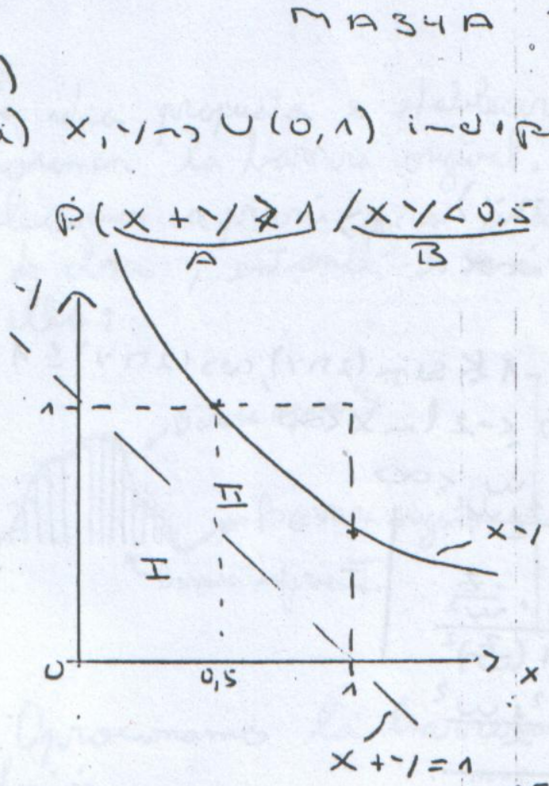
Examen $\qquad$ F. Lemu F.

MA34A 2004/1

1)

a) $X, Y \sim U(0,1)$ independientes

$$P(\underbrace{X+Y \geq 1}_{A} \,/\, \underbrace{XY < 0{,}5}_{B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\iint_{II} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx}{\iint_{I\cup II} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx}$$



$f_{XY}(x,y) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1$

$$P(A\cap B) = \iint_{II} 1\cdot dy\,dx = \int_0^{0{,}5}\int_{1-x}^{1} dy\,dx + \int_{0{,}5}^{1}\int_{1-x}^{\frac{0{,}5}{x}} dy\,dx = -\frac{1}{8} + \frac{\ln 2}{2} = 0{,}22$$

$$P(B) = \iint_{I\cup II} 1\,dy\,dx = \int_0^{0{,}5}\int_0^{1} dy\,dx + \int_{0{,}5}^{1}\int_0^{0{,}5/x} dy\,dx = \frac{3}{8} + \frac{\ln 2}{2} = 0{,}72$$

o bien $P(B) = P(A\cap B) + 1/2$ (triangulo I)

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{-\frac{1}{8} + \frac{\ln 2}{2}}{\frac{3}{8} + \frac{\ln 2}{2}} = \frac{4\ln 2 - 1}{4\ln 2 + 3} = 0{,}31$$

y en el exponente se reconoce una suma inferior de Riemann, que por ser

b) $X, Y \rightsquigarrow U(0,1)$

$$Z = (-2\ln X)^{1/2}\,\mathrm{sen}(2\pi Y) \Rightarrow \frac{Z}{W} = \mathrm{tg}(2\pi Y) \Rightarrow$$

$$W = (-2\ln X)^{1/2}\cos(2\pi Y) \qquad Z^2+W^2 = -2\ln X$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Z}{W}\right) ; \quad 0 \le X, Y \le 1 \Rightarrow -1 \le \mathrm{sen}(2\pi Y), \cos(2\pi Y) \le 1$$

$$X = e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} \qquad 0 \le -2\ln X < \infty$$

$$\Rightarrow -\infty < Z, W < \infty$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} & -w e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} \\ \frac{1}{2\pi}\frac{1 \cdot \frac{1}{w}}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2} & \frac{1}{2\pi}\frac{1 \cdot \frac{-z}{w^2}}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^2}{2\pi\left(1+\left(\frac{z}{w}\right)^2\right)} + \frac{e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}}{2\pi\left(1+\left(\frac{z}{w}\right)^2\right)} = \frac{e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}}{2\pi}$$

$$\text{TCV. } f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x(z,w), y(z,w)) \cdot |J|$$

$$f_{XY}(x,y) = 1 \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}}{2\pi} = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = f_Z(z) \cdot f_W(w)$$

$$-\infty < z, w < \infty$$

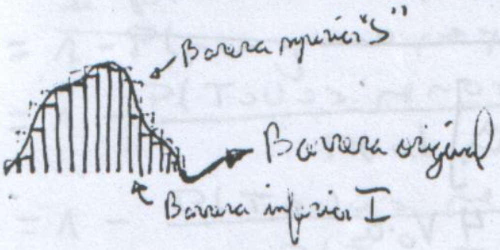
$$\Rightarrow Z, W \rightsquigarrow N(0,1), \text{ como } f_{ZW}(z,w) = f_Z(z)\, f_W(w)$$

