

# Resumen Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## MA26A

### Sistemas de EDO Lineales

Profesor: Leonardo Sanchez, Auxiliares: Jorge Lemus, Oscar Peredo

29 de marzo de 2005

#### 1. RECUERDO DE ALGEBRA LINEAL

##### a) VALORES Y VECTORES PROPIOS

Dada una aplicacion lineal de la forma  $L(x) = Ax$ , con  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se llama **vector propio** a un cierto  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  que cumple con la propiedad:

$$Ax = \lambda x$$

Al valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  se le llama **valor propio** asociado a  $x$ .

Las siguientes propiedades son equivalentes:

- 1)  $\exists x \neq 0, Ax = \lambda x$ .
- 2) Existe una solucion no trivial (distinta de cero) del sistema  $(A - \lambda I)x = 0$ .
- 3)  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$
- 4)  $A - \lambda I$  no es invertible.
- 5)  $\text{rango}(A - \lambda I) < n$  (el rango de una matriz es el numero de filas o columnas linealmente independientes).

##### b) DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Para una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se define el **determinante de**  $A$ , o  $|A|$ , de la forma:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} |A^{j1}|$$

donde  $A^{kl} \in \mathcal{M}_{n-1 \times n-1}(\mathbb{R})$  es la submatriz de  $A$  que se obtiene eliminando la fila  $k$  y la columna  $j$ .

Se tienen las siguientes propiedades:

- 1) Si  $(\tilde{A})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq k \\ a_{ij} + b_{ij} & i = k \end{cases}$ , entonces  $|\tilde{A}| = |A| + |B|$ , donde  $(A)_{ij} = a_{ij}, \forall i$   
y  $(B)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq k \\ b_{ij} & i = k \end{cases}$ .

- 2) Si  $(\tilde{A})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq k \\ ta_{ij} & i = k \end{cases}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $|\tilde{A}| = t|A|$ , donde  $(A)_{ij} = a_{ij}, \forall i$ .
- 3) El determinante es una funcion lineal en cada una de las filas de la matriz  $A$ , es decir,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ :  $(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  vistos como filas)

$$\left| \begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{(k-1)\cdot} \\ tx + y \\ A_{(k+1)\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} \right| = t \left| \begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{(k-1)\cdot} \\ x \\ A_{(k+1)\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{(k-1)\cdot} \\ y \\ A_{(k+1)\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} \right|$$

- 4) El determinante es una funcion alternada, es decir, si  $B$  se obtiene permutando dos filas de  $A$ , entonces  $|B| = -|A|$ .
- 5) Si  $A$  tiene dos filas iguales, entonces  $|A| = 0$ .
- 6) Si  $I_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$ , entonces  $|I_n| = 1$ .
- 7) Si  $A$  es triangular inferior o superior, entonces  $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .
- 8) Si a la fila  $i$ -esima le sumamos la fila  $j$ -esima ponderada por  $t \in \mathbb{R}$  ( $i \neq j$ ), el determinante no cambia su valor.
- 9) Las filas de  $A$  son linealmente dependientes si y solo si  $|A| = 0$ .
- 10)  $|A| = |A^t|$
- 11)  $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), |AB| = |A||B|$
- 12) Si  $A$  es invertible, entonces  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

c) INVERSA DE UNA MATRIZ

Para una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  invertible, entonces

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i+j} |A^{ji}|$$

d) CALCULO DE VALORES PROPIOS

Para  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , la forma estandar de encontrar los valores propios es utilizando el **polinomio caracteristico**  $P(\lambda) = |A - \lambda I|$  y encontrar sus raices.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |A - \lambda I| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 10 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (4 - \lambda)(10 - \lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto las raíces del polinomio (soluciones de la ecuación  $P(\lambda) = 0$ ) son  $\{4, 10\}$ , que corresponden a sus valores propios.

e) **CALCULO DE VECTORES PROPIOS**

Una vez encontrado un valor propio  $\lambda$ , se resuelve el sistema  $(A - \lambda I)x = 0$ , es decir, se quiere encontrar el Kernel de  $A - \lambda I$ .

