CAPITULO V

INTEGRACION MULTIPLE

Introducción

En este capítulo se estudia la teoría de la integral de una función escalar, la que usualmente se denomina como integral "múltiple".

El desarrollo de este estudio es similar al que se hace en la teoría de la integral de Riemann para funciones de una variable real, aun cuando no es una simple generalización del caso de una variable debido precisamente a la dimensionalidad de los espacios involucrados. Sin embargo, la integral de funciones de una variable real tiene un rol fundamental para el cálculo de integrales múltiples, similar al que tienen las derivadas parciales para el cálculo de la diferencial de una función en varias variables.

En el presente estudio se destacan dos resultados que son básicos para el cálculo de integrales múltiples. Uno de ellos es conocido como el Teorema de Fubini que permite obtener el valor de la integral de una función escalar en n variables, mediante el cálculo de n integrales de funciones de una variable asociadas a la función escalar. El otro resultado, conocido como el Teorema del Cambio de Variables, permite transformar una integral múltiple en otra, con el objeto de que la integral resultante sea "más fácil" de calcular.

En el caso de una variable, el Teorema Fundamental del Cálculo permite establecer que el cálculo de la integral de una función dada está determinado por la mayor o menor dificultad que requiere la obtención de una "primitiva" de la función dada, ya que la "región de integración" es, en general, un intervalo en $\mathbb{R}$. En el caso de varias variables, el problema se presenta al revés, ya que la dificultad para calcular una integral múltiple está determinada, en la mayoría de los casos, por la región de integración. Esta dificultad es abordada adecuadamente al aplicar los teoremas mencionados más arriba (Fubini y Cambio de Variables) al cálculo de la correspondiente integral múltiple.

5.1. La integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$.

En esta sección se presentan las nociones y propiedades básicas que permiten definir la integral de Riemann de una función acotada sobre un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. El enfoque que se usa es similar al que se desarrolla para el caso de una variable y está basado en las nociones de las particiones del rectángulo, las sumas superior e inferior de la función (determinadas por las particiones), y las integrales inferior y superior en cuestión.

Recordar que en $I\!R$, un conjunto no vacío y acotado $I \subset I\!R$ es un intervalo si y solo si es igual a uno y solo uno de los siguientes conjuntos;

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x : a \leq x \leq b, x \in I\!R\}, \text{ ó} \\
[a,b) &= \{x : a \leq x < b, x \in I\!R\}, \text{ ó} \\
(a,b] &= \{x : a < x \leq b, x \in I\!R\}, \text{ ó} \\
(a,b) &= \{x : a < x < b, x \in I\!R\},
\end{aligned}$$

donde a y b denotan, respectivamente, el ínfimo y el supremo de I. El número $\ell(I) = b-a$ se llama la longitud o largo del intervalo I. Se define $\ell(\phi) = 0$. Notar que los intervalos $I, \bar{I}$ e $Int(I)$ tienen la misma longitud igual a $b-a$. Si $a = b$, el intervalo cerrado I resulta ser igual al conjunto $\{a\}$ y su longitud $\ell(I) = 0$ (se dice que I es un intervalo degenerado).

Además, recordar que una partición P de un intervalo acotado (no vacío) $I \subset I\!R$ es un conjunto finito de puntos $P = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ tal que $a = t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_r = b$. Claramente, la partición P divide al intervalo I en $r-1$ intervalos $I_1, ..., I_{r-1}$ para los cuales se cumple que ínfimo (I)= ínfimo (I_1), supremo (I_k) = ínfimo (I_{k+1}) para $k = 1, ..., r-2$, y supremo (I_{r-1}) = supremo (I).

Definición 5.1.1. Sean $I_1, I_2, ..., I_n, n$ intervalos acotados y no vacíos en $I\!R$. El conjunto $A = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ se llama un *rectángulo* en $I\!R^n$, y su *volumen* es el número $v(A) = \ell(I_1) \cdot \ell(I_2)...\ell(I_n)$. Si $n = 2$ el número $v(A)$ se llama el *área* del rectángulo.

Si algún intervalo I_k es degenerado, se dice que el rectángulo A es *degenerado*, y en tal caso se tiene que $v(A) = 0$.

La Proposición 1.4.4(c) implica que el rectángulo $I_1 \times ... \times I_n$ es cerrado en $I\!R^n$ si todos los I_i son cerrados en $I\!R$ (en este caso, el rectángulo es compacto, por la Proposición 1.5.5).

Similarmente, la Proposición 1.6.3(c) implica que el rectángulo $I_1 \times ... \times I_n$ es abierto en $I\!R^n$ si todos los intervalos I_i son abiertos en $I\!R$.

Estas observaciones implican a su vez que el rectángulo $I_1 \times ... \times I_n$ no es abierto ni cerrado en $I\!R^n$ si alguna de los intervalos I_i no es abierto ni cerrado en $I\!R$.

Notar, sin embargo, que el volumen de un rectángulo es independiente de su clasificación topológica, ya que tal como se señaló anteriormente, para cualquier intervalo acotado no vacío $I \subset I\!R$, se cumple que $\ell(I) = \ell(\bar{I}) = \ell(Int(I))$.

En lo que sigue se supone que todo rectángulo es cerrado (a menos que se especifique lo contrario). Este supuesto no quita generalidad a los resultados que se obtienen debido a la propiedad que cumple el volumen de un rectángulo señalada anteriormente. Además se comprobará que en el estudio de la integración múltiple, los rectángulos cerrados cumplen un rol similar al que tienen los intervalos cerrados en la teoría de la integral de Riemann de funciones de una variable real.

Definición 5.1.2. Sea $A = I_1 \times ... \times I_n$ un rectángulo en $I\!R^n$ y sea P_i una partición de I_i, para $i = 1, ..., n$. La familia $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ se llama una *partición* de A.

Toda partición $\mathcal{P}$ de un rectángulo A determina una *división* de A en un número finito de rectángulos que son llamados los *subrectángulos* de A determinados por $\mathcal{P}$.

En efecto, si $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ es una partición de $A = I_1 \times ... \times I_n$, entonces para cada $i = 1, ..., n$, P_i divide al intervalo I_i en un número finito r_i de intervalos. Si $I_{i1}, ..., I_{ir_i}$ denotan tales intervalos, entonces los rectángulos $I_{1k_1} \times I_{2k_2} \times ... \times I_{nk_n}$, para $k_i = 1, ..., r_i$, y $i = 1, ..., n$, son los subrectángulos de A determinados por $\mathcal{P}$. Claramente, el número total de ellos es igual a $r_1 \cdot r_2 ... r_n$, y por la Definición 5.1.1 la suma de los volúmenes de todos los subrectángulos es igual a $v(A)$, el volumen de A.

Para simplificar la notación, $S \in \mathcal{P}$ significa que S es un subrectángulo determinado por la partición $\mathcal{P}$.

La Figura 5.1.1 ilustra la división del rectángulo $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ determinada por la partición $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$, donde $P_1 = \{a_1, t_1, t_2, t_3, b_1\}$ y $P_2 = \{a_2, s_1, s_2, b_2\}$.

Figura 5.1.1

Definición 5.1.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y sean $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ y $\mathcal{P}' = \{P_1', ..., P_n'\}$ particiones de A. Se dice que $\mathcal{P}'$ es *más fina* que $\mathcal{P}$, si y solo si $P_i \subseteq P_i'$ para $i = 1, ..., n$ y $P_k \neq P_k'$ para al menos un $k = 1, ..., n$.

Una manera equivalente para establecer que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ se obtiene al usar la interpretación que se le dio a las particiones de un rectángulo, y por lo tanto, $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si y solo si cada subrectángulo determinado por $\mathcal{P}'$ está contenido en alguno de los subrectángulos determinados por $\mathcal{P}$. Esto último, es equivalente a decir que $\mathcal{P}'$ induce una partición en cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$, i.e., cada $S \in \mathcal{P}$ queda dividido por algunos de los subrectángulos determinados por $\mathcal{P}'$.

En la Figura 5.1.2 se ilustra una partición $\mathcal{P}'$ de $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, la cual es más fina que la partición $\mathcal{P}$ de A de la Figura 5.1.1. $\mathcal{P}' = \{P_1', P_2'\}$, donde $P_1' = P_1$ y $P_2' = \{a_2, s_1', s_2', s_3', b_2\}$, con $s_2' = s_1$ y $s_3' = s_2$.

Figura 5.1.2

Notar que el subrectángulo $S = [t_2, t_3] \times [a_2, s_1]$ de la Figura 5.1.1 queda dividido por los subrectángulos $[t_2, t_3] \times [a_2, s_1']$ y $[t_2, t_3] \times [s_1', s_2']$ determinados por la partición $\mathcal{P}'$ de A en la Figura 5.1.2.

Definición 5.1.4. Sean $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ dos particiones de un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^n$. Una partición $\mathcal{P}$ de A se dice ser un *refinamiento común* de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ si y solo si $\mathcal{P}$ es más fina que cada una de las particiones $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$.

Las Definiciones 5.1.3 y 5.1.4 establecen que una partición $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ de un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^n$ es un refinamiento común de dos particiones dadas de $A, \mathcal{P}' = \{P_1', ..., P_n'\}$ y $\mathcal{P}'' = \{P_1'', ..., P_n''\}$ si y solo si $P_i' \cup P_i'' \subset P_i$, para cada $i = 1, ..., n$. (equivalentemente, cada subrectángulo determinado por $\mathcal{P}$ está contenido en alguno de los subrectángulos determinados por $\mathcal{P}'$ o por $\mathcal{P}''$).

En la Figura 5.1.3 (c) se ilustra el refinamiento común $\mathcal{P}$ de las particiones $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ que aparecen en las Figuras 5.1.3(a) y 5.1.3(b), respectivamente (notar que, $P_i = P_i' \cup P_i''$, para $i = 1, 2$)

Figura 5.1.3

Definición 5.1.5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada en un rectángulo $A \subset Dom(f)$ y sea $\mathcal{P}$ una partición de A. Para cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$, sean $m_S(f)$ y $M_S(f)$ los números definidos por

$$m_S(f) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\},$$

y

$$M_S(f) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}.$$

Las *sumas inferior y superior* asociadas al par $(f, \mathcal{P})$, que se denotan por $L(f, \mathcal{P})$ y $U(f, \mathcal{P})$, son los números

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S),$$

y

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S),$$

donde las sumas se extienden para todos los subrectángulos S determinados por $\mathcal{P}$, y $v(S)$ denota el volumen de S.

Esta definición implica, trivialmente, que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $A, L(f,\mathcal{P})$ y $U(f,\mathcal{P})$ son números reales tales que $L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$.

Los siguientes resultados permiten generalizar la afirmación anterior y definir la integral de f sobre A.

Proposición 5.1.1. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función acotada en un rectángulo $A \subset Dom(f)$. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones de A tales que $\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{P}'$, entonces

$$L(f,\mathcal{P}') \leq L(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad U(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}').$$

Demostración. Como $\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{P}'$, cada subrectángulo $S' \in \mathcal{P}'$ es dividido por un determinado número de subrectángulos de $\mathcal{P}$. Si $S_1, ..., S_k$ denotan tales subrectángulos, entonces las Definiciones 5.1.1 y 5.1.5 implican que

$$v(S') = v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k), \text{ y que } m_{S'}(f) \leq m_{S_i}(f),$$

para todo i ya que $S_i \subset S'$, y por lo tanto,

$$m_{S'}(f) \cdot v(S') \leq m_{S_1}(f) \cdot v(S_1) + ... + m_{S_k}(f) \cdot v(S_k),$$

y de esta desigualdad junto con la definición de suma inferior (Definición 5.1.5) sigue que $L(f,\mathcal{P}') \leq L(f,\mathcal{P})$.

Un argumento similar, usando el hecho de que $M_{S_i}(f) \leq M_{S'}(f)$, implica que $U(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}')$. ■

Corolario 5.1.2. Si $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ son dos particiones cualesquiera de un rectángulo A, entonces $L(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}'')$.

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ un refinamiento común de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$. Por Definición 5.1.4, $\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{P}'$ y que $\mathcal{P}''$, y por la proposición anterior se cumple que

$$L(f,\mathcal{P}') \leq L(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad U(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}'')$$

pero, como $L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$, sigue que $L(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}'')$. ■

Este resultado implica que el conjunto de números reales definido por todas las sumas inferiores $L(f,\mathcal{P})$ es acotado superiormente, y también que el conjunto de números reales formado por todas las sumas superiores $U(f,\mathcal{P})$, es acotado inferiormente, lo que justifica la siguiente definición.

Definición 5.1.6. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función acotada en un rectángulo $A \subset Dom(f)$. Se definen las *integrales inferior y superior* de f sobre A, las que se denotan por $\underline{I}(f)$ y $\bar{I}(f)$, respectivamente, como los siguientes números reales:

$$\underline{I}(f) = \sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } A\},$$

y

$$\bar{I}(f) = \inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } A\}.$$

En algunos casos se usará la notación $\underline{I}(f,A)$ e $\bar{I}(f,A)$ en lugar de $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$, respectivamente, para precisar A.

Claramente, esta definición implica que $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ *siempre* existen porque f es acotada en A y también se cumple que $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$. En los siguientes ejemplos se comprueba la existencia de funciones para las cuales se cumple la igualdad y otras que verifican la desigualdad estricta.

Ejemplo 5.1.1. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ y $A \subset Dom(f)$ un rectángulo tal que $f(\mathbf{x}) = c$, para todo $\mathbf{x} \in A$ (i.e., f es constante en A).

Si $\mathcal{P}$ es una partición cualquiera de A, entonces para todo subrectángulo $S \in \mathcal{P}$, la Definición 5.2.5 implica que $m_S(f) = M_S(f) = c$, y por lo tanto,

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_S c \cdot v(S) = c \cdot v(A),$$

y

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S) = \sum_S c \cdot v(S) = c \cdot v(A),$$

i.e., $L(f,\mathcal{P}) = U(f,\mathcal{P}) = c \cdot v(A)$, para toda partición $\mathcal{P}$ de A. La Definición 5.1.6 implica que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = c \cdot v(A)$.

Ejemplo 5.1.2. Sea $A = [0,1] \times [0,1]$ y $f : A \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Si $\mathcal{P}$ es una partición cualquiera de A, entonces cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ contiene puntos (x,y) con x irracional y también con x racional. La Definición 5.1.5 implica que $m_S(f) = 0$ y $M_S(f) = 1$, para todo $S \in \mathcal{P}$, y por lo tanto,

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = 0,$$

y

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S) = v(A),$$

i.e., $L(f,\mathcal{P}) = 0$ y $U(f,\mathcal{P}) = v(A)$ para toda partición de A, lo que por Definición 5.1.6 implica que $\underline{I}(f) = 0$ y $\bar{I}(f) = v(A)$ i.e., $\underline{I}(f) < \bar{I}(f)$.

Definición 5.1.7. Una función $f : I\!R^n \to I\!R$ acotada en un rectángulo $A \subset Dom(f)$ se dice ser *integrable Riemann sobre* A si y solo si $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, y este número se llama la *integral de Riemann de* f *sobre* A (integral múltiple), el cual se denota por $I(f)$ o por $\int\limits_A f$.

