

Control 3
MA33A Cálculo Numérico
Otoño 2005

Profesor: Mauricio Telias
Profesor Auxiliar: Cristian Figueroa
23 de Junio de 2005

Problema 1

Resuelva usando Crank Nicolson:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - pu \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \\ u(1, t) &= 1 \quad \forall t \\ \frac{\partial u}{\partial x} - pu &= 0 \quad x = 0, \forall t \\ u(x, 0) &= 0 \quad \forall x\end{aligned}$$

Describa completamente la solución de este problema, justifique cada paso. Deje planteado el problema a resolver, verifique que se puede resolver, dé una idea de cómo hacerlo.

Problema 2

1. Considere la ecuación:

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) \quad a \leq t \leq b \\ y(a) &= \alpha\end{aligned}$$

Se propone el método siguiente:

Escribir la ecuación en su forma integral, luego usar una formula de integración de un punto $\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(\frac{a+b}{2}) + E$.

Plantear un método basado en esta idea. Tome una malla, aproxime con la fórmula integral sobre la malla y encuentre un método. Resulta de un paso?

Ahora, considere la fórmula $\int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(g(a) + g(b)) + E$. Repita el proceso. Encuentra algún problema?

2. Considere la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ u(0, t) &= \text{conocido} = u_0(t) \\ u(1, t) &= \text{conocido} = u_1(t) \\ u(x, 0) &= \text{conocido} = \bar{u}(x)\end{aligned}$$

Se plantea aproximar u en la variable x por diferencias finitas y luego resolver el problema de valores iniciales que queda para cada x_i mediante el método de Euler.

Encuentre las fórmulas y dé un algoritmo de resolución.

Indicación: Dada la malla $\{x_i\}_{i=0}^n$ $x_i = ih$ $i = 0, \dots, N$ al discretizar la ecuación en x queda una ecuación en t para cada uno de los x_i :

$$w'_i(t) = \frac{\sigma}{(\Delta x)^2} (w_{i+1}(t) - 2w_i(t) + w_{i-1}(t))$$

A la que se aplica Euler para sistemas de EDO (Justifíquela antes de usarla)

Problema 3

En lugar de una recta usaremos una parábola para encontrar x_{n+1}

$$S_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)f[x_{n-1}, x_n] + (x - x_n)(x - x_{n-1})f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

x_{n+1} es tal que $S_n(x_{n+1}) = 0$

1. Verificar que dados x_{n-2}, x_{n-1}, x_n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\lambda_n}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_n\mu_n}}$$

Es solución de $\mu_n(x - x_n)^2 + (x - x_n) + \lambda_n = 0$. Con: $\lambda_n = \frac{f(x_n)}{w_n}$ $\mu_n = \frac{f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]}{w_n}$

$$w_n = f[x_{n-1}, x_n] + (x_n - x_{n-1})f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

2. Deducir que el error verifica:

$$e_{n+1} \approx ce_n e_{n-1} e_{n-2} \quad c \in \mathbb{R}$$

por lo que si $\frac{e_{n+1}}{e_n^r} \approx \text{constante}$. Se tiene que $r = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}$. Muestre que el orden es mejor que el de la secante.