EJEMPLO:

Para  $\lambda = 4$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 - 4 & 0 \\ 0 & 10 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo que implica que  $x_1 = x_1$  y  $x_2 = 0$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

f) **DIAGONALIZACION**

- Si todas las raíces del polinomio característico son de multiplicidad algebraica 1, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Si el polinomio característico  $P(\lambda) = |A - \lambda I|$  tiene  $n$  raíces distintas (cada una de mult. algebraica 1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , entonces

- 1)  $W_{\lambda_j} = \text{Ker}(A - \lambda_j I)$  es de dimensión 1.
- 2) Sea  $v_j \in W_{\lambda_j}$  distinto de cero.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de vectores propios, es decir, todo vector propio se puede escribir como suma ponderada de los elementos de la base.

Si además se tiene que:

$$\bigoplus_{\lambda \text{ vector propio}} W_{\lambda} = \mathbb{R}^n$$

, es decir, todo vector en  $v \in \mathbb{R}^n$  puede ser expresado como  $v = v_1 + \dots + v_k$ , con  $v_j \in W_j$  y  $k$  el numero de valores propios distintos. Entonces la descomposicion sera de la forma:

$$A = PDP^{-1}$$

, donde  $D$  es la matriz diagonal de los valores propios y  $P$  es la matriz de los vectores propios (puestos como las columnas correspondientes al valor propio asociado).

- (Esta parte puede ser levemente distinta a como sale en el apunte y como la vieron en ma11a) Si aparece alguna raiz del polinomio caracteristico de multiplicidad algebraica mayor a 1, se debe construir la **matriz de Jordan**  $J$  asociada y la matriz invertible  $P$  tales que

$$A = PJP^{-1}$$

Un **bloque de Jordan** de tamaño  $k$  y valor propio  $\lambda$  es una matriz cuadrada de  $k \times k$  que tiene:

- 1) El numero  $\lambda$  en la diagonal.
- 2) Unos en la diagonal superior.
- 3) Ceros en los otros terminos.

EJEMPLO:

Para  $\lambda = 5$  y tamaño 3:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Un **suprabloque de Jordan** de tamaño  $k$  y valor propio  $\lambda$  es una matriz cuadrada de  $k \times k$  que tiene:

- 1) Uno o mas bloques de Jordan, todos con el mismo valor propio, pero no necesariamente de los mismos tamaños, ubicados en forma diagonal.
- 2) Ceros en los otros terminos.

EJEMPLO:

Para  $\lambda = 5$  y tamaño 5: (un bloque de tamaño 3 y otro de tamaño 2)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Una matriz esta en **forma canonica de Jordan** si esta formada por uno o mas suprabloques de Jordan y en el resto de los terminos hay ceros.

EJEMPLO:

Para  $\lambda = 3$  con un suprabloque de tamaño 2 (con 1 bloque de tamaño 2) y  $\lambda = 5$  con un suprabloque de tamaño 4 (con un bloque de tamaño 3 y otro de tamaño 1):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar  $J$ , se deben calcular las multiplicidades geométricas de cada valor propio, esto es, el número de vectores que generan el subespacio propio asociado al valor propio. Si hay  $k$  valores propios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , cada uno con multiplicidad algebraica  $m_j$  y cada uno con multiplicidad geométrica  $r_j$ , la matriz  $J$  tendrá  $k$  suprabloques de Jordan de tamaño  $m_1, \dots, m_k$  y en cada suprabloque habrán  $r_1, \dots, r_k$  bloques de Jordan.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es  $P(\lambda) = -(\lambda - 4)(\lambda + 1)^3$ , por lo tanto sus valores propios son  $\lambda_1 = 4$  con m.a. 1 y  $\lambda_2 = -1$  con m.a. 3.

Calculemos sus m.g.

Para  $\lambda_1 = 4$ , se obtiene el vector propio asociado, por lo tanto su m.g. es 1.

Para  $\lambda_2 = -1$  se resuelve:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Con lo cual } W_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 = 2x_4, x_3 = 0 \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

por lo tanto m.g. es 2.