Esta definición implica que la función del Ejemplo 5.1.1 es integrable sobre cualquier rectángulo $A \subset I\!R^n$, mientras que la del Ejemplo 5.1.2 no es integrable sobre el rectángulo $A = [0,1] \times [0,1]$.

El siguiente resultado, conocido como la *condición de Riemann*, establece una propiedad equivalente a la definición anterior.

Proposición 5.1.3. Una función $f : I\!R^n \to I\!R$ acotada en un rectángulo $A \subset Dom(f)$ es integrable sobre A si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}$ de A tal que $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que f es integrable sobre A. Por Definición 5.1.7, se cumple que

$$I(f) = \sup\{L(f,\mathcal{P})\} = \inf\{U(f,\mathcal{P})\},$$

y por las definiciones de supremo e ínfimo en $I\!R$, se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ particiones de A tales que

$$L(f,\mathcal{P}') > I(f) - \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad U(f,\mathcal{P}'') < I(f) + \varepsilon/2,$$

y si $\mathcal{P}$ es un refinamiento común de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$, la Proposición 5.1.1 implica que

$$L(f,\mathcal{P}') \leq L(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad U(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}''),$$

y de estas desigualdades junto con las anteriores sigue que

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}'') - L(f,\mathcal{P}') < \varepsilon.$$

Recíprocamente, si la condición se cumple, entonces la Definición 5.1.6 implica que $\bar{I}(f) < \underline{I}(f) + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, i.e., $\bar{I}(f) \leq \underline{I}(f)$, y como $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ (por la Definición 5.1.6), resulta que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, y por lo tanto, f es integrable sobre A. ∎

La propiedad recién demostrada tiene una gran importancia en la teoría de la integral múltiple, ya que la condición en cuestión resulta ser una herramienta muy eficaz para demostrar si una función es integrable.

5.2. Propiedades de la integral de Riemann

En esta sección se presentan las propiedades básicas de la integral de Riemann para funciones acotadas sobre rectángulos en $\mathbb{R}^n$. Las justificaciones de tales propiedades se basan principalmente en la condición de Riemann (Proposición 5.1.3), y la primera que se demuestra es la existencia de funciones que son integrables Riemann.

Proposición 5.2.1. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua en un rectángulo $A \subset Dom(f)$, entonces f es integrable sobre A. En particular, si f es una función constante en $A, f(\mathbf{x}) = c$, para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces $\int\limits_A f = c \cdot v(A)$.

Demostración: La hipótesis y la Proposición 2.5.12 implican que f es uniformemente continua en A (ya que todo rectángulo cerrado es compacto y f es continua en A).

Supongamos que $A = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ y sea $\varepsilon > 0$. La Definición 2.5.2 asegura la existencia de un número $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en A y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/v(A)$, donde $v(A)$ denota el volumen de A (acá se ha considerado la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ en la aplicación de la Definición 2.5.2).

Para cada $i = 1, ..., n$, sea $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i > (b_i - a_i)/\delta$, y sea P_i la partición del intervalo $[a_i, b_i]$ definida por k_i puntos igualmente espaciados de $[a_i, b_i]$ (todos los subintervalos determinados por P_i tienen la misma longitud, la cual es menor que δ). La Definición 5.1.2 establece que $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ es una partición de A, y para cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ se cumple que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty < \delta$ para todo $\mathbf{x} \in S$ e $\mathbf{y} \in S$, (por la definición de las P_i), y esto implica que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/v(A)$, y en particular también se tiene que

$$M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon/v(A),$$

de donde se concluye que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$, i.e., f satisface la condición de Riemann en A.

Consideremos ahora el caso particular en que f es una función constante en A. Por lo anterior, f es integrable en A (ya que f es continua en A), y si $f(\mathbf{x}) = c$, para $\mathbf{x} \in A$, se tiene que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de A

$$M_S(f) = m_S(f) = c, \text{ para todo } S \in \mathcal{P},$$

y por lo tanto, $U(f,\mathcal{P}) = L(f,\mathcal{P}) = c\cdot v(A)$, y estas igualdades junto con las Definiciones 5.1.6 y 5.1.7 implican que $\int\limits_A f = c\cdot v(A)$. ■

En el siguiente resultado se establecen algunas propiedades algebraicas para las funciones integrables.

Proposición 5.2.2. Sean f y g funciones integrables sobre un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,

(1) $f+g$ es integrable sobre A y $\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g$.

(2) αf es integrable sobre A para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\int\limits_A \alpha f = \alpha \int\limits_A f$.

(3) Si $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces $\int\limits_A f \geq \int\limits_A g$.

(4) Las funciones $f^+, f^-, |f|, \max\{f,g\}$ y min $\{f,g\}$ definidas por: $f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}),0\}$; $f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}),0\}$; $|f|(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|$; $\max\{f,g\}(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}),g(\mathbf{x})\}$, y $\min\{f,g\} = \min\{(\mathbf{x}),g(\mathbf{x})\}$, son integrables sobre A, y para $|f|$ se cumple además que $|\int\limits_A f| \leq \int\limits_A |f|$.

(5) $f\cdot g$ es integrable sobre A (pero, la integral del producto no siempre es igual al producto de las integrales).

(6) Sea B un rectángulo tal que $A \subset B$. Si $f \geq 0$ e integrable en B, entonces $\int\limits_A f \leq \int\limits_B f$.

Demostración. (1) Si f y g son integrables sobre A, la condición de Riemann (Proposición 5.1.3) establece que dado un $\varepsilon > 0$, existen particiones $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ de A tales que

$$U(f,\mathcal{P}') - L(f,\mathcal{P}') < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad U(g,\mathcal{P}'') - L(g,\mathcal{P}'') < \varepsilon/2,$$

y si $\mathcal{P}$ es un refinamiento común de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$, entonces estas desigualdades se verifican simultáneamente para $\mathcal{P}$, i.e.,

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}) < \varepsilon/2.$$

Además, como $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, el ínfimo y el supremo de la función $f+g$ en cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ satisfacen las siguientes desigualdades,

$$m_S(f+g) \geq m_S(f) + m_S(g) \quad \text{y} \quad M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g),$$

y estas desigualdades junto con la definición de las sumas inferior y superior implican que

$$L(f+g,\mathcal{P}) \geq L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} U(f+g,\mathcal{P})-L(f+g,\mathcal{P}) &\le U(f,\mathcal{P})+U(g,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})-L(g,\mathcal{P}) \\ &= U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})+U(g,\mathcal{P})-L(g,\mathcal{P}) \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon, \end{aligned}$$

y esto último establece que la función $f+g$ satisface la condición de Riemann en A, y por la Proposición 5.1.3 sigue que f es integrable sobre A.

Ahora demostramos que $I(f+g) = I(f)+I(g)$, para lo cual aplicamos las Definiciones 5.1.6, 5.1.7 a f y g. Como $I(f) = \underline{I}(f)$ y $I(g) = \underline{I}(g)$, la definición de la integral inferior implica que dado $\varepsilon > 0$, existen particiones $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ de A tales que

$$\underline{I}(f)-\varepsilon/2 < L(f,\mathcal{P}') \quad \text{y} \quad \underline{I}(g)-\varepsilon/2 < L(g,\mathcal{P}''),$$

y si $\mathcal{P}$ es un refinamiento común de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$, el Corolario 5.1.2 implica que

$$\underline{I}(f)-\varepsilon/2 < L(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \underline{I}(g)-\varepsilon/2 < L(g,\mathcal{P}),$$

y por lo tanto,

$$\underline{I}(f)+\underline{I}(g)-\varepsilon < L(f,\mathcal{P})+L(g,\mathcal{P}),$$

y como $L(f,\mathcal{P})+L(g,\mathcal{P}) \le L(f+g,\mathcal{P})$, sigue que,

$$\underline{I}(f)+\underline{I}(g)-\varepsilon < L(f+g,\mathcal{P}),$$

y esta desigualdad implica que el número $\underline{I}(f)+\underline{I}(g)$ satisface la propiedad del supremo de las sumas inferiores de $f+g$, y por la unicidad del supremo y la definición de la integral inferior se deduce que $\underline{I}(f+g) = \underline{I}(f)+\underline{I}(g)$.

Un argumento similar aplicado a las sumas superiores permite establecer que $\bar{I}(f+g) = \bar{I}(f)+\bar{I}(g)$, y como f, g y $f+g$ son integrables, la Definición 5.1.7 implica que $I(f+g) = I(f)+I(g)$.

(2) Por definición, $(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in A$, y por lo tanto, si $\mathcal{P}$ es una partición de A, para todo $S \in \mathcal{P}$ se cumple que

$$m_S(\alpha f) = \alpha m_S(f) \quad \text{y} \quad M_S(\alpha f) = \alpha M_S(f),$$

y estas igualdades junto con las definiciones de las integrales inferior y superior implican que

$$\underline{I}(\alpha f) = \alpha \underline{I}(f) \quad \text{y} \quad \bar{I}(\alpha f) = \alpha \bar{I}(f),$$

y como f es integrable, i.e., $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, sigue que

$$\underline{I}(\alpha f) = \bar{I}(\alpha f) = \alpha I(f).$$

(3) Sea $h = f - g$. Las propiedades (1) y (2) aseguran que h es integrable y que $I(h) = I(f) - I(g)$.

Además, la condición $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A$, implica que $h(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in A$, y de la definición de suma superior, sigue que $U(h, \mathcal{P}) \geq 0$, para cualquier partición de A, y por lo tanto, $\bar{I}(h) \geq 0$. Pero, como h es integrable, $I(h) = \bar{I}(h)$, i.e., $I(h) \geq 0$, y de la igualdad $I(h) = I(f) - I(g)$, sigue que, $I(f) \geq I(g)$.

Si $g = 0$ en A, entonces $I(f) \geq 0$, ya que $I(g) = 0$ por la Proposición 5.2.1.

(4) La definición de f^+ implica que $f^+(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ si $f(\mathbf{x}) \geq 0$, y $f^+(\mathbf{x}) = 0$ si $f(\mathbf{x}) < 0$, y en particular $\inf\{f^+(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \geq 0$, para todo $B \subset A$. Por lo tanto, si $\mathcal{P}$ es una partición cualquiera de A, para todo $S \in \mathcal{P}$ se cumple una y solo una de las siguientes:

- $M_S(f^+) - m_S(f^+) = M_S(f) - m_S(f)$, si $f(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in S$;
- $M_S(f^+) - m_S(f^+) = M_S(f)$, si f toma valores positivos y negativos en S (i.e., existen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ en S tales que $f(\mathbf{x}') > 0$ y $f(\mathbf{x}'') < 0$);
- $M_S(f^+) - m_S(f^+) = 0$, si $f(\mathbf{x}) \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in S$,

y por lo tanto, $M_S(f^+) - m_S(f^+) \leq M_S(f) - m_S(f)$, para todo $S \in \mathcal{P}$, y esto implica $U(f^+, \mathcal{P}) - L(f^+, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P})$, y como f es integrable sobre A, esta última desigualdad establece que f^+ satisface la condición de Riemann en A.

La integrabilidad de las restantes funciones se obtiene al aplicar las propiedades (1) o (2) a las siguientes identidades:

$$f^- = f^+ - f; \quad |f| = f^+ + f^-;$$

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|);$$

y

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Además, para la función $|f|$, la propiedad (3) implica que $\int_A f \leq \int_A |f|$ ya que $f \leq |f|$, y como $\int_A |f| \geq 0$, sigue que

$$|\int_A f| \leq \int_A |f|.$$

(5) Las definiciones de las funciones f^+ y f^- implican que $f \cdot g = (f \cdot g)^+ - (f \cdot g)^-$, donde

$$(f \cdot g)^+ = f^+ \cdot g^+ + f^- \cdot g^-, \text{ y}$$
$$(f \cdot g)^- = f^+ \cdot g^- + f^- \cdot g^+,$$

y por lo tanto, basta considerar el caso en que ambas funciones f y g son no-negativas (el caso general sigue de aplicar la propiedad (1) a las identidades anotadas más arriba).

Sean f y g funciones no-negativas y no-nulas en A e integrables sobre A. Demostraremos que la función $f \cdot g$ satisface la condición de Riemann en A.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables sobre A, existen particiones $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ de A tales que

$$U(f, \mathcal{P}') - L(f, \mathcal{P}') < \frac{\varepsilon}{2\beta} \quad \text{y} \quad U(g, \mathcal{P}'') - L(g, \mathcal{P}'') < \frac{\varepsilon}{2\alpha},$$

donde $\alpha = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$ y $\beta = \sup\{g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$ (α y β son positivos porque f y g son funciones no-nulas en A).

Si $\mathcal{P}$ es un refinamiento común de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$, entonces las dos desigualdades anteriores se cumplen al reemplazar $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ por $\mathcal{P}$ (Proposición 5.2.1). Además, para cada $S \in \mathcal{P}$ se cumple que

$$M_S(f \cdot g) = M_S(f) \cdot M_S(g) \quad \text{y} \quad m_S(f \cdot g) = m_S(f) \cdot m_S(g),$$

y como

$$M_S(f \cdot g) - m_S(f \cdot g) = M_S(f)(M_S(g) - m_S(g)) + m_S(g)(M_S(f) - m_S(f)),$$

las definiciones de α y β implican que

$$M_S(f \cdot g) - m_S(f \cdot g) \leq \alpha(M_S(g) - m_S(g)) + \beta(M_S(f) - m_S(f)),$$

y de esta igualdad, junto con las definiciones de sumas inferior y superior, sigue que

$$\begin{aligned} U(f \cdot g, \mathcal{P}) - L(f \cdot g, \mathcal{P}) &= \alpha(U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P})) + \beta(U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}))) \\ &< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} = \varepsilon, \end{aligned}$$

y por lo tanto, $f \cdot g$ satisface la condición de Riemann en A, completando la demostración.

(6) Como A y B son rectángulos y $A \subset B$, existe una partición $\mathcal{P}$ de B tal que $A \in \mathcal{P}$ (i.e., A es uno de los subrectángulos determinados por $\mathcal{P}$), y por lo tanto,

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S) = M_A(f) \cdot v(A) + \sum_{S \neq A} M_S(f) \cdot v(S),$$

y como $f \geq 0$ en B y el número $M_A(f) \cdot v(A)$ es una suma superior (trivial) de f con respecto a A, las Definiciones 5.1.6 y 5.1.7 aplicadas a f y A implican que

$$U(f, \mathcal{P}) \geq M_A(f) \cdot v(A) \geq \int_A f,$$

y por lo tanto,

$$\inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } B\} \geq \int\limits_A f,$$

y de esta desigualdad junto con la hipótesis de que f es integrable sobre B, resulta que $\int\limits_B f \geq \int\limits_A f$, lo que completa la demostración. ■

Las definiciones y resultados sobre la integración múltiple que se han presentado en esta sección, se desarrollaron para funciones escalares que son acotadas en rectángulos, comprobándose que no todas las funciones de este tipo son integrables, como la función del Ejemplo 5.1.2. Por otra parte, se demostró que toda función continua en un rectángulo es integrable sobre dicho rectángulo. Este resultado y la función del Ejemplo 5.1.2 permiten asegurar que la discontinuidad de funciones acotadas en rectángulos está relacionada con la no-integrabilidad de tales funciones.

