

Determinar A y B:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \overbrace{6Ax}^{\forall x} = kx \Rightarrow A = k/6$$

$$\phi(1) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -k/6$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{k}{6} (x^3 - x)$$

ahora solo basta encontrar $y(x,t)$; y luego
 $u(x,t) = y(x,t) - \phi(x)$

Por Separación de Variables:

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t);$$

$$(3) \Rightarrow \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \cdot X(x) - \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot T(t) = 0 \quad / \div T(t) \cdot X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} / T - \frac{d^2 X}{dx^2} / X = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} / T = \frac{d^2 X}{dx^2} / X = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

obviamente buscamos la solución no trivial:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad \text{con CB nulas} \\ \Rightarrow X(x) = 0 \wedge T(t) = 0$$

\Rightarrow no sirve $\lambda = 0$

$\lambda > 0$ produce soluciones exponenciales que no se anulan 2 veces \Rightarrow No cumple C.B. \Rightarrow solución trivial