

Resumen Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

MA26A

Ecuaciones Elementales

Profesor: Leonardo Sanchez, Auxiliares: Jorge Lemus, Oscar Peredo

29 de marzo de 2005

1. INTEGRACION DIRECTA

$$y' = f(x)$$

entonces

$$y = \int f(x)dx + C$$

2. VARIABLES SEPARABLES

$$y' = f(x)g(y)$$

entonces, suponiendo $g(y) \neq 0$ (considerar el caso $g(y) = 0$ al final)

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx + C$$

3. EDO LINEAL DE PRIMER ORDEN HOMOGENEA

$$\begin{aligned} a_1(x)y' + a_0(x)y &= 0 \\ y' + \bar{a}_0(x)y &= 0 \end{aligned}$$

donde $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, entonces

$$\begin{aligned} |y| &= \text{Kexp} \left(- \int \bar{a}_0(x)dx \right), K > 0 \\ y &= \text{Kexp} \left(- \int \bar{a}_0(x)dx \right), K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. EDO LINEAL DE PRIMER ORDEN NO HOMOGENEA

$$\begin{aligned}a_1(x)y' + a_0(x)y &= Q(x) \\ y' + \bar{a}_0(x)y &= \bar{Q}(x)\end{aligned}$$

donde $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $\bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_1(x)}$, entonces

$$y = C \exp\left(-\int \bar{a}_0(x) dx\right) + \exp\left(-\int \bar{a}_0(x) dx\right) \int \bar{Q}(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(s) ds\right) dx$$

5. ECUACIONES "HOMOGENEAS"

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

donde $f(ax, ay) = \pm a^k f(x, y)$, $g(ax, ay) = \pm a^k g(x, y)$ (f y g homogéneas de grado k), entonces

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\pm a^k f(1, \frac{y}{x})}{\pm a^k g(1, \frac{y}{x})} \\ &= \frac{f(1, \frac{y}{x})}{g(1, \frac{y}{x})} \\ &= h\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

Haciendo el c.v. $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz = y \Rightarrow y' = xz' + z$:

$$\begin{aligned}xz' + z &= h(z) \\ \int \frac{dz}{h(z) - z} &= \int \frac{dx}{x} + C\end{aligned}$$

6. BERNOULLI

Para $n \neq 1$:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Se hace el c.v. $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$ y se multiplica a ambos lados por $(1-n)y^{-n}$, de lo que resulta la EDO lineal no homogénea normalizada:

$$z' + p(x)(1-n)z = (1-n)q(x)$$

7. RICATTI

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Se hace el c.v. $y = y_1 + \frac{1}{z}$ donde y_1 es solución trivial de la ecuación. Derivando se tiene que $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ y reemplazando en la ecuación se obtiene una EDO lineal no homogénea normalizada:

$$z' + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x)$$

8. ECUACIONES EXACTAS

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C \\ f(x, y(x)) &= C \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \end{aligned}$$

Esto permite obtener una ecuación de primer orden en la variable y .

Definición 0.1. Una ecuación diferencial es exacta si es de la forma

$$y' = -\frac{M}{N}$$

, donde M y N son tales que existe una función $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$ (f y sus derivadas parciales son de clase \mathcal{C}^1 , es decir, que las derivadas parciales de segundo orden de f existen y son continuas, al igual que f) tal que $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Si la ecuación es exacta, la solución es la familia $f(x, y) = c$.

Propiedad 0.1. La ecuación $y' = -\frac{M}{N}$ es exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, con $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$.