La pregunta evidente que resulta de lo anterior es si tal *relación* es bi-univoca, lo que es equivalente a determinar si la continuidad de una función acotada en un rectángulo es una condición necesaria y suficiente para que tal función sea integrable sobre el rectángulo en cuestión. La respuesta a esta interrogante es negativa, i.e., existen funciones que son acotadas, discontinuas e integrables sobre rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra algunas de estas funciones.

Ejemplo 5.2.1. Sea $A = [0,1] \times [0,1]$ y B un subconjunto *finito* de A, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A - B \\ 0 & \text{si } (x,y) \in B. \end{cases}$$

Claramente, la función f no es continua en A, ya que no lo es en los puntos de B. Comprobaremos, sin embargo, que f satisface la condición de Riemann en A, para lo cual consideraremos primero el caso particular cuando B tiene dos puntos (p_1, q_1) y (p_2, q_2).

Sea $\varepsilon < 0$ y supongamos que los dos puntos de B están contenidos en A tal como se indica en la Figura 5.2.1(a).

Figura 5.2.1.

Para $\alpha = \sqrt{\varepsilon/3}$, sean $P_1 = \{r_1, ..., r_6\}$ y $P_2 = \{t_1, ..., t_6\}$ las particiones de $[0,1]$ definidas por:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = p_1 - \frac{\alpha}{2}; \quad r_3 = p_1 + \frac{\alpha}{2}; \quad r_4 = p_2 - \frac{\alpha}{2}; \quad r_5 = p_2 + \frac{\alpha}{2}; \quad r_6 = 1,$$
$$t_1 = 0; \quad t_2 = q_2 - \frac{\alpha}{2}; \quad t_3 = q_2 + \frac{\alpha}{2}; \quad t_4 = q_1 - \frac{\alpha}{2}; \quad t_5 = q_1 + \frac{\alpha}{2}; \quad t_6 = 1$$

(ver Figura 5.2.1(b)).

Por Definición 5.2.2, $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ es una partición del rectángulo $A = [0,1] \times [0,1]$, que determina los 25 subrectángulos de A tal como se ilustra en la Figura 5.2.2.

Figura 5.2.2

Nótese que la construcción de la partición $\mathcal{P}$ de A asegura que cada uno de los puntos (p_1, q_1) y (p_2, q_2) está contenido en un cuadrado de lado α (más precisamente, $(p_1, q_1) \in [r_2, r_3] \times [t_4, t_5]$ y $(p_2, q_2) \in [r_4, r_5] \times [t_2, t_3]$), y por lo tanto, si S' y S'' denotan a dichos cuadrados, la definición de f implica que para todo subrectángulo $S \in P$ se tiene que

$$M_S(f) - m_S(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = S' \text{ ó } S = S'' \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y esto a su vez implica que

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= \sum_S (M_S(f) - m_S(f)) \cdot v(S) \\ &= v(S') + v(S'') \\ &= 2\alpha^2 \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon, \end{aligned}$$

i.e., $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$, comprobándose que f satisface la condición de Riemann en A. Más aún, la definición de f implica trivialmente que $U(f, \mathcal{P}) = 1$, para cualquier partición de A, y por lo tanto, de la Definición 5.1.7 se tiene que $I(f) = \bar{I}(f) = 1$.

La argumentación anterior puede ser usada para justificar el caso general cuando el conjunto B está formado por k puntos ($k > 2$). Para lo cual basta demostrar que es posible construir una partición de A de modo que cada punto de B está contenido en un subrectángulo de volumen arbitrariamente pequeño (cuadrado de lado $\alpha = \sqrt{\varepsilon/(k+1)}$). Los detalles de la justificación se dejan propuestos.

Los resultados del ejemplo anterior y del Ejemplo 5.2.1 permiten establecer que los conjuntos finitos son *ignorados* por la integral. Más específicamente, se puede demostrar la siguiente propiedad: Si dos funciones difieren en un conjunto finito, y si una de ellas es integrable en un rectángulo que contiene a dicho conjunto finito, entonces la otra función también es integrable sobre el rectángulo y las integrales de ambas funciones son iguales.

Por otra parte, la función del Ejemplo 5.1.2 no es integrable y difiere de la del ejemplo anterior en un conjunto infinito de puntos, y por lo tanto, se podría pensar que esto siempre se cumple, i.e., "la integral no puede ignorar a los conjuntos infinitos". Sin embargo, esto último no es cierto, ya que existen conjuntos infinitos que son *ignorados* por la integral en el mismo sentido que lo son los conjuntos finitos. El siguiente ejemplo ilustra uno de ellos.

Ejemplo 5.2.2. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$ y $B = \{(x, \bar{y}) : x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$ para algún $\bar{y} \in [0, 1]$ fijo. Se define $f : A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in A - B \\ 0 & \text{si } (x, y) \in B. \end{cases}$$

Comprobaremos que f es integrable sobre A. Dado $\varepsilon > 0$, sean P_1 y P_2 las particiones de $[0,1]$ definidas por:

$$P_1 = \{0, 1\} \text{ y } P_2 = \{0, \bar{y} - \frac{\varepsilon}{3}, \bar{y} + \frac{\varepsilon}{3}, 1\}.$$

La Definición 5.1.2 implica que $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ es una partición de A que determina tres subrectángulos como lo indica la Figura 5.2.3. El conjunto B está contenido en el subrectángulo $S(\varepsilon) = [0,1] \times [\bar{y} - \frac{\varepsilon}{3}, \bar{y} + \frac{\varepsilon}{3}]$.

Figura 5.2.3.

La definición de la función f implica que para cada $S \in \mathcal{P}$ se tiene

$$M_S(f) - m_S(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = S(\varepsilon) \\ 0 & \text{si } S \neq S(\varepsilon), \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = v(S(\varepsilon)) = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

i.e., $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$, lo que establece la integrabilidad de f sobre A. Además, un argumento similar al que se dio al final del ejemplo anterior permite concluir que en este caso también se verifica que $I(f) = 1$.

Los ejemplos que se han considerado en la presente sección, permiten establecer que la integrabilidad de una función acotada sobre un rectángulo esta relacionada con el conjunto de puntos de discontinuidad de tal función, y la argumentación dada en los Ejemplos 5.2.1 y 5.2.2 puede ser usada para demostrar la propiedad siguiente (cuya demostración se deja propuesta):

Si $f : A \to I\!R$ es una función continua en un rectángulo $A \subset I\!R^2$ y si $B \subset A$ es un conjunto finito ó es el conjunto de puntos $(x, \bar{y}) \in A$ con $x \in \mathbb{Q}$ e $\bar{y} \in I\!R$ fijo, entonces la función $g : A \to I\!R$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \notin B \\ \alpha, & \text{si } (x,y) \in B \end{cases}$$

es integrable sobre A para cualquier $\alpha \in I\!R$, y además, se cumple que $I(g) = I(f)$.

Más adelante, se demostrará que esta propiedad es válida para el caso general cuando $A \subset I\!R^n$ es un rectangulo y $B \subset A$ es un conjunto que satisface ciertas condiciones que se presentan en la siguiente sección.

5.3. Conjuntos de medida cero y de contenido cero

En esta sección se formaliza la propiedad que cumple el conjunto B considerado en cada uno de los dos últimos ejemplos de la sección anterior. La propiedad en cuestión establece que dicho conjunto se puede incluir en una unión (numerable) de rectángulos tales que la *suma* de sus volúmenes es arbitrariamente pequeña. Posteriormente, se demostrará que esta propiedad es precisamente la que permite que la integral *ignore* a este tipo de conjuntos.

Definición 5.3.1. Un conjunto $A \subset I\!R^n$ se dice que tiene *medida cero* si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una familia de rectángulos cerrados $\mathcal{F} = \{U_k : k \in I\!N\}$ tal que

- $\mathcal{F}$ es un cubrimiento de A, i.e., $A \subset \cup\{U_k : k \in I\!N\}$, y
- Si $s_p = \sum\limits_{k=1}^{p} v(U_k)$, entonces $\lim\limits_{p\to\infty} s_p < \varepsilon$ (esto último habitualmente se denota por $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v(U_k) < \varepsilon$).

Se puede demostrar que esta noción se mantiene si se exige que los rectángulos sean abiertos en lugar de cerrados.

En la siguiente proposición se demuestran algunas propiedades básicas de los conjuntos de medida cero, y en particular, se demuestra la existencia de tales conjuntos.

Proposición 5.3.1.

(1) Si $A \subset I\!R^n$ es de medida cero y si $B \subset A$, entonces B es de medida cero.
(2) Si $A \subset I\!R^n$ no es de medida cero y si $A \subset B$, entonces B no es de medida cero.
(3) Si $A \subset I\!R^n$ es finito, entonces A es de medida cero.
(4) Si $A \subset I\!R^n$ es un conjunto infinito numerable, entonces A es de medida cero.
(5) Si $\{A_k : k \in I\!N\}$ es una familia (numerable) de conjuntos de medida cero, entonces $A = \bigcup\limits_k A_k$, es de medida cero.

Demostración. Las proposiciones (1) y (2) siguen directamente de la definición de conjunto de medida cero.

(3) Si $A = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p\}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existen rectángulos cerrados $U_1, ..., U_p$, tales que $\mathbf{a} \in U_k$, para $k = 1, ..., p$ y $v(U_k) < \frac{\varepsilon}{p}$, lo cual implica que $A \subset U_1 \cup ... \cup U_p$ y $\sum_{k=1}^{p} v(U_k) < \varepsilon$, i.e., A es de medida cero (se deja propuesto al lector la justificación de la existencia de los conjuntos U_k).

(4) Si A es infinito numerable, entonces A se puede considerar como el recorrido de una sucesión en $I\!R^n$, i.e., $A = \{\mathbf{a}_k : \mathbf{a}_k = \varphi(k), k \in I\!N\}$, donde $\varphi : I\!N \to I\!R^n$ es una determinada función. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \in I\!N$, existe un rectángulo cerrado U_k que contiene a $\mathbf{a}_k$ y $v(U_k) < \varepsilon/2^k$. Claramente se cumple que $A \subset \cup\{U_k : k \in I\!N\}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon$, lo que muestra que A es de medida cero.

(5) Sea $\varepsilon > 0$. Como cada A_k es de medida cero, existe un cubrimiento $\{U_{ki} : i \in I\!N\}$ de A_k formado por rectángulos cerrados tal que $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_{ki}) < \varepsilon/2^k$. Claramente, la familia $\{U_{ki} : i \in I\!N, k \in I\!N\}$ es un cubrimiento de $A = \cup\{A_k : k \in I\!N\}$. Además, como tal familia puede ser enumerada de la siguiente manera: $U_{11}, U_{21}, U_{12}, U_{31}, U_{22}, U_{13}, U_{41}, ...$, se obtiene una familia de rectángulos cerrados $\{W_j : j \in I\!N\}$ que cumple $\sum_{j=1}^{\infty} v(W_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j < \varepsilon$, completando la demostración. ■

Una noción similar, pero no equivalente a la de conjunto de medida cero, se obtiene al cambiar la condición de cubrimiento numerable por la de cubrimiento finito.

Definición 5.3.2. Un conjunto $A \subset I\!R^n$ se dice que tiene *contenido cero* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos cerrados $\mathcal{F} = \{U_1, ..., U_p\}$ tal que

- $\mathcal{F}$ es un cubrimiento de A,i.e., $A \subset V_1 \cup ... \cup U_p$, y
- $\sum_{i=1}^{p} v(U_i) < \varepsilon$.

Esta definición, al igual que la de medida cero, se mantiene si se exige que los V_i sean rectángulos abiertos. Además, es fácil comprobar que las propiedades (1), (2), y (3) de la Proposición 5.3.1 también se cumplen para conjuntos de contenido cero, y que la Proposición 5.3.1(5) se cumple para familias finitas de conjuntos de contenido cero. Más aún, las Definiciones 5.3.1 y 5.3.2 implican que todo conjunto de contenido cero es de medida cero. El recíproco no se cumple, i.e., existen conjuntos de medida cero que no son de contenido cero (un ejemplo que se presenta más adelante ilustra uno de estos conjuntos). Sin embargo, existen conjuntos que satisfacen ambas nociones, como por ejemplo los conjuntos finitos, y también existen conjuntos que no son de contenido cero (ni de medida cero), tal como se establece en el siguiente resultado.

Proposición 5.3.2. Si $A \subset I\!R^n$ es un rectángulo (cerrado) no degenerado, entonces A no es un conjunto de contenido cero. Más aún, si $\{U_1, ..., U_p\}$ es un cubrimiento de A formado por rectángulos cerrados, entonces $\sum\limits_{i=1}^{p} v(U_i) \geq v(A)$.

Demostración. La proposición será demostrada para el caso $n = 1$. El caso $n = 2$ se deja propuesto como ejercicio. Una justificación simple para el caso $n \geq 2$ puede ser obtenida como una consecuencia directa del Teorema de Fubini que será presentado más adelante.

Para el caso $n = 1$, un rectángulo $A \subset I\!R$ es un intervalo de la forma $[a, b]$ con $a < b$, y su volumen es, por definición, $v(A) = b - a$.

Sea $\{U_1, ..., U_p\}$ un cubrimiento de $[a, b]$ formado por los intervalos $U_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, ..., p$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_p$. Como $\{U_1, ..., U_p\}$ cubre a $[a, b]$, este supuesto implica que $a_1 \leq a, b \leq b_p$ y $a_{i+1} \leq b_i$, para $i = 1, ..., p - 1$, y al menos una de tales desigualdades es estricta.

Si $b \in [a_1, b_1]$, entonces la proposición se cumple ya que

$$\sum_{i=1}^{p} v(U_i) = \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) \geq b_1 - a_1 \geq b - a = v(A).$$

Supongamos que $b \notin [a_1, b_1]$. Entonces, $\{U_2, ..., U_p\}$ es un cubrimiento de $[b_1, b]$, y si $b \in [a_2, b_2]$, se tiene que

$$\sum_{i=2}^{p} v(U_i) = \sum_{i=2}^{p} (b_i - a_i) \geq b_2 - a_2 \geq b - b_1,$$

y como $b_1 - a_1 \geq b_1 - a$ porque $[a, b_1] \subset [a_1, b_1]$, sigue que

$$\sum_{i=1}^{p} v(U_i) = \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) \geq (b_1 - a) + (b - b_1) = b - a = v(A).$$

Si $b \notin [a_2, b_2]$, se repite el argumento anterior con $[b_2, b]$ y $\{U_3, ..., U_p\}$. La proposición sigue después de aplicar dicho argumento a lo más p veces. ■

Corolario 5.3.3. Si $B \subset I\!R^n$ contiene un rectángulo no degenerado entonces B no es de contenido cero.

Demostración. Supongamos lo contrario, y sea A el rectángulo no degenerado contenido en B. Entonces, como B es de contenido cero y $A \subset B$, resulta que A es de contenido cero, lo que contradice la proposición anterior. ■

La condición de no-degenerancia, exigida en los resultados anteriores, es crucial. Si no se cumple, el rectángulo (degenerado) en cuestión es de contenido cero. Por ejemplo, si $A \subset \mathbb{R}^3$ es el rectángulo (plano) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{a_3\}$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el rectángulo (cerrado) $U = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3 - \delta, a_3 + \delta]$ para $\delta = \varepsilon/3(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, es un cubrimiento de A y $v(U) = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$, lo que comprueba que A es de contenido cero.