$\Rightarrow Z, W$ son independientes

Pregunta 2/

a) La idea propuesta es establecer un conjunto de barreras rectangulares que aproximen la barrera original. Para hacer ésto de la mejor manera posible, establecemos a priori que si una barrera es superior en altura a toda la pos de otra, entonces es más difícil (en probabilidad) cruzarla.

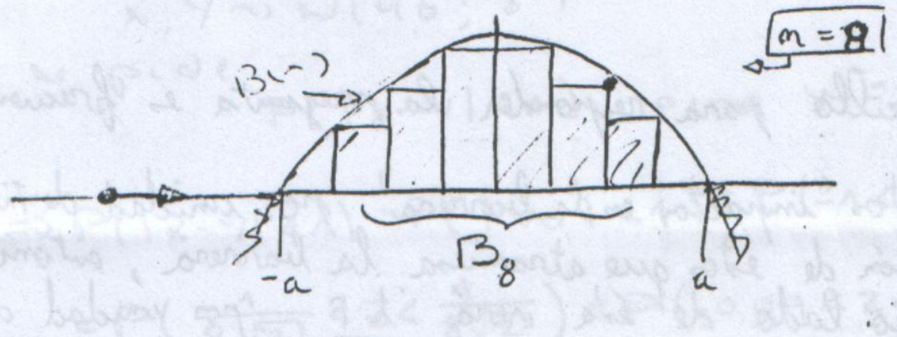
Por ello:



La probabilidad de cruce asociada a una barrera arbitraria está entre las probabilidades de cruce de un conjunto de barreras rectangulares inferiores y superiores.

- Aproximamos la barrera parabólica inferiormente por medio de la función

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf\{B(x)/x\in[-a+\tfrac{2a}{n}k, -a+\tfrac{2a}{n}(k+1)]\}\,\mathbb{1}_{[-a+\frac{2a}{n}k,\, -a+\frac{2a}{n}(k+1)]}(x)$$ (entre - y a



El procedimiento de aproximación es entonces análogo al de una suma inferior de Riemann.

∴ Aproximamos la probabilidad de cruce total como la probabilidad de cruce de el conjunto de barreras sucesivas que componen $B_n(x)$. Por independencia entre barreras que se ubican en lugares distintos afirmamos:

$$P(\underset{B(x)}{\text{cruce}}) = \lim_{n\to\infty} P(\text{cruce de } B_n(x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} e^{-c\cdot \inf\{B(x)/x\in[-a+\frac{2a}{n}k,\, -a+\frac{2a}{n}(k+1)]\}\cdot \frac{2a}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-c\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \inf\{\ \text{''}\ \}\cdot \frac{2a}{n}}}$$

y en el exponente se reconoce una suma inferior de Riemann, que por ser

$-a$ $\quad B_8 \quad$ a

El procedimiento de aproximación es entonces análoga al de una suma inferior de Riemann.

$\therefore$ Aproximamos la probabilidad de cruce total como la probabilidad de cruce de el conjunto de barreras sucesivas que componen $B_n(x)$. Por independencia entre barreras que se ubican en lugares distintos afirmamos:

$$P(\text{cruce}_{B(x)}) = \lim_{n\to\infty} P(\text{cruce de } B_n(x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} e^{-c\cdot \inf\{B(x)\,/\,x\in[-a+\frac{2a}{n}k,\ -a+\frac{2a}{n}(k+1)]\}\cdot\frac{2a}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-c\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \inf\{\ \%\ \}\cdot\frac{2a}{n}}}$$

y en el exponente se reconoce una suma inferior de Riemann, que por ser $B(x)$ una parábola (y por ende Riemann integrable en el intervalo acotado $[-a, a]$) converge a:

