Resumen Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A Cálculo de Variaciones

Profesor: Leonardo Sanchez, Auxiliares: Jorge Lemus,Oscar Peredo

15 de junio de 2005

1. Problemas Variacionales
   El objetivo es encontrar las funciones $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(I, \mathbb{R})$, que minimizan o maximizan el siguiente funcional:

$$J(x) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t))dt$$

   ,donde $L : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y diferenciable al menos una vez en cada coordenada.
   Para efectos prácticos, se considerará que para cada problema de mnimización o maximización presentado, se sabe de antemano que la solución existe (para probar la existencia, se puede consultar [1].

2. Problemas Clásicos [2]

   a) Braquistócrona
   Problema: Entre todas las curvas que unen los puntos A y B, hallar aquella a lo largo de la cual una mas puntual, moviendose bajo la fuerza de la gravedad desde A llega al punto B en el menor tiempo.
   Solución: Suponiendo que parte desde A con velocidad nula y la energia en ese punto es E, por la ley de conservación de energia, se tiene que:

$$mgh_A = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

   donde el lado derecho representa la energia en cualquier otro punto distinto de A. Despejando, se obtiene que $v = \sqrt{2g(h_A - h)}$. Llamando $x = h_A - h$ a la coordenada vertical y recordando que la longitud de una curva se calcula como $s(x) = \int_0^x \sqrt{(y'(w))^2 + 1}dw$ (o equivalentemente $ds = \sqrt{(y'(x))^2 + 1}dx$), se puede definir la rapidez v como $v = \frac{ds}{dt}$, con lo que se obtiene:

$$dt = \sqrt{\frac{(y'(x))^2 + 1}{2gx}}dx$$

$$\int_A^B dt \;=\; \int_A^B \sqrt{\frac{(y'(x))^2+1}{2gx}}dx$$

Es decir, el tiempo total empleado depende de la función y que describe la curva, por lo tanto, podemos definir el funcional $J(y)$ como

$$J(y) \;=\; \int_A^B \sqrt{\frac{(y'(x))^2+1}{2gx}}dx$$

La solución se obtiene minimizando el funcional J con condiciones de borde $x_A = 0, x_B = h_A - h_B$.

b) Geodésicas
Las geodésicas son aquellas curvas contenidas en una superficie regular que minimizan la distancia entre dos puntos de la misma.
Problema: Encontrar la geodésica entre los puntos A y B, con $A, B \in S$, S superficie regular reresentada por la ecuación $f(x, y, z) = 0$ y con parametrización $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Solución: Se debe minimizar el funcional

$$J(x,y,z) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

y las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ deben cumplir $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ con $t \in [t_0, t_1]$.

c) Isoperimétricas
Problema: De entre todas las curvas de longitud λ ¸ dada, que unen el punto $(0, 0)$ con un punto variable $(\xi, 0)$, encontrar aquella que, junto con el eje OX, encierra una superficie mínima (o máxima).
Solución: Se debe encontrar una función u y un número ξ tales que $u(0) = 0$, $u(\xi) = 0$, $u \geq 0$ y que minimicen (o maximizen) el funcional $J(u,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi u(t)dt$ y que además satisfagan la restricción $\displaystyle\int_0^\xi \sqrt{1+(u'(t))^2}dt = \lambda$.

3. Ecuación de Euler
Entrega una caracterización de las funciones extremales del funcional $L(t, x(t), x'(t))$.

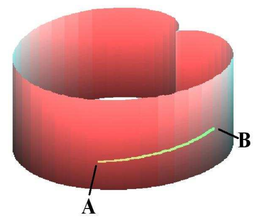
$$\frac{\partial}{\partial x}L(t,x,x') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}L(t,x,x')\right) \;=\; 0$$

Si L no depende de x, la ecuación se reduce a $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}L(t,x,x')\right) = 0$ y si no depende de x', se reduce a $\frac{\partial}{\partial x}L(t,x,x') = 0$.
La idea es aplicar la ecuación de Euler en el funcional $L(t, x, x')$ y tratar de llegar a una EDO para x o x', la cual debe resuelta por métodos ya conocidos.

4. Ejemplo: Problema 1, Parte (a), Examen MA26A 2004-02

- **Problema:**

Determine la ecuación de la geodésica (curva más corta) entre dos puntos A y B sobre un cilindro vertical cuya directriz en el plano OXY esta definida por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\phi), a > 0$. Indique específicamente la curva extremal que une los puntos $A(\rho_1, \phi_1, z_1) = (2a, 0, 0)$ y $B(\rho_2, \phi_2, z_2) = (a, \frac{\pi}{2}, 2a\sqrt{2})$.



- **Solución:**

Utilizamos coordenadas cilindricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\phi)\cos(\phi) \\ y &= \rho(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) \\ z &= z \end{aligned}$$

con $\rho(\phi) = a(1 + \cos\phi), a > 0$.
El diferencial ds queda de la forma:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2} d\phi \\ &= \sqrt{(\rho'\cos\phi + \rho(-\mathrm{sen}\,\phi))^2 + (\rho'\,\mathrm{sen}\,\phi + \rho\cos\phi)^2 + (z')^2} d\phi \\ &= \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 + (z')^2} d\phi \\ &= \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi + a^2(1+\cos\phi)^2 + (z')^2} d\phi \\ &= \sqrt{2a^2(1+\cos\phi) + (z')^2} d\phi \\ &= \sqrt{4a^2\cos^2(\frac{\phi}{2}) + (z')^2} d\phi \end{aligned}$$

Con esto, la acción queda $S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \underbrace{\sqrt{4a^2\cos^2(\frac{\phi}{2}) + (z')^2}}_{F(z',\phi)}\, d\phi$.

$F(z', \phi)$ no depende de z, por lo tanto, la ecuación de Euler nos dice que:

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = C_1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z'}{\sqrt{4a^2\cos^2(\frac{\phi}{2})+(z')^2}} &= C_1 \\
(z')^2 &= C_1^2(4a^2\cos^2(\frac{\phi}{2})+(z')^2) \\
z' &= \frac{2a\cos(\frac{\phi}{2})}{\sqrt{1-C_1^2}}C_1 \\
z' &= K\cos(\frac{\phi}{2}) \\
z &= A\,\mathrm{sen}(\frac{\phi}{2})+B
\end{aligned}
$$

Evaluando en los puntos A y B, se obtiene que la curva geodésica (en cilindricas, parametrizada por ϕ) es:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi \\
\rho &= a(1+\cos\phi) \\
z &= 4a\,\mathrm{sen}(\frac{\phi}{2})
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] Alvarez, Felipe, *Cálculo de Variaciones*, II Esc. de Verano 2002 (Proyecto-Sensei/cursos/ma45b).

[2] `http://orion.ciencias.uniovi.es/~galiano/docencia/main03.pdf`