En la siguiente proposición se demuestra que la noción de compacidad permite establecer una equivalencia entre conjuntos de medida cero y de contenido cero.

Proposición 5.3.4. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y de medida cero, entonces A es de contenido cero.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es de medida cero, existe un cubrimiento $U = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de A formado por rectángulos abiertos tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v(U_k) < \varepsilon$. Además, como A es compacto, la Proposición 1.6.7 asegura la existencia de un cubrimiento finito de A formado por una subfamilia (finita) de U. Si $\{U_{k_1}, ..., U_{k_p}\}$ denota dicha subfamilia, entonces se tiene que $A \subset U_{k_1} \cup ... \cup U_{k_p}$, y $\sum\limits_{i=1}^{p} v(U_{k_i}) < \varepsilon$ (ya que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v(U_k) < \varepsilon$). ■

Una consecuencia directa de esta proposición es que los resultados de la Proposición 5.3.2 y del Corolario 5.3.3 también son válidos en términos de la noción de conjuntos de medida cero.

Corolario 5.3.5. Todo rectángulo no-degenerado en $\mathbb{R}^n$ no es un conjunto de medida cero. Más aún, si $B \subset \mathbb{R}^n$ contiene un rectángulo no-degenerado entonces B no es de medida cero.

Demostración. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo no-degenerado, entonces la Proposición 5.3.2 implica que A no es de contenido cero, y como A es compacto, la Proposición 5.3.4 permite establecer que A no es de medida cero. Además, si $B \subset \mathbb{R}^n$ contiene a un rectángulo no-degenerado A, entonces B no es de medida cero, ya que en caso contrario, como $A \subset B$, se tendría que A es de medida cero lo que contradice la primera parte de este Corolario. ■

La condición de compacidad es indispensable en el resultado anterior, ya que sin ella la proposición no se cumple, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3.1. Sea $A = [0,1] \times [0,1]$ y $B \subset A$ formado por todos los puntos $(x,y) \in A$ tales que x e y son racionales.

El conjunto B es de medida cero (por ser numerable) y no es compacto (porque no es cerrado). Afirmamos que B no es de contenido cero. En efecto, si $\{U_1, ..., U_p\}$ es un cubrimiento de B formado por rectángulos (cerrados) entonces $B \subset U_1 \cup ... \cup U_p$ y esta inclusión junto con las propiedades de la adherencia (Proposición 1.4.2) implican que $\bar{B} \subset \overline{U_1 \cup ... \cup U_p} = \bar{U}_1 \cup ... \cup \bar{U}_p$, y como $A = \bar{B}$ y $U_k = \bar{U}_k$ (los U_k son cerrados), sigue que $A \subset U_1 \cup ... \cup U_p$, y la Proposición 5.3.2 implica que $\sum_{k=1}^{p} v(U_k) \geq v(A) = 1$, y por lo tanto, se concluye que para cualquier cubrimiento finito de B formado por rectángulos cerrados $U_1, ..., U_p$, se tiene que $\sum_{k=1}^{p} v(U_k) \geq 1$, lo que establece que B no es de contenido cero.

Los resultados que se han presentado en esta sección muestran que las nociones de conjuntos de medida cero y de contenido cero son similares, llegando incluso a coincidir cuando el conjunto es finito ó compacto. Sin embargo, hay una condición que resalta la diferencia que existe entre ellas que corresponde a la condición de acotamiento del conjunto en cuestión, ya que por Definición 5.3.2, la noción de conjunto de contenido cero solo puede ser aplicada a conjuntos acotados (porque requiere un cubrimiento *finito* de rectángulos), y por lo tanto, todo conjunto no acotado no puede ser de contenido cero. En cambio, existen conjuntos no acotados de medida cero (e.g., el subconjunto de $I\!R^2$ formado por los puntos de la forma (k,k) con $k \in I\!N$).

Terminamos la presente sección con una propiedad relativa a conjuntos de medida cero, cuya importancia se verá justificada particularmente en el Teorema del Cambio de Variables para la integral múltiple.

Proposición 5.3.6. Sea $g : I\!R^n \to I\!R^m$ con $n < m$, una función continuamente diferenciable en un conjunto compacto $K \subset Dom(g)$. Si $C = g(K)$, entonces C es de contenido cero, y por lo tanto, C es de medida cero (i.e., todo pedazo de superficie suave definido paramétricamente, es un conjunto de contenido cero). Más aún, si $T : I\!R^m \to I\!R^m$ es continuamente diferenciable y 1-1 en C, entonces $T(C)$ es de contenido cero.

Demostración. La hipótesis para g y K (Ejercicio 39 del Capítulo IV), implican la existencia de una constante $M > 0$, que depende solamente de g y de K, para la cual se cumple que $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en K.

Por otra parte, como K es acotado (por ser compacto), existe un rectángulo $A = I_1 \times ... \times I_n$ tal que $K \subset A$ y $\ell(I_k) = \ell$, para $k = 1, ..., n$ (i.e., todos los intervalos I_k tienen la misma longitud). Si P_k es una partición de I_k definida por p puntos igualmente espaciados de $I_k (p > 2)$, entonces $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ es una partición de A que determina $(p-1)^n$ subrectángulos, y cada uno de ellos es de la forma $J_1 \times ... \times J_n$, con $J_k \subset I_k$ y $\ell(J_k) = \ell/(p-1)$ para $k = 1, ..., n$. Además, si $K_S = K \cap S$ para cada $S \in \mathcal{P}$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \ell/(p-1)$ para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en K_S (al usar $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$), y por lo tanto, la desigualdad de más arriba implica que

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq M \cdot \ell/(p-1), \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ en } K_S,$$

y esto significa que el conjunto $g(K_S)$ está contenido en un rectángulo $S' \subset \mathbb{R}^m$ de la forma $S' = J'_1 \times ... \times J'_m$ con $\ell(J'_i) = M \cdot \ell/(p-1)$, para $i = 1, ..., m$, y esto implica que la superficie $C = g(K)$ está contenida en la unión de tales rectángulos S', ya que $K = \cup\{K_S : S \in \mathcal{P}\}$ y $C = g(K) = \cup\{g(K_S) : S \in \mathcal{P}\} \subset \cup\{S' : S \in \mathcal{P}\}$ (cada $S \in \mathcal{P}$ determina un único S' tal que $g(K_S) \subset S'$). Además, como el volumen de cada S' es $v(S') = (M \cdot \ell/(p-1))^m$, y el número de tales rectángulos S' es $(p-1)^n$, resulta que

$$v(\cup\{S' : S \in \mathcal{P}\}) \leq \sum v(S') = (M \cdot \ell)^m/(p-1)^{m-n},$$

y como $m > n$, se cumple que dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(M \cdot \ell)^m/(p-1)^{m-n} < \varepsilon$, lo que muestra que C es de contenido cero, y por lo tanto de medida cero.

El argumento anterior también es válido si los S' se eligen de modo que $\ell(J'_i) = (M\ell + 1)/(p-1)$, y como esta elección implica que $C \cap Fr(\cup\{S' : S \in \mathcal{P}\}) = \phi$, se concluye que todo pedazo de superficie suave puede ser incluido en el interior de la unión de un número finito de rectángulos de volumen arbitrariamente pequeño. La segunda parte de la proposición sigue al aplicar lo anterior a la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $h(\mathbf{x}) = (T \circ g)(\mathbf{x})$ y al conjunto K. ■

El resultado anterior también se cumple cuando la superficie (suave) es definida en forma explícita ó implícita. Además, este resultado permite justificar que el volumen de un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es independiente de su clasificación topológica, ya que todo rectángulo degenerado es de contenido cero, y por lo tanto, todos los rectángulos que difieren en al menos una de sus "caras" o "lados" tienen el mismo volumen (e.g., en $\mathbb{R}^2, v([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = v([a_1, b_1) \times (a_2, b_2)] = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2))$.

5.4. Funciones integrables y conjuntos medibles Jordan

En esta sección se formaliza una propiedad que había sido ilustrada anteriormente, y que tiene relación con el hecho de que ciertos conjuntos son "ignorados" por la integral. El resultado básico establece que una condición necesaria y suficiente para que una función acotada en un rectángulo cerrado sea integrable, es que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función en el rectángulo sea un conjunto de medida cero. Previamente, estudiamos algunas propiedades de dicho conjunto.

Definición 5.4.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada en su dominio D, y sean $M(f, \mathbf{x}, \delta)$ y $m(f, \mathbf{x}, \delta)$ el supremo e ínfimo de f en $B(\mathbf{x}, \delta)$ para $\mathbf{x} \in D$ y $\delta > 0$. Se define la *oscilación* de f en $\mathbf{x}$ como el siguiente límite

$$o(f, \mathbf{x}) = \lim_{\delta \to 0}(M(f, \mathbf{x}, \delta) - m(f, \mathbf{x}, \delta)).$$

La oscilación de f en $\mathbf{x}$ satisface las siguientes propiedades (cuyas justificaciones se dejan propuestas como ejercicios).

1) f es continua en $\mathbf{a}$ ssi $o(f, \mathbf{a}) = 0$
2) Para todo $\varepsilon > 0, C_\varepsilon = \{\mathbf{x} : o(f, \mathbf{x}) \geq \varepsilon\}$ es cerrado.

Proposición 5.4.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada en un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A, o(f, \mathbf{x}) < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces existe una partición $\mathcal{P}$ de A para la cual se cumple que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon \cdot v(A)$.

Demostración. La hipótesis para $o(f, \mathbf{x})$ y la Definición 5.4.1 implican que para cada $\mathbf{x} \in A$ existe un rectángulo $U_\mathbf{x}$, tal que $\mathbf{x} \in Int(U_\mathbf{x})$ y $M_{U_\mathbf{x}}(f) - m_{U_\mathbf{x}}(f) < \varepsilon$. Además, como A es compacto, un número finito de tales rectángulos cubren al rectángulo A. Si $V_1, ..., V_p$ denotan a dichos rectángulos, entonces existe una partición $\mathcal{P}$ de A tal que cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ está contenido en alguno de los rectángulos V_k, lo que implica que

$$M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon, \text{ para todo } S \in \mathcal{P},$$

y por lo tanto,

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < \varepsilon \cdot v(A). \quad \blacksquare$$

El siguiente es el resultado principal. Establece condiciones para que una función discontinua sea integrable sobre un rectángulo.

Proposición 5.4.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada en A. Si $B = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in A \text{ y } f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$, entonces f es integrable sobre A si y solo si B es de medida cero.

Demostración. Supongamos que B es de medida cero e infinito (caso finito sigue del Ejemplo 5.2.1). Demostramos que f cumple la condición de Riemann en A.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} : o(f, \mathbf{x}) \geq \varepsilon\}$. Las definiciones de B y $o(f, \mathbf{x})$ implican que $B_\varepsilon \subset B$, y como B es de medida cero, el conjunto B_ε es también de medida cero. Además, como B_ε es compacto, la Proposición 5.3.4 implica que B_ε es de contenido cero, y por lo tanto, para tal $\varepsilon > 0$ existen rectángulos cerrados $U_1, ..., U_p$ tales que $B_\varepsilon \subset Int(U_1) \cup ... \cup Int(U_p)$ y $v(U_1) + ... + v(U_p) < \varepsilon$ (Definición 5.3.2). La Figura 5.4.1(a) ilustra la situación para el caso $n = 2$. El conjunto B_ε es la "curva" indicada en la figura y para simplificar la ilustración se supone que $p = 2$, i.e., $B_\varepsilon \subset Int(U_1) \cup Int(U_2)$.

Figura 5.4.1.

Sea $\mathcal{P}$ una partición de A tal que cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

(1) Existe U_k tal que $S \subset U_k$,

(2) $S \cap B_\varepsilon = \phi$.

Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ los conjuntos formados por los rectángulos $S \in \mathcal{P}$ que cumplen (1) y (2), respectivamente (en la Figura 5.4.1(b), los cuatro rectángulos marcados con $*$ forman el conjunto $\mathcal{S}_1$).

Como f es acotada sobre A, existe $M \geq 0$ tal que $|f(\mathbf{x})| \leq M$, para todo $\mathbf{x} \in A$, y esto implica que $M_S(f) - m_S(f) \leq 2M$, para todo $S \in \mathcal{P}$, y por lo tanto, se tiene que

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \leq 2M \cdot \sum_{S \in \mathcal{S}_1} v(S) \leq 2M \sum_{k=1}^{p} v(U_k) < 2M\varepsilon.$$

Por otra parte, si $S \in \mathcal{S}_2$, entonces $o(f, \mathbf{x}) < \varepsilon$ para todo $\mathbf{x} \in S$, y la Proposición 5.4.1 asegura la existencia de una partición $\mathcal{P}'$ más fina que $\mathcal{P}$ tal que para todos los $S' \in \mathcal{P}'$ con $S' \subset S$ se cumple que

$$\sum_{S'} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon \cdot v(S),$$

y como

$$\begin{aligned}U(f,\mathcal{P}')-L(f,\mathcal{P}') &= \sum_{S'\subset S\in\mathcal{S}_1}[M_{S'}(f)-m_{S'}(f)]\cdot v(S')\\ &\quad+\sum_{S'\subset S\in\mathcal{S}_2}[M_{S'}(f)-m_{S'}(f)]\cdot v(S')\end{aligned}$$

esta igualdad junto con las dos desigualdades anteriores implican que

$$\begin{aligned}U(f,\mathcal{P}')-L(f,\mathcal{P}') &< 2M\cdot\varepsilon+\sum_{S\in\mathcal{S}_2}\varepsilon\cdot v(S)\\ &\leq 2M\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot v(A)\\ &= \varepsilon(2M+v(A)),\end{aligned}$$

y por lo tanto, f satisface la condición de Riemann ya que $v(A)$ y M son números fijos, i.e., f es integrable sobre A.

Supongamos ahora que f es integrable sobre A, y demostremos que el conjunto B es de medida cero. La definición de los conjuntos B_ε implica que $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{1/k}$, i.e., B es la unión numerable de los conjuntos $B_{1/k}$, y por la Proposición 5.3.1(5), basta demostrar que cada conjunto $B_{1/k}, k\in I\!N$ es de medida cero, ya que en tal caso, el resultado de que B es de medida cero sigue de la proposición mencionada. Más aún, como cada $B_{1/k}$ es compacto, basta probar que $B_{1/k}$ es de contenido cero para cada $k\in I\!N$ (por la Proposición 5.3.4).

