

Pauta P3 Control 2 MA26A-5, Otoño 2005

P3 Use la Transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

a) $y'' - y = H_3(x) - H_5(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Solución:

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, y usando sus propiedades de linealidad, y la Transformada de la derivada de una función obtenemos:

$$s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[H_3(x)] - \mathcal{L}[H_5(x)] \quad (5 \text{ pts. })$$

Ahora, usando la fórmula $\mathcal{L}[H_a(x)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$, reordenando los términos de la ecuación y usando las condiciones iniciales, despejamos $\mathcal{L}(y)$, nos queda:

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s^2 - 1)} - \frac{e^{-5s}}{s(s^2 - 1)} + \frac{1}{s - 1} \quad (5 \text{ pts. })$$

Para encontrar y identificamos el término del lado derecho con Transformadas de Laplace de Funciones conocidas.

Usando el método de Fracciones Parciales podemos decir que:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3s}}{s(s^2 - 1)} &= \frac{-e^{-3s}}{s} + \frac{se^{-3s}}{s^2 - 1} \\ \Rightarrow \frac{e^{-3s}}{s(s^2 - 1)} &= \mathcal{L}[-H_3(x)](s) + \mathcal{L}[H_3(x)\cosh(x - 3)](s) \end{aligned}$$

Análogamente,

$$-\frac{e^{-5s}}{s(s^2-1)} = \mathcal{L}[H_5(x)](s) + \mathcal{L}[-H_5(x)\cosh(x-5)](s)$$

Además,

$$\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}[e^x](s)$$

Luego, usando los cálculos anteriores, y la linealidad de la T. de L.

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[H_3(x)(\cosh(x-3)-1) + H_5(x)(1-\cosh(x-5)) + e^x]$$

Finalmente, por la inyectividad de \mathcal{L} , deducimos que:

$$y(x) = H_3(x)(\cosh(x-3)-1) + H_5(x)(1-\cosh(x-5)) + e^x \quad \square$$

(5 pts.)

b) $y'' + y = H_2(x)e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución:

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, y usando sus propiedades de linealidad, y la Transformada de la derivada de una función obtenemos:

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[H_2(x)e^{-2x}]$$

(5 pts.)

Usando una de las fórmulas dadas en el enunciado, más un *niquitanipone* podemos calcular

$$\mathcal{L}[H_2(x)e^{-2x}] = \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2}$$

Ahora usando las propiedades de \mathcal{L} y las condiciones iniciales despejamos $\mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^{-2(s+2)}}{(s+2)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$$

(5 pts.)

Para encontrar y identificamos el término del lado derecho con Transformadas de Laplace de Funciones conocidas.

Usando el método de Fracciones Parciales podemos decir que:

$$\frac{e^{-2(s+2)}}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5} \frac{e^{-2(s+2)}}{(s+2)} - \frac{1}{5} \frac{se^{-2(s+2)}}{(s^2+1)} + \frac{2}{5} \frac{2e^{-2(s+2)}}{(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-2(s+2)}}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5} e^{-2(s+2)} \mathcal{L}[e^{-2x}](s) - \frac{1}{5} e^{-2(s+2)} \mathcal{L}[\cos(x)](s) + \frac{2}{5} e^{-2(s+2)} \mathcal{L}[\sin(x)](s)$$

Además,

$$\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin(x)](s)$$

Luego, usando los cálculos anteriores, la linealidad de la T. de L., y las fórmulas que aparecen en el enunciado

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{-4}}{5} H_2(x) e^{-2(x-2)} - \frac{e^{-4}}{5} H_2(x) \cos(x-2) + \frac{2e^{-4}}{5} H_2(x) \sin(x-2) + \sin(x)\right](s)$$

Finalmente, por la inyectividad de \mathcal{L} , deducimos que:

(5 pts.)

$$y(x) = \frac{e^{-4}}{5} H_2(x) (e^{-2(x-2)} - \cos(x-2) + 2\sin(x-2)) + \sin(x) \quad \square$$