

## CONTROL 3: MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2004

### Problema 1.

- (a) (3.0 pts.) Considere el problema diferencial  $y'' + 9y = f(x)$ ,  $0 < x < \pi/4$ , con condiciones de borde  $y'(0) = 0$ ,  $y(\pi/4) + y'(\pi/4) = 0$ . Pruebe que para cada función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , el problema anterior admite una única solución. Encuentre la solución correspondiente a  $f(x) = \cos(x)$ .
- (b) (3.0 pts.) Considere el problema de valores propios de  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < \pi/4$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(\pi/4) + y'(\pi/4) = 0$ .
- (b.1) Verifique que  $\lambda_1 = 1$  es valor propio y determine el espacio propio asociado.
- (b.2) Pruebe que todos los valores propios se obtienen como las soluciones de  $\sqrt{\lambda_n} = \cot(\pi\sqrt{\lambda_n}/4)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Encuentre las funciones propias en términos de  $\lambda_n$ .

### Problema 2.

- (a) (3.0 pts.) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz exponencial  $e^{tA}$ . Resuelva el sistema  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$  con condición inicial  $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$  y  $\vec{b}(t) = (0, 0, 6e^t)$ .

- (b) (3.0 pts.) Encuentre la matriz exponencial  $e^{tA}$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Problema 3.

Considere el sistema  $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$  con  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  una función a valores matriciales, continua, no trivial, y de periodo  $T > 0$ , es decir,  $A(t+T) = A(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Suponga además que  $A(\cdot)$  es impar, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(-t) = -A(t)$ . Sea  $W(t)$  la matriz fundamental de este sistema que satisface  $W(0) = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pruebe que:

- (a) (2.0 pts.)  $W(t+T) = W(t)W(T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) (2.0 pts.)  $W(-t) = W(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- (c) (1.0 pto.)  $W(T)^2 = I$ .
- (d) (1.0 pto.) Todas las soluciones  $x(t)$  del sistema son periódicas de periodo  $2T$ .