Como f es integrable sobre A, dado $\varepsilon>0$, existe una partición $\mathcal{P}$ de A tal que $U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<\varepsilon/k$. Sea $\mathcal{S}$ la familia de subrectángulos $S\in\mathcal{P}$ tal que $S\cap B_{1/k}\neq\phi$. Claramente, $\mathcal{S}$ es un cubrimiento de $B_{1/k}$ y si $S\in\mathcal{S}$, entonces $M_S(f)-m_S(f)\geq 1/k$, ya que $S\cap B_{1/k}\neq\phi$ y $B_{1/k}=\{\mathbf{x}:o(f,\mathbf{x})\geq 1/k\}$, y de esta desigualdad sigue que,

$$\begin{aligned}\sum_{S\in\mathcal{S}}\frac{1}{k}v(S) &\leq \sum_{S\in\mathcal{S}}(M_S(f)-m_S(f))v(S)\\ &\leq \sum_{S\in\mathcal{P}}(M_S(f)-m_S(f))\cdot v(S)\\ &= U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P}),\end{aligned}$$

y como $U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<\varepsilon/k$, resulta que $\sum_{S\in\mathcal{S}}v(S)<\varepsilon$, i.e., $B_{1/k}$ es de contenido cero, completando la demostración. ■

Las definiciones y propiedades que se han establecido en el presente capítulo se han restringido a la clase de funciones escalares que son acotadas sobre rectángulos. Una primera generalización es considerar conjuntos acotados que no sean rectángulos y efectuar las correspondientes modificaciones a los resultados que ya se han establecido. Sin embargo, tales modificaciones no son necesarias ya que la integral sobre conjuntos acotados puede ser definida en términos de la integral sobre rectángulos de la siguiente manera.

Definición 5.4.2. Sea $C \subset I\!R^n$ un conjunto acotado y sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función integrable sobre un rectángulo A que contiene a C. Se define *la integral de f sobre C* como la integral de la función $f \cdot 1\!\!1_C$ sobre A y se denota por $\int\limits_C f = \int\limits_A f \cdot 1\!\!1_C$, donde $1\!\!1_C$ es la función característica de C (i.e., $1\!\!1_C(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in C$, y $1\!\!1_C(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \notin C$).

Una manera equivalente para definir la integral de f sobre C es la siguiente. Se considera la función $f_C : I\!R^n \to I\!R$ definida por

$$f_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in C \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin C, \end{cases}$$

y se dice que f es integrable sobre C si y solo si f_C es integrable sobre A, siendo A un rectángulo que contiene a C, y se define la integral de f sobre C como la integral de f_C sobre A, i.e., $\int\limits_C f = \int\limits_A f_C$.

La condición requerida en la definición anterior se cumple si la función $1\!\!1_C$ es integrable sobre A ya que en tal caso, la función producto $f \cdot 1\!\!1_C$ es integrable sobre A (Proposición 5.2.2(5)). Además la integrabilidad de $1\!\!1_C$ sobre A queda determinada por la Proposición 5.4.2. Sin embargo, la particularidad de la función $1\!\!1_C$ permite establecer una caracterización alternativa para la existencia de la integral de $1\!\!1_C$ sobre un rectángulo que contenga al conjunto C.

Proposición 5.4.3. Sea $C \subset I\!R^n$ un conjunto acotado y A un rectángulo tal que $C \subset A$. Entonces, la función característica de C es integrable sobre A si y solo si la frontera de C es de medida cero (i.e., de contenido cero ya que $F_r(C)$ es compacto ó es finito).

Demostración. Por la Proposición 5.4.2, la función $1\!\!1_C$ es integrable sobre A si y solo si el conjunto $B = \{\mathbf{x} : 1\!\!1_C \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$ es de medida cero. Por lo tanto, basta probar que $B = Fr(C)$.

Si $\mathbf{a}$ es un punto interior de C, existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset C$, y por la definición de $1\!\!1_C$ se tiene que $1\!\!1_C(\mathbf{x}) = 1$, para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$, y esto implica que $1\!\!1_C$ es continua en $\mathbf{a}$. Análogamente, si $\mathbf{a}$ es un punto interior del complemento de C, entonces existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, \rho) \subset I\!R^n - C$, y por lo tanto, $1\!\!1_C(\mathbf{x}) = 0$, para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho)$, lo que también establece la continuidad de $1\!\!1_C$ en $\mathbf{a}$.

Consideremos ahora un punto $\mathbf{a}$ en la frontera de C. Por la Definición 1.7.1 se tiene que $B(\mathbf{a},\delta)\cap C \neq \phi$ y $B(\mathbf{a},\delta)\cap(\mathbb{R}^n - C)\neq\phi$, para todo $\delta > 0$, lo que asegura la existencia de (al menos) dos puntos $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ en $B(\mathbf{a},\delta)$ tales que $\mathbf{x}'\in C$ y $\mathbf{x}''\in\mathbb{R}^n - C$, y esto implica que $1\!\!1_C(\mathbf{x}') = 1$ y $1\!\!1_C(\mathbf{x}'') = 0$, i.e., $1\!\!1_C$ no es continua en $\mathbf{a}$, y por lo tanto $B = Fr(C)$, completando la demostración. ■

Notar que este resultado permite dar otra justificación al hecho de que la función del Ejemplo 5.2.2 no es integrable. En efecto, como tal función es la función característica del conjunto $C = \{(x,y) : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x \text{ irracional } \}$ y la frontera de C es igual al conjunto $[0,1]\times[0,1]$, el Corolario 5.3.5 implica que $Fr(C)$ no es de medida cero, y por la proposición anterior se concluye que la función $1\!\!1_C$ no es integrable sobre el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$.

La proposición anterior, junto con la Definición 5.4.2 implican que

$$\int_C 1\!\!1 = \int_A 1\!\!1\cdot 1\!\!1_C = \int_A 1\!\!1_C,$$

donde A es un rectángulo que contiene al conjunto C y la frontera de C es de medida cero. Esto último permite justificar la siguiente definición.

Definición 5.4.3. Un conjunto acotado $C\subset\mathbb{R}^n$ se dice ser un conjunto *medible Jordan* si y solo si la frontera de C es un conjunto de contenido cero. Además, la integral de la función constante igual a 1 sobre C se llama el *volumen* o *contenido* de C el cual se denota por $v(C)$, i.e, $v(C) = \int_C 1\!\!1$ (se llama *longitud* si $n = 1$ y *área* si $n = 2$)

En la siguiente proposición se establecen algunas propiedades básicas relativas a los conjuntos medibles Jordan y se justifica el calificativo de contenido cero.

Proposición 5.4.4.

(1) Todo rectángulo $A\subset\mathbb{R}^n$ (independientemente de su clasificación topológica) es un conjunto medible Jordan.
(2) Si C y D son medibles Jordan, entonces $C\cap D$ y $C\cup D$ son medibles Jordan y se cumple que $v(C\cup D) + v(C\cap D) = v(C) + v(D)$.
(3) Si C y D son medibles Jordan y $C\subset D$, entonces $D - C$ es medible Jordan y $v(D - C) = v(D) - v(C)$.
(4) Todo conjunto C de contenido cero es medible Jordan y $v(C) = 0$.
(5) Sea C medible Jordan. Si $\text{Int}(C) = \phi$, entonces C es de contenido cero.

Demostración.

(1) Si A es un rectángulo, la frontera de A es la unión finita de los "lados" o "caras" de A, los cuales son de contenido cero (porque son rectángulos degenerados), y la Proposición 5.3.1(5), implica que la frontera de A es de contenido cero.

(2) La primera parte sigue de la definición 5.4.3 y de la Proposición 1.7.2 la que establece que $Fr(C \cap D) \subset Fr(C) \cup Fr(D)$ y $Fr(C \cup D) \subset Fr(C) \cup Fr(D)$. La segunda parte de (2) y las restantes propiedades (3), (4) y (5) se dejan propuestas como ejercicios. ■

Es importante notar que, a diferencia de las nociones de conjunto de medida cero o de contenido cero, la correspondiente a conjunto medible Jordan no se preserva bajo la inclusión de conjuntos, i.e., si C es un conjunto medible Jordan y $D \subset C$, entonces D no siempre es un conjunto medible Jordan. Para esto último, basta considerar el conjunto $C = [0,1] \times [0,1]$ en $I\!R^2$ y $D \subset C$ tal que $D = \{(x,y) : x \text{ es irracional } \}$. El conjunto C es medible Jordan (por ser un rectángulo en $I\!R^2$), y $Fr(D) = C$ no es de contenido cero, i.e., D no es medible Jordan.

Otro caso importante queda planteado de la siguiente manera: Si C es de medida cero ¿es siempre C un conjunto medible Jordan?. La respuesta es negativa, i.e., existen conjuntos de medida cero que no son medibles Jordan (e.g., el conjunto $C \subset [0,1] \times [0,1]$ tal que $C = \{(x,y) : x \text{ es racional } \}$ es de medida cero y su frontera no es de contenido cero ya que $Fr(C) = [0,1] \times [0,1]$, y por lo tanto, no es medible Jordan). Por supuesto, también existen conjuntos de medida cero que son medibles Jordan (e.g., el conjunto $C = \{(x,0) : x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ en $I\!R^2$).

Las definiciones y resultados anteriores permiten establecer que una función acotada $f : I\!R^n \to I\!R$ es integrable sobre un conjunto acotado $C \subset I\!R^n$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

$CI1$: Si $B = \{\mathbf{x} : f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$, entonces $B \cap C$ es un conjunto de medida cero (Proposición 5.4.2).

$CI2$: C es un conjunto medible Jordan, i.e., $Fr(C)$ es de contenido cero.

La dificultad mayor que tienen estas condiciones es determinar si el correspondiente conjunto es de medida cero o de contenido cero. Sin embargo, en algunos casos este problema puede ser resuelto en forma simple si el conjunto en cuestión es:

- un conjunto finito,
- un conjunto infinito numerable,
- un "pedazo" de superficie o curva suave,
- la unión finita de algunos de los conjuntos mencionados anteriormente.

En los siguientes ejemplos se ilustran algunos de estos casos.

Ejemplo 5.4.1. Sea $f : I\!R^3 \to I\!R$ definida por $f(x,y,z) = x^2y + sen(xyz)$, y sea $C = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$. Entonces, f es integrable sobre C ya que f es continua en $I\!R^3$ y C es un rectángulo en $I\!R^3$ (por lo tanto, es medible Jordan), i.e., la integrabilidad de f sobre C sigue de la Proposición 5.4.2.

Ejemplo 5.4.2. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, y sea $C = [0,1]\times[0,1]$.

En este caso, $B = \{(x,y) : f \text{ es discontinua en } (x,y)\} = \{(0,0)\}$, y por lo tanto, la condición $CI1$ se cumple ya que $B \cap C = \{(0,0)\}$ es de medida cero (por ser un conjunto finito). Además, la condición $CI2$ también se cumple porque C es un rectángulo en $I\!R^2$. Sin embargo, f no es integrable sobre C, porque f no es acotada en $C(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,0) = +\infty)$. En este caso no se cumple la condición de acotamiento de la función exigida en la Definición 5.4.2.

Notar que esta función tampoco es integrable sobre $C \sim \{(0,0)\}$, ya que aun cuando f es continua en $C \sim \{(0,0)\}$, sigue siendo no acotada en $C \sim \{(0,0)\}$ (i.e., no cumple la Definición 5.2.7). Este resultado cambia si se considera el conjunto $C \sim D$, donde D es una bola abierta centrada en $(0,0)$ y de radio $r(0 < r < 1)$, ya que en este caso la función $f_{C\sim D}$ es integrable sobre C (porque es acotada en C y es discontinua en el conjunto de puntos (x,y) tales que $x^2+y^2 = r^2$, el cual es de medida cero), y por la Definición 5.4.2 se cumple que f es integrable sobre $C \sim D$.

La siguiente proposición generaliza los resultados de la Proposición 5.2.2 al considerar conjuntos medibles Jordan en lugar de rectángulos.

Proposición 5.4.5. Si $f, g : I\!R^n \to I\!R$ son funciones integrables sobre un conjunto medible Jordan $C \subset I\!R^n$, entonces se cumplen

(1) $f+g$ es integrable sobre C y $\int\limits_C (f+g) = \int\limits_C f + \int\limits_C g$.
(2) αf es integrable sobre C para todo $\alpha \in I\!R$ y $\int\limits_C \alpha f = \alpha \int\limits_C f$.
(3) Si $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in C$, entonces $\int\limits_C f \geq \int\limits_C g$.
(4) Las funciones $f^+, f^-, |f|, \max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ son integrables sobre C y para $|f|$ se tiene que $|\int\limits_C f| \leq \int\limits_C |f|$.
(5) La función $f\cdot g$ es integrable sobre C.
(6) Si D es medible Jordan tal que $C \subset D$ y si $f \geq 0$ e integrable en D, entonces $\int\limits_C f \leq \int\limits_D f$.

Demostración. Sigue de la Proposición 5.2.2 y de la Definición 5.4.2. El argumento para demostrar (1) es el siguiente. La Definición 5.4.2 aplicada a la hipótesis de esta proposición establece que las funciones f_C y g_C son integrables sobre un rectángulo A que contiene a C. La Proposición 5.2.2(1) aplicada a f_C, g_C y A implica que $f_C + g_C$ es integrable sobre A y que $\int_A (f_C + g_C) = \int_A f_C + \int_A g_C$, y esto último junto con la Definición 5.4.2 implican (1). Un argumento similar permite demostrar las propiedades (2)- (5). Los detalles se dejan propuestos como ejercicio. ■

Las condiciones $CI1$ y $CI2$ señaladas anteriormente, aseguran la existencia de la integral de una función acotada sobre un conjunto acotado. En lo que sigue demostraremos que bajo tales condiciones, la integral "ignora" a conjuntos de contenido cero, en el sentido que el valor de la integral es independiente de la manera en que se defina la función en dicho conjunto. El resultado en cuestión es una consecuencia de las dos proposiciones siguientes.

Proposición 5.4.6. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función integrable sobre un conjunto acotado $C \subset Domf$. Si $m = inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$ y $M = sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$, entonces se cumplen:

(1) $mv(C) \leq \int_C f \leq Mv(C)$.

(2) $\int_C f = 0$, si C es de contenido cero.

(3) Existe $\lambda \in [m, M]$ tal que $\int_C f = \lambda v(C)$.

Demostración. (1) Las Definiciones 5.4.2 y 5.4.3 junto con la Proposición 5.4.3 implican que C es medible Jordan, y su contenido es $v(C) = \int_C \mathbb{1}$. Además, como $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$, para todo $\mathbf{x} \in C$, las propiedades (2) y (3) de la Proposición 5.4.5 y la Definición 5.4.3 implican (1) ya que

$$mv(C) = m\int_C \mathbb{1} = \int_C m \leq \int_C f \leq \int_C M = M\int_C \mathbb{1} = Mv(C).$$

(2) Sigue directamente de la propiedad (1) anterior y de la Proposición 5.4.4.(4) ya que C es de contenido cero, i.e., $v(C) = 0$.
(3) Si C es de contenido cero, entonces la igualdad se cumple para todo $\lambda \in I\!R$ por (2). Si C no es de contenido cero, entonces la igualdad se cumple al elegir $\lambda = \int_C f/v(C)$ (esta propiedad se conoce como el Teorema del Valor Medio de la integral). ■

El siguiente resultado establece la propiedad aditiva de la integral con respecto a ciertos conjuntos medibles Jordan.

Proposición 5.4.7. Si $f : I\!R^n \to I\!R$ es una función integrable sobre dos conjuntos medible Jordan C y D, entonces f es integrable sobre $C \cap D$ y $C \cup D$. Además, si

$\mathrm{Int}(C \cap D) = \phi$, entonces
$$\int\limits_{C\cup D} f = \int\limits_{C} f + \int\limits_{D} f.$$

Demostración. En primer lugar nótese que por la hipótesis de C y D, la Proposición 5.4.4 (2) implica que $C \cap D$ y $C \cup D$ son medible Jordan, lo que junto con la hipótesis para f aseguran que f es integrable sobre $C \cap D$ y $C \cup D$ (ya que se cumplen las condiciones $CI1$ y $CI2$ para f y cada uno de dichos conjuntos). Además, como $\mathrm{Int}(C \cap D) = \phi$, la Proposición 5.4.4(4) implica que $C \cap D$ es de contenido cero, y por la proposición anterior (5.4.6(2)) resulta que $\int\limits_{C\cap D} f = 0$.

