

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PROFESOR: FELIPE ÁLVAREZ

1. CLASE AUXILIAR 30 DE MAYO

P1. Sea A matriz simétrica de $n \times n$. Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

y suponga que existe $\eta > 0$ tal que todo valor propio $\lambda_i(t)$ de $A(t)$ satisface $\lambda_i(t) \leq -\eta \quad \forall i = 1, \dots, n$. Demuestre que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

P2. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y considere el sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental del sistema con $W(0) = I$. Demuestre que $AW(t) = W(t)A$.

P3. Encuentre la matriz fundamental de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

P4. Encontrar la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$$

P5. Considere el sistema de coeficientes variables

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

donde es tal que $A(t + \pi) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental de este sistema tal que $W(0) = I$.

(a) Demuestre que

$$W(t + \pi) = W(t)W(\pi)$$

(b) Suponga que $W(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema tiene una solución $X(t)$ periódica de período π .