Control 3, MA26 A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profs: Felipe Alvarez

Salomé Martínez

(1)

(a) (3pt) Usando transformada de Laplace encuentre una solución no nula de la ecuación

$$ty'' + (t-1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0.$$

Hint: Recuerde que $\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s)$, donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$.

(b) (3pt) Encuentre una función $f(t)$ tal que

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right), \quad s > 1.$$

Hint: Derive esta igualdad con respecto a s.

(2)

(a)(4 pt) Encuentre la solución general del sistema $x' = Ax$, donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)(2 pt) Encuentre la solución general del problema $x' = Ax + b(t)$, donde $b(t) = (e^t, 2e^t, 0)^T$.

(3) Considere el sistema

$$(1) \qquad x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a)(2pt) Encuentre la solución general de (1) cuando $\beta = 4\alpha$.

(b)(2pt) Encuentre todos los valores de α y β para los cuales todas las soluciones de (1) son acotadas $\forall t \in \mathbb{R}$.

(c)(1pt) Para $\alpha = -1$ encuentre todos los valores de β tales que cualquier solución de (1) $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ cumple que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen infinitos ceros.

(d)(1pt) Para $\alpha = -1$ encuentre todos los valores de β tales que cualquier solución de (1) $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ cumple que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen infinitos ceros y $x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.