Ahora demostramos la propiedad aditiva de la integral de f con respecto al conjunto $C \cup D$.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo tal que $C \cup D \subset A$. Por la Definición 5.4.2 se tiene que las funciones $f_C, f_D, f_{C\cap D}$ y $f_{C\cup D}$ son integrables sobre A. Si $\mathcal{P}$ es una partición de A, entonces la suma superior asociada al par $(f_{C\cup D}, \mathcal{P})$ es,

$$U(f_{C\cup D}, \mathcal{P}) = \sum_S M_s(f_{C\cup D}) \cdot v(S)$$

donde la suma se extiende sobre todos los rectángulos S determinados por $\mathcal{P}$. En particular, si $S(C), S(D)$ y $S(C \cap D)$ denotan las partes de dicha suma formadas, respectivamente, por aquellos términos asociados a los rectángulos $S \in \mathcal{P}$ que intersectan a C, D y $C \cap D$, entonces se tiene que

$$U(f_{C\cup D}, \mathcal{P}) = S(C) + S(D) - S(C \cap D),$$

y por la definición de f_C, f_D y $f_{C\cap D}$, resulta que $S(C)$, $S(D)$ y $S(C \cap D)$ corresponden precisamente a la sumas superior de dichas funciones determinadas por la partición $\mathcal{P}$ de A, y como $\int\limits_A f_{C\cap D} = \int\limits_{C\cap D} f = 0$, las Definiciones 5.1.6 y 5.1.7 implican que dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{P}'$ partición de A tal que $U(f_{C\cup D}, \mathcal{P}') < \varepsilon$, y por lo tanto, si $\mathcal{P}^*$ es un refinamiento común de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ se tiene que

$$U(f_{C\cup D}, \mathcal{P}^*) = S^*(C) + S^*(D) - S^*(C \cap D),$$

donde $S^*(C), S^*(D)$ y $S^*(C \cap D)$ tienen el mismo significado que $S(C), S(D)$ y $S(C \cap D)$, con respecto a la partición $\mathcal{P}^*$. La relación entre estas sumas superiores y los valores de las integrales de las funciones f_C, f_D y $f_{C\cap D}$ (siendo cada uno de ellos, el ínfimo de las correspondientes sumas superiores), implica que

$$S^*(C) \geq \int\limits_A f_C, \quad S^*(D) \geq \int\limits_A f_D, \quad \text{y} \quad S^*(C \cap D) < \varepsilon,$$

y de estas desigualdades sigue que

$$U(f_{C\cup D}, \mathcal{P}^*) > \int\limits_A f_C + \int\limits_A f_D - \varepsilon,$$

y esto significa, por la Definición 5.1.6, que la integral superior de $f_{C\cup D}$ sobre A es igual a

$$\overline{\int}_A f_{C\cup D} = \int\limits_A f_C + \int\limits_A f_D,$$

y como f es integrable sobre $C \cup D$, la igualdad anterior junto con la Definición 5.4.2 implican la propiedad aditiva, i.e.,

$$\int\limits_{C\cup D} f = \int\limits_C f + \int\limits_D f,$$

completando la demostración. ■

Corolario 5.4.8. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función integrable sobre dos conjuntos medibles Jordan C y D. Si $f \geq 0$ en $C \cup D$, entonces

$$\int\limits_{C\cup D} f \leq \int\limits_C f + \int\limits_D f.$$

Demostración. La hipótesis para C y D y las propiedades (2) y (3) de la Proposición 5.4.4 implican que $C-D$ es medible Jordan (ya que $C-D = C-(C\cap D)$ y $(C\cap D) \subset C$), y como $C \cup D = (C-D) \cup D$ y $(C-D) \cap D = \phi$, la proposición anterior implica que

$$\int\limits_{C\cup D} f = \int\limits_{(C-D)\cup D} f = \int\limits_{C-D} f + \int\limits_D f,$$

y el corolario sigue de la Proposición 5.4.5(6) y de la hipótesis $f \geq 0$ en $C \cup D$ ya que $\int\limits_{C-D} f \leq \int\limits_C f$. ■

En la siguiente proposición se demuestra que, bajo ciertas condiciones, el conjunto de las discontinuidades de una función acotada sobre un conjunto acotado, es ignorado por la integral.

Proposición 5.4.9. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función integrable sobre un conjunto acotado C, y sea $Z \subset C$ un conjunto de contenido cero. Si $g : I\!R^n \to I\!R$ es una función definida y acotada en C tal que $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in C - Z$, entonces g es integrable sobre C y se cumple que

$$\int_C g = \int_C f.$$

Demostración. La hipótesis para f asegura que C es medible Jordan (se cumplen condiciones CI1 y CI2 para f y C). Además, la definición de g implica que $B_g \subset B_f \cup Z$, donde B_f y B_g denotan los conjuntos de puntos de discontinuidad de f y g, respectivamente, y como Z es de contenido cero, se tiene que B_g es de medida cero (ya que B_f lo es, por hipótesis), y por lo tanto, las condiciones CI1 y CI2 también se cumplen para g y C, i.e., la función g es integrable sobre C.

Ahora demostramos que $\int_C g = \int_C f$, y para esto consideramos la función $h = f - g$ definida en C. Las propiedades (2) y (3) de la Proposición 5.4.5 implican que h es integrable sobre C y que $\int_C h = \int_C f - \int_C g$. Por otra parte, $C - Z$ es medible Jordan ya que C y Z satisfacen la Proposición 5.4.4(3), y como $\operatorname{Int}((C-Z) \cap Z) = \phi$, la proposición anterior aplicada a la función h y al conjunto $C = (C - Z) \cup Z$ implica que

$$\int_C h = \int_{C-Z} h + \int_Z h = 0$$

ya que $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = 0$, para todo $\mathbf{x} \in C - Z$ (lo que implica que la integral de h sobre $C - Z$ es igual a 0), y la función h y el conjunto Z satisfacen la Proposición 5.4.6(2) (i.e., la integral de h sobre Z también es igual a 0), y por lo tanto, la proposición sigue de la definición de h. ■

Este resultado permite extender la definición de la integral a funciones que no están definidas o no son acotadas en todo el conjunto de integración. En efecto, si C es un conjunto acotado medible Jordan, y si f es una función definida, acotada e integrable en $C - Z$, siendo $Z \subset C$ de contenido cero, entonces se puede decir que f es integrable sobre C y definir la integral de f sobre C como la integral de f sobre $C - Z$, i.e.,

$$\int_C f = \int_{C-Z} f,$$

y esto último se justifica por el resultado anterior en el sentido que el dominio de f es extendido a todo el conjunto C, definiendo f en Z de modo que f sea acotada en todo el conjunto C. En particular, si $f(\mathbf{x}) = 0$, para todo $\mathbf{x} \in Z$, entonces

$$\int_C f = \int_C f_{C-Z},$$

donde $f_{C-Z} = f \cdot \mathbb{1}_{C-Z}$.

Las definiciones y los resultados que se han presentado permiten dar respuesta al siguiente problema: "Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada en un conjunto acotado $C \subset \mathbb{R}^n$, determinar si f es integrable sobre C".

Sin embargo, la respuesta a este problema no incluye el valor de la integral (salvo casos muy particulares), cuando la función es integrable. En la siguiente sección se establece un resultado que permite completar la respuesta al problema del cálculo de la integral de una función integrable f sobre el conjunto C.

5.5. El Teorema de Fubini e integrales iteradas.

En el caso de funciones de una variable, el valor de la integral de una función sobre un intervalo dado, se obtiene mediante la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, y la dificultad que presenta dicho cálculo depende de la función que se integra (i.e., la dificultad está en la determinación de una primitiva o antiderivada de la función en cuestión). En el caso de varias variables, en general, la mayor dificultad que presenta el cálculo de la integral múltiple está determinada por la región de integración. Más precisamente, la dificultad se debe a la forma que puede tener la frontera de la región de integración. Sin embargo, el problema del cálculo de integrales múltiples (tal como se demuestra más adelante), puede ser resuelto en forma similar a la manera como se calcula la diferencial de una función escalar: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{a}$, entonces la diferencial de f en $\mathbf{a}$ se obtiene mediante el cálculo de las derivadas de n funciones de una variable real asociadas a f. Similarmente, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre un conjunto acotado C, entonces la integral de f sobre C se obtiene mediante el cálculo de las integrales de n funciones de una variable real asociadas a f.

El siguiente ejemplo ilustra la afirmación anterior.

Ejemplo 5.5.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = xy^2$, y sea $C = \{(x,y)\} : 0 \le y \le 1 - x^2, 0 \le x \le 1\}$.

Claramente, la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (por el álgebra de funciones aplicada a $f = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_2$), y por la Proposición 3.2.1 se tiene que la matriz Jacobiana de f en (a_1, a_2) es igual a la matriz de las derivadas parciales de f en (a_1, a_2), i.e.,

$$f'(a_1, a_2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)) = (a_2^2 \quad 2a_1a_2),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ se obtienen como las derivadas de las funciones de una variable real definidas por: $g(x) = xa_2^2$ y $h(y) = a_1y^2$, i.e., $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = g'(a_1)$ y

$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = h'(a_2)$ y estos números determinan la diferencial de f en (a_1, a_2), ya que por la Definición 3.1.2 y la Proposición 3.2.1 se tiene que

$$D(f, (a_1, a_2))(x, y) = f'(a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_2^2 x + 2a_1 a_2 y.$$

Lo anterior también se puede obtener mediante el cálculo de las funciones correspondientes a las derivadas parciales de f. Recordar que estas funciones quedan definidas como sigue.

Para cada $y \in I\!R$ (fijo) sea $g_y : I\!R \to I\!R$ definida por $g_y(x) = f(x, y)$, i.e., $g_y(x) = xy^2$. Como g_y es derivable ("con respecto a x"), entonces $g_y'(x) = y^2$, y por definición, resulta que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g_y'(x) = y^2$, y $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = a_2^2$.

Análogamente, para cada $x \in I\!R$ (fijo), se define la función $h_x : I\!R \to I\!R$ tal que $h_x(y) = f(x, y)$, i.e., $h_x(y) = xy^2$, y la derivada de h_x ("con respecto a y") es la función $\frac{\partial f}{\partial y}$, i.e., $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h_x'(y) = 2xy$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = 2a_1 a_2$.

Ahora consideremos el problema de calcular la integral de f sobre C. Primero, notar que la función $f_C : I\!R^2 \to I\!R$ definida por

$$f_C(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in C \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin C, \end{cases}$$

es integrable sobre el rectángulo $A = [0, 1] \times [0, 1]$ porque $C \subset A$ es medible Jordan y f satisface la Proposición 5.4.2 en A ya que el conjunto

$$B = \{(x, y) : f_C \text{ es discontinua en } (x, y)\} = \{(x, y) : y = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1\},$$

es un conjunto de medida cero. Además, la Definición 5.4.2 establece que $\int\limits_C f = \int\limits_A f_C$, y por lo tanto, el problema a resolver es el cálculo de la integral de f_C sobre A, para lo cual usaremos funciones de una variable asociadas a f y que son definidas en forma análoga a las funciones g_y y h_x.

Para cada $y \in [0, 1]$, sea $g_y : I\!R \to I\!R$ la función definida por $g_y(x) = f_C(x, y)$, para $0 \leq x \leq 1$, i.e.,

$$g_y(x) = \begin{cases} xy^2 & \text{si } (x, y) \in C \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin C, \end{cases}$$

y como $y \in [0, 1]$ está fijo, la definición de C implica que $(x, y) \in C$ si $0 \leq y \leq 1 - x^2$, i.e., $0 \leq x \leq \sqrt{1 - y}$, y por lo tanto,

$$g_y(x) = \begin{cases} xy^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y} \\ 0, & \text{si } \sqrt{1 - y} < x \leq 1. \end{cases}$$

Por definición, el dominio de g_y es el intervalo $[0,1]$, sin embargo, la parte efectiva de su dominio, i.e., la que está relacionada con C, es el intervalo $[0, \sqrt{1-y}]$, el cual puede ser identificado con el conjunto que resulta al intersectar C con la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(0, y)$.

La Figura 5.5.1 ilustra la parte efectiva del dominio de g_y para los casos: (a) $y = 0$; (b) $0 < y < 1$; y (c) $y = 1$.

Figura 5.5.1.

La Figura 5.5.2 ilustra el gráfico de la función g_y (en el plano XU), para cada uno de los casos indicados en la figura anterior (para evitar ambigüedad, se usa la letra U para identificar al eje de las "ordenadas" en el plano $\mathbb{R}^2$).

Figura 5.5.2.

Claramente, para cada $y \in [0,1]$ (fijo), la función g_y (de una variable), es integrable sobre el intervalo $[0,1]$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo, resulta que

$$\int_0^1 g_y(x)dx = \int_0^{\sqrt{1-y}} xy^2 dx = y^2 \int_0^{\sqrt{1-y}} x dx = y^2 \cdot \frac{x^2}{2} \ |_0^{\sqrt{1-y}},$$

i.e., $\int_0^1 g_y(x)dx = \frac{1}{2}(1-y)\cdot y^2$, y este número (que depende de y), es el área de la región en el plano XU determinada por el gráfico de g_y y el eje X. Sin embargo, como dicho plano XU se puede identificar con el plano en $I\!R^3$ cuyos puntos (x_1, x_2, x_3) tienen su segunda coordenada $x_2 = y$ (fijo), el área de la región mencionada coincide con el área de la región contenida en el plano $x_2 = y$, y que está determinada por la intersección del gráfico de f con el plano $x_2 = y$ y el segmento lineal $[0,1]\times\{y\}\times\{0\}$. Esta interpretación geométrica es análoga a la que se establece en la definición intuitiva de la integral de una función de una sola variable real, y por lo tanto, si y' e y'' están en $[0,1]$ con $y' < y''$ e $y'' - y'$ pequeño, entonces el volumen de la región limitada por el gráfico de f y el rectángulo $[0,1]\times[y', y'']\times\{0\}$ (contenido en el plano $x_3 = 0$), es aproximadamente igual a $(y'' - y')\cdot \int_0^1 g_y(x)dx$, para cualquier y fijo en $[y', y'']$, y por lo tanto si $\{t_1, ..., t_p\}$ es una partición de $[0,1]$ y si $C_k = [0,1]\times[t_k, t_{k+1}]$ para $k = 1, ..., p-1$, entonces el volumen de la región bajo el gráfico de f es igual a

$$\int_C f = \sum_{k=1}^{p-1}(t_{k+1} - t_k)\int_{C_k} f \approx \sum_{k=1}^{p-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot \int_0^1 g_{y_k}(x)dx$$

donde y_k es un punto cualquiera (fijo) en $[t_k, t_{k+1}]$, y como la función g_y es integrable sobre $[0,1]$ para cada $y \in [0,1]$, la segunda suma puede ser considerada como una suma de Riemann de la función $G : I\!R \to I\!R$ definida por $G(y) = \int_0^1 g_y(x)dx$; para $0 \leq y \leq 1$, y por lo tanto , se tendrá que la integral de f sobre C es igual a

$$\int_C f = \int_0^1 G(y)dy = \int_0^1 (\int_0^1 g_y(x)dx)dy,$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\int_C f &= \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx)dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)y^2 dy \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Si se procede en forma análoga con la función $h_x : I\!R \to I\!R$ definida por $h_x(y) = f_C(x,y)$, para $0 \leq y \leq 1$ y $x \in [0,1]$ (fijo), también se debería cumplir que

$$\int_C f = \int_0^1 H(x)dx$$

donde $H : I\!R \to I\!R$ es la función definida por

$$H(x) = \int_0^1 h_x(y)dy.$$

La definición de h_x implica que

$$H(x) = \int_0^{1-x^2} xy^2 dy = \frac{1}{3}x(1-x^2)^3,$$

y por lo tanto, H es integrable sobre $[0,1]$ y

$$\int_0^1 H(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x(1-x^2)^3 dx = \frac{1}{24},$$

y con esta igualdad se comprueba que

$$\int_C f = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx)dy = \int_0^1 (\int_0^{1-x^2} f(x,y)dy)dx = \frac{1}{24}.$$

En la siguiente proposición, conocida conmo el Teorema de Fubini, se demuestra formalmente el resultado establecido en el ejemplo anterior.

