

## Pauta P2 Control 2 MA26A-5, Otoño 2005

P2 Considere la ecuación:

$$y''' + 3y'' + 2y' = f(x) \quad (2)$$

- a) Encuentre el conjunto fundamental de (2) ( 10 pts.).

**Solución:**

Suponemos la solución de la forma  $y = e^{\lambda x}$ . Reemplazando esto en (2), se obtiene la siguiente ecuación para  $\lambda$  (que nos permiten encontrar las raíces del polinomio característico de (2)):

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Como obtenemos 3 soluciones distintas, se concluye que el conjunto fundamental de (2) está dado por:

$$\{1, e^{-x}, e^{-2x}\}.$$

**OBS:** Recordar que el método entrega un conjunto l.i. de soluciones, luego no es necesario probar este hecho.

- b) Encuentre una solución particular de (2) con  $f(x) = e^{-x}$  ( 10 pts.).

**Solución:**

Como  $f(x) = e^{\lambda_2 x}$  es solución de la ecuación homogénea con  $\lambda_2$  raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico de (2), por método visto en clases, podemos afirmar que  $y_p(x) = Ax^1 e^{-x}$  es una solución particular de (2), para cierta constante  $A$ , que debemos determinar.

Para determinar  $A$ , reemplacemos  $y_p$  en (2) (o sea hay que derivar 3 veces  $y_p(x)$ ); hecho lo anterior y luego de simplificar por  $e^{-x}$ , obtenemos la siguiente ecuación:

$$A(3 - x) + 3A(x - 2) + 2A(1 - x) = 1$$

Lo anterior nos dice que  $A = -1$ , por lo tanto, una solución particular de (2) con  $f(x) = e^{-x}$  es

$$y_p(x) = -xe^{-x}.$$

**OBS:** La misma solución se podía encontrar usando el método de Variación de Parámetros (pues conocemos el conjunto fundamental de (2)), el puntaje para éste y otros métodos no varía con respecto al que recibe la solución dada en la pauta (esto si la aplicación del método alternativo esta correcta).

- c) Encuentre la solución general de (2) con  $f(x) = e^{-x}$  ( 10 pts.).

**Solución:**

De la parte a), la solución homogénea de la ecuación está dada por:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

donde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Sabemos que la solución general  $y_G$  de (2) con  $f(x) = e^{-x}$  está dada por  $y_G = y_h + y_p$ , esto es,

$$y_G(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} - x e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$