

MA33A- Cálculo Numérico
Control 1 Otoño 2005

Profesor: Mauricio Telias
Profesor Auxiliar: Cristian Figueroa
21 de Abril de 2005

Problema 1

1. Se desea evaluar numéricamente la expresión

$$e(n) = \ln((n+1)!) - \ln(n!)$$

cuando n es grande. Para ello se trabaja en el sistema numérico $F(\beta, p, -\infty, +\infty)$

- Encuentre una cota para el error si se evaluara directamente. Considere que para todo $n \in F$, se tiene $n+1 \in F$.
(ind: recuerde que si $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ y $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$)
- Proponga otra manera de evaluar, que entregue a priori un resultado numérico distinto para $e(n)$.

Problema 2

Se desea encontrar un polinomio de interpolación de $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ (por ejemplo $f(z) = z\bar{z}$). Para esto se construye la malla $\{0, i, 2i, 1, 1+i, 1+2i, 2, 2+i, 2+2i\}$

1. Consideremos sólo los reales en la malla, (es decir $\{0, 1, 2\}$) encuentre los polinomios de interpolación de Lagrange $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$. Explícite sus propiedades.
2. Con los 3 polinomios de Lagrange se forma en espacio vectorial de polinomios en \mathbb{C} definido por:

$$E = \{p(z) = p(x + iy) = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} l_i(x) l_j(y) | \alpha_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

Demuestre que la dimensión de E es 9.

3. Demuestre que dado $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe un único polinomio en E que interpola a f en los nodos de la malla compleja.
4. Encontrar un de polinomio de interpolación para $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ basado en lo anterior.

Problema 3

Vimos en clases que la Spline σ se calculaba escribiendo:

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad j = 0, \dots, n$$

Con lo que: $a_j = f(x_j) \quad j = 0, \dots, n$, y

1.

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad j = 0, \dots, n-1$$

2.

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad j = 0, \dots, n-1$$

3.

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad j = 0, \dots, n-1$$

lo que lleva al sistema lineal

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1})c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

Suponga que sabe resolver el sistema lineal, esto es, dados $\{a_j\}_{j=0}^n$ y $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$, puede obtener $\{c_j\}_{j=0}^n$. Escriba un algoritmo para encontrar una función spline en $[a, b]$.

Verificar que todas las soluciones e índices están bien. (Como para escribir un programa)

Problema 4

Considere el intervalo $[a, b]$ y los puntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ de ese intervalo dados por $x_i = a + ih \quad i = 0, \dots, n \quad h \in \mathbb{R}, h > 0$ dado.

Considere una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Considere una aproximación lineal por pedazos g que interpola f . Es decir,

$$g|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \quad \forall i$$

$$\text{y } g(x_i) = f(x_i) \quad \forall i$$

1. Muestre que g se escribe únicamente como $g(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) r_i(x)$ en que

$$r_i(x) \text{ es tal que: } r_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (r = \text{función "techo"})$$

$$r_i(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1$$

$$r_i(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [x_i, x_{i+1}]$$

2. Use esta idea para aproximar $\int_a^b f(x) dx$, es decir, $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx$.