Proposición 5.5.1. Sean $A \subset I\!R^n$ y $B \subset I\!R^m$ rectángulos y sea $f : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R$ una función integrable sobre el rectángulo $A \times B$. Para cada $\mathbf{y} \in B$ sea $g_{\mathbf{y}} : I\!R^n \to I\!R$ la función definida por $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, para todo $\mathbf{x} \in A$, y sean G^i y G^s las funciones de $I\!R^m$ en $I\!R$ definidas en B por

$$G^i(\mathbf{y}) = \underline{I}(g_{\mathbf{y}}, A) \quad \text{y} \quad G^s(\mathbf{y}) = \bar{I}(g_{\mathbf{y}}, A), \quad \mathbf{y} \in B.$$

Entonces, G^i y G^s son integrables sobre B, y

$$\int_{A\times B} f = \int_B G^i = \int_B G^s.$$

Demostración. Se demostrará que la función G^i satisface la Definición 5.1.7 en B, i.e., $\underline{I}(G^i, B) = \bar{I}(G^i, B)$ y que este número es igual a la integral de f sobre $A \times B$. Un argumento similar permite deducir el mismo resultado para la función G^s.

Sean $\mathcal{P}_A$ y $\mathcal{P}_B$ particiones de A y B respectivamente, y sea $\mathcal{P}$ la partición de $A \times B$ determinada por $\mathcal{P}_A$ y $\mathcal{P}_B$ de manera tal que cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ es de la forma $S = S_A \times S_B$, donde $S_A \in \mathcal{P}_A$ y $S_B \in \mathcal{P}_B$.

La definición del volumen de un rectángulo (Definición 5.2.1) y las propiedades del ínfimo implican que para cada subrectángulo $S_A \times S_B$ se tiene que $v(S_A \times S_B) = v(S_A) \cdot v(S_B)$ y que $\inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in S_A \times S_B\} \leq \inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in S_A\}$, para cada $\mathbf{y} \in S_B$, y como $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, la desigualdad anterior implica que para cada $\mathbf{y} \in S_B$,

$$m_{S_A \times S_B}(f) = \inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in S_A \times S_B\} \leq \inf\{g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S_A\} = m_{S_A}(g_{\mathbf{y}}),$$

i.e., $m_{S_A \times S_B}(f) \leq m_{S_A}(g_{\mathbf{y}})$, para cada $\mathbf{y} \in S_B$, y por lo tanto,

$$\sum_{S_A} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A) \leq \sum_{S_A} m_{S_A}(g_{\mathbf{y}}) \cdot v(S_A) = L(g_{\mathbf{y}}, \mathcal{P}_A) \leq \underline{I}(g_{\mathbf{y}}, A),$$

i.e., $\sum\limits_{S_A} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A) \leq G^i(\mathbf{y})$, para cada $\mathbf{y} \in S_B$, y en particular, se cumple que $\sum\limits_{S_A} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A) \leq m_{S_B}(G^i)$.

Por otra parte, como $\mathcal{P}$ es una partición de $A \times B$, sigue que

$$\begin{aligned}
L(f, \mathcal{P}) = \sum_{S} m_S(f) \cdot v(S) &= \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A \times S_B) \\
&= \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A) \cdot (S_B) \\
&= \sum_{S_B} (\sum_{S_A} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A)) \cdot v(S_B) \\
&\leq \sum_{S_B} m_{S_B}(G^i) \cdot v(S_B) \\
&= L(G^i, \mathcal{P}_B),
\end{aligned}$$

i.e., $L(f, \mathcal{P}) \leq L(G^i, \mathcal{P}_B)$.

Un argumento similar, aplicado a $M_{S_A \times S_B}(f)$ y a $U(f, \mathcal{P})$, implica que $U(G^s, \mathcal{P}_B) \leq U(f, \mathcal{P})$, y como $G^i \leq G^s$, sigue que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(G^i, \mathcal{P}_B) \leq U(G^i, \mathcal{P}_B) \leq U(G^s, \mathcal{P}_B) \leq U(f, \mathcal{P}),$$

y estas desigualdades junto con la hipótesis de que f es integrable sobre $A \times B$ (i.e., $sup\{L(f,\mathcal{P})\} = \inf\{U(f,\mathcal{P})\}$), implican que G^i es integrable y que $I(f, A \times B) = I(G^i, B)$.

La proposición también es válida para G^s y su justificación sigue al aplicar el argumento anterior obteniéndose las siguientes desigualdades,

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(G^i,\mathcal{P}_B) \leq L(G^s,\mathcal{P}_B) \leq U(G^s,\mathcal{P}_B) \leq U(f,\mathcal{P}),$$

las cuales implican que G^s es integrable sobre B y que $I(f, A \times B) = I(G^s, B)$. ■

En el resultado anterior también es habitual la siguiente notación,

$$\int_{A\times B} f = \int_B G^i = \int_B (\underline{\int}_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x})d\mathbf{y} = \int_B (\overline{\int}_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x})d\mathbf{y} = \int_B G^s.$$

Además, un argumento similar permite demostrar que

$$\int_{A\times B} f = \int_A H^i = \int_A (\underline{\int}_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y})d\mathbf{x} = \int_A (\overline{\int}_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y})d\mathbf{x} = \int_A H^s,$$

donde H^i y H^s son las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definidas por $H^i(\mathbf{x}) = \underline{I}(h_{\mathbf{x}}, B)$ y $H^s(\mathbf{x}) = \bar{I}(h_{\mathbf{x}}, B)$, para $\mathbf{x} \in A$, siendo $h_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la función asociada a $\mathbf{x} \in A$ (fijo) y definida por $h_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{y} \in B$.

El resultado anterior y las últimas notaciones permiten justificar la siguiente definición.

Definición 5.5.1. Las integrales de las funciones G^i, G^s y H^i, H^s reciben el nombre de *integrales iteradas* de f según las ordenes $d\mathbf{x}d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{y}d\mathbf{x}$, respectivamente.

Claramente, si f es continua en $A \times B$, entonces las funciones $g_{\mathbf{y}}$ y $h_{\mathbf{x}}$ son integrables para cada $\mathbf{x} \in A$ y cada $\mathbf{y} \in B$, y por la Definición 5.1.7, se cumple que $G^i = G^s$ y $H^i = H^s$, y además, por la Proposición 5.5.1 se tiene

$$\int_{A\times B} f = \int_A (\int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y})d\mathbf{x} = \int_B (\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x})d\mathbf{y}.$$

La observación anterior es habitualmente identificada con el Teorema de Fubini, debido a que en la práctica la función f es continua en $A \times B$. Sin embargo, hay casos en los cuales la función $g_{\mathbf{y}}$ ó $h_{\mathbf{x}}$ no es integrable para algún $\mathbf{y}$ ó $\mathbf{x}$, aún cuando f sea integrable, y en tales casos el Teorema de Fubini debe ser aplicado tal como está establecido (i.e., se deben considerar las funciones G^i y G^s ó H^i y H^s). El siguiente ejemplo ilustra uno de esos casos.

Ejemplo 5.5.2. Sea $C \subset [0,1]$ el conjunto formado por los racionales de la forma $x = p/q$, con p y q primos entre si, y sea $f : [0,1] \times [0,1] \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional e } y \text{ es irracional} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{si } x \in C \text{ e } y \text{ es racional.} \end{cases}$$

La función f es integrable sobre $[0,1] \times [0,1]$ ya que $\bar{I}(f) = \underline{I}(f) = 1$. En efecto, si $\mathcal{P}$ es una partición cualquiera de $[0,1] \times [0,1]$, entonces para cada subrectángulo $S \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$M_S(f) = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in S\} = 1$$

ya que S contiene puntos (x,y) con x irracional, y por lo tanto

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S) = \sum_S v(S) = v([0,1] \times [0,1]) = 1,$$

y esto implica que $\bar{I}(f) = \inf\{U(f,\mathcal{P})\} = 1$. La justificación de que $\underline{I}(f) = 1$ se deja propuesta como ejercicio.

Consideremos ahora, para cada $x \in [0,1]$, la función $h_x : [0,1] \to I\!R$ definida por $h_x(y) = f(x,y), y \in [0,1]$.

Si x es irracional, entonces $h_x(y) = 1$, para todo $y \in [0,1]$, y claramente h_x es integrable sobre $[0,1]$, y se tiene que, $H^i(x) = H^s(x) = \int_0^1 h_x(y)dy = \int_0^1 1dy = 1$.

Si x es racional y $x \in C$ $(x = p/q)$, entonces

$$h_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ es irracional} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{si } y \text{ es racional,} \end{cases}$$

y por lo tanto, si $\mathcal{P}'$ es una partición de $[0,1]$, resulta que para todo subintervalo $S \in \mathcal{P}'$

$$M_S(h_x) = 1 \quad \text{y} \quad m_S(h_x) = 1 - \frac{1}{q}$$

ya que S contiene puntos (x,y) cuyas segundas componentes son números racionales e irracionales y de esto sigue que

$$U(h_x,\mathcal{P}') = 1 \quad \text{y} \quad L(h_x,\mathcal{P}') = 1 - \frac{1}{q}$$

y por lo tanto,

$$H^i(x) = \underline{I}(h_x) = 1 - \frac{1}{q} \quad \text{y} \quad H^s(x) = \bar{I}(h_x) = 1,$$

i.e., la función h_x no es integrable sobre $[0,1]$ cuando $x \in C$, ya que $\underline{I}(h_x) \neq \bar{I}(h_x)$.

En resumen, para cada $x \in [0,1]$ se tiene que la integral $\int\limits_0^1 f(x,y)dy$ existe (y es igual a 1) si x es irracional y no existe si x es racional, y por lo tanto, la integral iterada $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 f(x,y)dy)dx$ no existe, y por lo tanto, $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f \neq \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 f(x,y)dy)dx$.

El resultado anterior parece contradecir el Teorema de Fubini. Sin embargo, no hay tal contradicción ya que el teorema establece que las funciones H^i y H^s son integrables sobre $[0,1]$, y no asegura nada respecto de la integrabilidad de la función h_x, y en consecuencia debe ser aplicado de acuerdo a su enunciado.

Claramente, si $A = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset I\!R^n$ y si $f : A \to I\!R$ es una función que se comporta bien respecto de la integrabilidad (e.g., f es continua en A), entonces el Teorema de Fubini puede ser aplicado en forma reiterada, obteniéndose las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\int\limits_A f &= \int\limits_{a_n}^{b_n} (...(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1,...,x_n)dx_1)...)dx_n \\ &= \int\limits_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} (...(\int\limits_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1,...,x_n)dx_{\sigma(1)})...)dx_{\sigma(n)},\end{aligned}$$

donde σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$.

Si $C \subset A$ es un conjunto medible Jordan, entonces el Teorema de Fubini también puede ser usado para calcular la integral de f sobre C, aplicando la observación anterior a la igualdad: $\int\limits_C f = \int\limits_A f \cdot 1\!\!1_C$. En los siguientes ejemplos se ilustra tal aplicación.

Ejemplo 5.5.3. Sea $C \subset I\!R^2$ el conjunto formado por los puntos (x,y) tales que, $y \geq 1 - |x|$; $x^2 + y^2 \leq 4$; $-1 \leq x \leq 2$, y $0 \leq y \leq 2$. Si $f : I\!R^2 \to I\!R$ es la función definida por $f(x,y) = xy$, calcular (si existe) la integral de f sobre C.

La Figura 5.5.3(a) ilustra al conjunto C (región achurada).

Figura 5.5.3

En primer lugar, nótese que el conjunto C está contenido en el rectángulo $A = [-1,2] \times [0,2]$, y que la frontera de C está formada por la unión de cuatro segmentos lineales y un arco del círculo centrado en el origen y de radio 2. Como cada uno de estos cinco conjuntos es de contenido cero, se tiene que la frontera de C es de contenido cero, y como f es continua en $\mathbb{R}^2 (f = \pi_1 \cdot \pi_2)$, las Propiedades 5.4.2 y 5.4.3 implican que la función $f \cdot \mathbb{1}_C$ es integrable sobre A, y por lo tanto, f es integrable sobre C (Definición 5.4.2). Además, si $f_C = f \cdot \mathbb{1}_C$, la Definición 5.4.2 establece que

$$\int\limits_C f = \int\limits_A f_C,$$

donde $f_C : [-1,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f_C(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C \\ 0 & \text{si } (x,y) \in A - C. \end{cases}$$

Otra manera que permite justificar la integrabilidad de la función f_C sobre A, consiste en comprobar que f_C satisface la Proposición 5.4.2 en A. La siguiente argumentación muestra que esto último se cumple para el ejemplo que estamos considerando.

Por la definición de la función f_C, el conjunto B de los puntos de discontinuidad de f_C en A, está formado por el arco circular (determinado por: $x^2 + y^2 = 4$, para $-1 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$) y dos segmentos lineales (determinados por: $y = 1 - |x|$, para $-1 \leq x \leq 1$), y como cada uno de estos tres conjuntos es de medida cero, la Proposición 5.3.1(5) implica que B es de medida cero, y por lo tanto, la Proposición 5.4.2 se cumple para f_C y A.

La integrabilidad de f_C sobre A permite la aplicación del Teorema de Fubini, i.e., la integral de f_C sobre A es obtenida mediante el cálculo de cualquiera de las dos integrales iteradas. Para una mayor ilustración, calcularemos ambas integrales iteradas.

Cálculo de la integral en el orden $dxdy$. Según la Proposición 5.5.1 se debe considerar, para cada $y \in [0,2]$, la función $g_y : I\!R \to I\!R$ definida por $g_y(x) = f_C(x,y)$, para todo $x \in [-1,2]$, y con ella obtener la función $G^i : I\!R \to I\!R$ definida por $G^i(y) = \underline{I}(g_y,[-1,2])$. La función G^i es integrable sobre $[0,2]$ y la integral de G^i (con respecto a y) es la integral iterada de f en el orden $dxdy$.