Con esto, podemos contruir la forma canónica de Jordan  $J$  de la forma (no es única, los suprabloques pueden estar ordenados como se desee, pero deben ser consistentes con los vectores de la matriz  $P$ , formada por los vectores

generadores de los subespacios propios):

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 2. SISTEMAS LINEALES DE EDO

**Definición 0.1.** Un sistema lineal de EDO en  $\mathbb{K}^n$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) es un sistema de  $n$  ecuaciones escrito de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \forall t \in I, \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

donde  $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B(t) \in \mathbb{K}^n$  para cada  $t$  en  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalo abierto no vacío y  $X_0 \in \mathbb{K}^n$  son condiciones iniciales en  $t = t_0 \in I$ . En el caso  $B \equiv 0$  se dice que el sistema es homogéneo. En el caso que  $A$  es una matriz constante, se dice que el sistema es de coeficientes constantes.

### a) RESOLUCION UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

**Teorema 2.** La solución del sistema lineal (1), donde  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tiene coeficientes constantes, esta dada por  $\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0)$ ,  $\forall s > \max \Re \sigma(A)$  ( $\Re \sigma(A)$  = parte real de los valores propios de  $A$ ).

### b) MATRIZ CANONICA FUNDAMENTAL (SOLUCION HOMOGENEA)

**Definición 0.2.**

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n : X' = A(t)X, t \in I\}.$$

**Definición 0.3.**

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : X' = A(t)X + B(t), t \in I\}.$$

**Definición 0.4.** Llamaremos  $\phi_k$  solución fundamental canónica  $k$ -ésima asociada a  $t_0 \in I$  a la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \phi_k' &= A(t)\phi_k, \quad t \in I \\ \phi_k(t_0) &= e_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A la matriz formada por las soluciones fundamentales canónicas asociada a  $t_0$ , es decir, que en su columna  $k$ -ésima tiene a  $\phi_k$ , se llamara matriz canónica fundamental asociada a  $t_0$ , y se denotara por  $\Phi$

**Teorema 3.** El conjunto  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  es una base de  $H$ , y por lo tanto,  $\dim(H) = n$ . A esta base se le llama base fundamental canónica

**Corolario 0.1.** *La solución del sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} X'_h &= AX_h \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

esta dada por

$$X_h = x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n,$$

o equivalentemente

$$X_h = \Phi(t)X_0.$$

c) **MATRIZ EXPONENCIAL (SOLUCION PARTICULAR)**

**Teorema 4.** *Dada una solución particular  $X_p$  de  $X' = AX + B$ , toda solución del sistema se escribe como suma de  $X_p$  y alguna solución del sistema homogéneo.*

$$X_G = X_p + X_h.$$

**Teorema 5 (Variación de Parámetros).** *La solución del sistema:*

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned}$$

está dada por :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde  $\Phi$  es la matriz fundamental canónica asociada a  $t_0$ .

Conviene recordar que se tiene la siguiente igualdad:

$$\Phi(t) = \exp(A(t - t_0))$$

donde  $\Phi(t)$  es la matriz canónica fundamental asociada a  $t_0$ .

$$1) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}, \quad A \text{ es constante.}$$

La solución de este sistema es:

$$X(t) = \underbrace{\exp(A(t - t_0))X_0}_{X_h} + \underbrace{\int_{t_0}^t \exp(A(t - s))B(s)ds}_{X_p}$$

$$2) \quad \begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}, \quad A(t) \text{ variable.}$$

La solución de este sistema es:

$$X(t) = \underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)X_0}_{X_h} + \underbrace{\int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right)B(s)ds}_{X_p}$$

d) CALCULO DE LA MATRIZ  $\exp(At)$

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

1) Si  $A$  es diagonalizable ( $A = PDP^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \exp(At) &= P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} \right) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

2) Si  $A$  no es diagonalizable ( $A = PJP^{-1}$ ):

$$\exp(At) = P \begin{pmatrix} e^{J_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{J_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{Con } e^{J_i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & te^{\lambda_i} & \dots & \frac{t^m}{m!} e^{\lambda_i} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}$$