$$\int_{-a}^{a} B(x)\,dx$$

(El argumento sigue válido si se usan sumas superiores

$$P(\text{cruce } B(x)) = e^{-c\cdot\int_{-a}^{a} B(x)\,dx}$$

El argumento también es extensible al caso de una barrera continua, integrando en ese caso entre los límites de la barrera

$$\int_{-a}^{a} B(x)\,dx = \int_{-a}^{a} -\frac{V_0}{a^2}(x^2-a^2)\,dx = \frac{-V_0}{a^2}\left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-a}^{a} - a^2\cdot 2a\right]$$

$$= \frac{-V_0}{a^2}\left[\frac{2}{3}a^3 - 2\cdot a^3\right] = \frac{4}{3}V_0\cdot a$$

$$\Rightarrow P(\text{cruce } B(x)) = e^{-\frac{4}{3}c\cdot a}$$

b) Un argumento muy sencillo para responder la pregunta es frecuentista.

Si λ representa el Nº de eventos "impactos en la barrera" por unidad de tiempo, y "P" representa la fracción de éstos que atraviesa la barrera, entonces el número detectado al otro lado de ésta será "$\lambda\cdot P$", por unidad de tiempo; es decir, la tasa de detección.

Examen

MA34A 2004/1

F. Lema F.

3)

a) Sea X: Edad(años) $X \sim N(46; 8^2)$

i) Si la población es grande las extracciones se pueden considerar independientes.

Se pide P(al menos uno mayor 50 / al menos uno menor 50) =

= 1 - P(ninguno mayor 50 / al menos uno menor 50)

$$= 1 - \frac{P(\text{Todos menor } 50 \wedge \text{al menos uno menor } 50)}{P(\text{al menos uno menor } 50)}$$

$$= 1 - \frac{P(\text{Todos menor } 50)}{1 - P(\text{Todos mayor } 50)} = 1 - \frac{p^n}{1-(1-p)^n}$$

donde $p = P(X<50) = P\left(Z < \frac{50-46}{8}\right) = P(Z < 1/2) = 0{,}6915$

ii) Sean X Y edades de los dos adultos

$X, Y \sim N(46, 8^2)$

se pide

$P(|X-Y|<1)$ pero $W = X-Y \sim N(0; 2 \cdot 8^2)$

$$\Rightarrow P(|X-Y|<1) = P(|W|<1) = P(-1<W<1) =$$

$$= P\left(\frac{-1}{8\sqrt{2}} < Z < \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) = P(-0{,}09 < Z < 0{,}09) = 0{,}5359 - 0{,}4641$$

$$= 0{,}0818$$

y en el exponente se reconoce una suma inferior de Riemann, que por ser
[illegible] Riemann integrable en el intervalo acotado $[-a, a]$) conv[illegible]

b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $\quad -\infty < x < \infty$

$Y = e^X$ función monótona creciente $\Rightarrow$ T.C.V.

$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dH^{-1}(y)}{dy} \right|$ $\qquad Y = H(X) = e^X \Rightarrow H^{-1}(y) = \ln y$ $\quad \frac{dH^{-1}(y)}{dy} = 1/y$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y}$ $\quad 0 < y < \infty$

$E(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y)\,dy$ complicado usamos teorema para calcular $E(H(X))$

$E(Y) = E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x)\,dx = M_X(t=1)$ (f.g.m.)

si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \Rightarrow E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

c) Si $X = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n \Rightarrow \ln X = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

si n es grande y suponiendo que se cumplen las condiciones $\Rightarrow \ln X \approx> N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow$ por parte anterior $X \sim \log N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad 0 < x < \infty$

falta por determinar μ y σ^2

De lo anterior $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ pero

$E(X) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i \Rightarrow e^{\mu + \sigma^2/2} = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$

de igual forma se prueba que $E(X^2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$

y también $E(X^2) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \prod_{i=1}^{n} (\sigma_i^2 + \mu_i^2)$

$\Rightarrow e^{2\mu + 2\sigma^2} = \prod_{i=1}^{n} (\sigma_i^2 + \mu_i^2)$

resolviendo las ecuaciones para μ, σ^2 se obtiene $\quad \sigma^2 = \ln \prod (1 + \sigma_i^2/\mu_i^2)$

$$\mu = \ln \prod \left(\frac{\mu_i^2}{\sqrt{\mu_i^2 + \sigma_i^2}} \right)$$