

Complemento a la clase de Transformada de Laplace

Profesor: Leonardo Sánchez
 Auxiliares: Jorge Lemus
 Oscar Peredo

Les dejo el problema que me preguntaron algunos al final de la clase y además les agrego un par que me parecen interesantes.

Problema 1.1. Calcular las siguientes transformadas:

- a) $\mathcal{L}[\sin(ax)\cos(bx)]$
- b) $\mathcal{L}[f(cx)]$
- c) $\mathcal{L}[\sin^2(x)]$

Solución 1.1. Primero vamos a probar algo: $\sin(u) - \sin(v) = 2\sin(\frac{u-v}{2})\cos(\frac{u+v}{2})$

Escribiendo $u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}$ y además $v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}$.

Ahora usamos la formula para el seno de la suma:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\sin(u) = \sin(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}) = \sin(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2}) + \sin(\frac{u-v}{2})\cos(\frac{u+v}{2})$$

$$\sin(v) = \sin(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}) = \sin(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2}) - \sin(\frac{u-v}{2})\cos(\frac{u+v}{2})$$

Restando

$$\sin(u) - \sin(v) = 2\sin(\frac{u-v}{2})\cos(\frac{u+v}{2})$$

$$\sin(\frac{u-v}{2})\cos(\frac{u+v}{2}) = \frac{1}{2}(\sin(u) - \sin(v))$$

Ahora la pregunta es $\sin(ax)\cos(bx)$. Para esto debemos encontrar el u y el v en la formula anterior.

Entonces resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax &= \frac{u-v}{2} \\ bx &= \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

De acá obtenemos $u = (a+b)x$ $v = (b-a)x$. Entonces reemplazando en la fórmula anterior queda:

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin((a+b)x) - \sin((b-a)x)]$$

Ahora el problema es fácil:

$$\mathcal{L}[\sin(ax)\cos(bx)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin((a+b)x) - \sin((b-a)x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{s^2 + (a+b)^2} - \frac{a-b}{s^2 + (a-b)^2}\right]$$

b) Usemos la definición: $\mathcal{L}[f(cx)] = \int_0^\infty e^{-st}f(ct)dt$. Haciendo el C.V. $u = ct$ $du = cdt$

$$= \frac{1}{c} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}u} f(u)du \text{ Si llamamos } \tilde{s} = \frac{s}{c} \text{ Llegamos a:}$$

$$= \frac{1}{c} \int_0^\infty e^{-\tilde{s}u} f(u)du = \frac{1}{c} F(\tilde{s}) \text{ donde } F(s) \text{ es la transformada de } f \text{ Entonces:}$$

$$\mathcal{L}[f(cx)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

c) Es una aplicación de lo anterior. Hay que notar que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$