Sea $y \in [0,2]$. La función $g_y : [-1,2] \to I\!R$ queda definida por

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } x \in [-1,2] \text{ y } (x,y) \in C \\ 0, & \text{si } x \in [-1,2] \text{ y } (x,y) \notin C, \end{cases}$$

y si $C_y = \{(x,y) : (x,y) \in C, -1 \le x \le 2\}$, entonces $C_y = ([-1,2] \times \{y\}) \cap C$ y se tiene que

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C_y \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin C_y, \end{cases}$$

i.e., la función g_y queda totalmente determinada mediante el conjunto C_y, el cual a su vez se obtiene como la intersección de la recta paralela al eje X (que pasa por el punto $(0,y)$) con el conjunto C. Esta intersección depende evidentemente de la forma que tiene el conjunto C, y más específicamente queda determinada por la frontera de C. En la Figura 5.5.4 se ilustran los diferentes tipos de conjuntos C_y cuando: (a) $0 \le y \le 1$; (b) $1 \le y \le \sqrt{3}$; (c) $\sqrt{3} \le y \le 2$.

Figura 5.5.4.

Por la definición de f, la función g_y resulta ser integrable para cada valor de y en cada uno de los tres casos (a), (b) y (c) ya que satisface la Proposición 5.4.2 (admite a lo más cuatro puntos de discontinuidad en el caso (a) y dos puntos en los casos (b) y (c)), y por lo tanto, la Definición 5.1.7 implica que

$$G^i(y) = \underline{I}(g_y,[-1,2]) = \bar{I}(g_y,[-1,2]) = G^s(y) = \int_{-1}^{2} g_y(x)dx.$$

Además, si $G : I\!R \to I\!R$ es la función definida por

$$G(y) = \int_{-1}^{2} g_y(x)dx, \text{ para } y \in [-1, 2],$$

entonces el Teorema de Fubini establece que G es integrable sobre $[0, 2]$ y que

$$\int_A f_C = \int_0^2 G(y)dy = \int_0^2 (\int_{-1}^2 g_y(x)dx)dy.$$

Para calcular la integral iterada resultante, se debe tener en cuenta que la función g_y depende del conjunto C_y para cada $y \in [0, 2]$. Por lo tanto, si $L_y = \{x : (x, y) \in C_y\}$, los casos (a), (b) y (c) de la Figura 5.5.4 implican que

$$L_y = \begin{cases} [-1, -1+y] \cup [1-y, \sqrt{4-y^2}], & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ [-1, \sqrt{4-y^2}], & \text{si } 1 \leq y \leq \sqrt{3}, \\ [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}], & \text{si } \sqrt{3} \leq y \leq 2, \end{cases}$$

y con estos conjuntos L_y, la función g_y queda expresada por

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } x \in L_y \\ 0, & \text{si } x \in L_y^c = [-1, 2] - L_y \end{cases}$$

y esto implica que la función G satisface,

$$G(y) = \int_{-1}^{2} g_y(x)dx = \int_{L_y} g_y(x)dx + \int_{L_y^c} g_y(x)dx = \int_{L_y} f(x, y)dx,$$

y usando la definición de L_y resulta que:

- Si $0 \leq y \leq 1$, entonces $G(y) = \int_{-1}^{-1+y} xydx + \int_{1-y}^{\sqrt{4-y^2}} xydx.$
- Si $1 \leq y \leq \sqrt{3}$, entonces $G(y) = \int_{-1}^{\sqrt{4-y^2}} xydx.$
- Si $\sqrt{3} \leq y \leq 2$, entonces $G(y) = \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xydx.$

Además, como también se cumple que

$$\int_0^2 G(y)dy = \int_0^1 G(y)dy + \int_1^{\sqrt{3}} G(y)dy + \int_{\sqrt{3}}^2 G(y)dy,$$

al reemplazar la correspondiente expresión de $G(y)$, para $y \in [0,2]$, se tiene que

$$\int_0^2 G(y)dy = \int_0^1 (\int_{-1}^{-1+y} xydx + \int_{1-y}^{\sqrt{4-y^2}} xydx)dy + \int_1^{\sqrt{3}} (\int_{-1}^{\sqrt{4-y^2}} xydx)dy + \int_{\sqrt{3}}^2 (\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xydx)dy,$$

y como $\int_u^v xydx = \frac{1}{2}x^2y/_{x=u}^{x=v} = \frac{1}{2}(v^2-u^2)y$, resulta que

$$\int_0^2 G(y)dy = \int_0^1 \frac{1}{2}[(-1+y)^2 - 1 + (4-y^2) - (1-y^2)]ydy + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}[(4-y^2)-1]ydy$$
$$+ \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{2}[(4-y^2)-(4-y^2)]ydy$$

i.e.,

$$\int_0^2 G(y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (3y-y^3)dy + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} (3y-y^3)dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (3y-y^3)dy$$
$$= \frac{9}{8},$$

y por lo tanto, se concluye que

$$\int_C f = \int_A f_C = \int_0^2 G(y)dy = \frac{9}{8}.$$

Ahora calculamos la integral iterada en el orden $dydx$ siguiendo una argumentación análoga a la descrita anteriormente. Por lo tanto, se parte considerando para cada $x \in [-1,2]$, la función $h_x : [0,2] \to I\!R$ definida por $h_x(y) = f_C(x,y)$, para $y \in [0,2]$, i.e.,

$$h_x(y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } y \in [0,2] \text{ y } (x,y) \in C \\ 0, & \text{si } y \in [0,2] \text{ y } (x,y) \notin C, \end{cases}$$

En este caso, el conjunto C_x es la intersección de la recta paralela al eje Y (que pasa por el punto $(x,0)$), con el conjunto C. En la Figura 5.5.5 se ilustran los diferentes tipos de conjuntos C_x cuando (a) $-1 \le x \le 0$; (b) $0 \le x \le 1$; (c) $1 \le x \le 2$.

Figura 5.5.5.

La justificación dada a la integrabilidad de las funciones g_y se puede también aplicar a las funciones h_x, lo que permite asegurar que cada función h_x es integrable sobre $[0,2]$, y por lo tanto, esto permite definir la siguiente función $H : [-1,2] \to I\!R$,

$$H(x) = \int_0^2 h_x(y)dy, \text{ para } x \in [-1,2],$$

la cual es integrable sobre $[-1,2]$ (por el Teorema de Fubini), y satisface la siguiente igualdad

$$\int_A f_C = \int_{-1}^{2} H(x)dx = \int_1^2 (\int_0^2 h_x(y)dy)dx.$$

Para calcular esta integral iterada (según el orden $dydx$), se consideran los conjuntos $L_x = \{y : (x,y) \in C_x\}$, para $x \in [-1,2]$, los cuales quedan definidos de la siguiente manera (al usar los casos (a), (b) y (c) de la Figura 5.5.5):

$$L_x = \begin{cases} [1+x, \sqrt{4-x^2}], & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ [1-x, \sqrt{4-x^2}], & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ [0, \sqrt{4-x^2}], & \text{si } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

y usando estos conjuntos la función h_x resulta ser

$$h_x(y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } y \in L_x \\ 0, & \text{si } y \in L_x^c = [0,2] - L_x, \end{cases}$$

y esto a su vez implica que la función H queda definida por:

- $H(x) = \int\limits_{1+x}^{\sqrt{4-x^2}} xydy, \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0.$
- $H(x) = \int\limits_{1-x}^{\sqrt{4-x^2}} xydy, \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1.$
- $H(x) = \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydy, \quad \text{si } 1 \leq x \leq 2,$

y como también se cumple que

$$\int\limits_{-1}^{2} H(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} H(x)dx + \int\limits_{0}^{1} H(x)dx + \int\limits_{1}^{2} H(x)dx,$$

si se reemplazan las correspondientes expresiones de $H(x)$, según $x \in L_x$, resulta que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{2} H(x)dx &= \int\limits_{-1}^{0} (\int\limits_{1+x}^{\sqrt{4-x^2}} xydy)dx + \int\limits_{0}^{1} (\int\limits_{1-x}^{\sqrt{4-x^2}} xydy)dx + \int\limits_{1}^{2} (\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydy)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{2}[(4-x^2) - (1+x)^2]xdx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}[(4-x^2) - (1-x)^2]xdx + \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2}(4-x^2)xdx \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{2} (4x - x^3)dx \\
&= \frac{9}{8},
\end{aligned}$$

lo que comprueba el Teorema de Fubini para este ejemplo, i.e.,

$$\int\limits_{C} f = \int\limits_{A} f_C = \int\limits_{0}^{2} (\int\limits_{-1}^{2} f_C(x,y)dx)dy = \int\limits_{-1}^{2} (\int\limits_{0}^{2} f_C(x,y)dy)dx = \frac{9}{8}.$$

A continuación se describe el procedimiento ilustrado en el ejemplo anterior, que permite calcular la integral de una función acotada $f : I\!R^2 \to I\!R$ sobre un conjunto acotado $C \subset I\!R^2$ (cuya frontera es la unión de un número finito de curvas), mediante el cálculo de una integral iterada.

1. Determinar si f es integrable sobre C (para esto basta dar una argumentación similar a la presentada en los Ejemplos 5.4.1, 5.4.2 y 5.5.3).

2. Determinar los valores extremos (mínimo y máximo) que pueden tener las variables x e y de modo que $(x,y) \in C$. Supongamos que a y b denotan dichos valores para x y que c y d son los correspondientes para y (i.e., $C \subset [a,b] \times [c,d]$).
   Los siguientes pasos están referidos para el cálculo de la integral iterada en el orden $dxdy$. Un argumento similar, intercambiando los roles de las variables x e y, permite el cálculo de la integral iterada en el orden $dydx$ (esto último se deja propuesto como ejercicio).
3. Para cada $y \in [c,d]$, determinar el conjunto $C_y = \{(x,y) : (x,y) \in C\}$ y sea $L_y = \{x : (x,y) \in C_y\}$. Gráficamente, C_y se obtiene al intersectar la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(0,y)$ con el conjunto C y $L_y \subset [a,b]$ resulta ser la proyección de C_y sobre el eje X. Se supone que cada L_y es un intervalo ó la unión de un número finito de intervalos disjuntos contenidos en $[a,b]$, y por lo tanto, la frontera de L_y está formada por un número finito de puntos (correspondientes a los extremos de los intervalos que forma L_y), y en este caso existe una función $u : I\!\!R \to I\!\!R$ tal que $y = u(x)$, ya que la frontera de C es una unión finita de curvas en el plano (que "encierran" al conjunto C), y tales curvas corresponden a los gráficos de ciertas funciones de $I\!\!R$ en $I\!\!R$, las que se suponen conocidas a partir de la definición del conjunto C. Evidentemente, tales funciones determinan la forma que tiene la frontera de C, y por lo tanto, si dichas funciones son diferentes, entonces la frontera de C contiene puntos $(x',y'), (x'',y'')$ y $(\bar{x},\bar{y})$ tales que la curva que une (x',y') con $(\bar{x},\bar{y})$ en la frontera de C es diferente a la curva que une $(\bar{x},\bar{y})$ con (x'',y'') en la frontera de C, i.e., el punto $(\bar{x},\bar{y})$, indica un cambio en la forma que tiene la frontera de C (e.g., los puntos $(0,1)$ y $(-1,\sqrt{3})$ en el ejemplo ilustrado en la Figura 5.5.4).
4. Determinar todos los puntos en $[c,d]$ que cumplan la propiedad que tiene $\bar{y}$ (descrita en el punto anterior). Supongamos que $y_1, ..., y_p$ con $c < y_1 < ... < y_p < d$, son tales puntos, y para $k = 1, ..., p+1$, sea
   $$L_y^k = \{x : (x,y) \in C_y\}, \qquad y_{k-1} < y \leq y_k$$
   donde $y_0 = c$ y $y_{p+1} = d$.
5. Para cada $k = 1, ..., p+1$, calcular
   $$I_k = \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left(\int_{L_y^k} f(x,y)dx \right) dy.$$
   La integral entre paréntesis corresponde a la integral (con respecto a la variable x) de la función $g_y(x) = f(x,y)$ sobre el conjunto L_y^k. El resultado de esta integral determina una función en la variable y, la que se integra sobre el intervalo $[y_{k-1}, y_k]$.
   La integral iterada de f sobre C en el orden $dxdy$ está dada por
   $$\int_C (\int f(x,y)dx)dy = I_1 + ... + I_{p+1}.$$

En el siguiente ejemplo se aplica el teorema de Fubini para el caso de tres variables, y se comprueba que las integrales iteradas "triples" pueden ser calculadas usando un procedimiento similar al descrito para el caso de dos variables.

Ejemplo 5.5.4. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto definido por

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Calcular $\int\limits_R f$, donde $f(x, y, z) = y$ (i.e., $f = \pi_2$).

Solución. Como $f = \pi_2$ es una función continua en $\mathbb{R}^3$, la Proposición 5.4.2 establece que f es integrable en todo rectángulo $A \subset \mathbb{R}^3$, y por lo tanto f es integrable sobre R si el conjunto R es medible Jordan, ya que en tal caso las Definiciones 5.4.2 y 5.4.3 junto con la Proposición 5.4.3 implican que la función $f_R = f \cdot 1_R$ es integrable en cualquier rectángulo A que contiene a R, siendo 1_R la función característica de R, y además, también se cumple por definición que $\int\limits_R f = \int\limits_A f_R$.

Para usar el argumento anterior basta comprobar que la frontera de R es un conjunto de medida cero (Definición 5.4.3). Esto último es un problema que se resuelve en dos etapas: primero, se debe determinar el conjunto de puntos que forman la frontera de R, y luego comprobar si tal conjunto es de medida cero. Evidentemente, cada uno de estos problemas, puede ser muy complicado de resolver debido a la "forma" que tenga la región R, la que en varios casos ni siquiera es posible "visualizarla". Sin embargo, en aquellos casos, como el del presente ejemplo, donde la región R está definida mediante un número finito de desigualdades, es posible determinar si la frontera es un conjunto de medida cero, aún cuando no se conozca la forma de la región R.

En primer lugar se debe notar que un punto $(x, y, z) \in Fr(R)$ si las coordenadas x, y y z satisfacen como igualdad al menos una de las desigualdades que definen a R. Por ejemplo, el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ satisface $x^2 + y^2 \leq z^2$ y $x \leq 1$ como igualdades (las restantes desigualdades: $x \geq 0, y \geq 0$ y $0 \leq z \leq 2$, las satisface en forma estricta). Además, cada una de tales igualdades define (implícitamente) una superficie suave en $\mathbb{R}^3$ (e.g., el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x = 1$ es el plano paralelo al plano (Y, Z) y que contiene al punto $(1, 0, 0)$), y por lo tanto, la frontera de R es la unión de un número finito de pedazos de superficies suaves. Las Proposiciones 5.3.1(5) y 5.3.5 implican que $Fr(R)$ es un conjunto de contenido cero, y como R es acotado, resulta que R es un conjunto medible Jordan (Definición 5.4.3). Esto último junto con la Proposición 5.4.3 aseguran que la función 1_R es integrable sobre cualquier rectángulo A que contiene a R, y como $f = \pi_2$ es integrable sobre A, la Proposición 5.2.2.(5) implica que f_R es integrable sobre A, y por lo tanto, la integral de f_R sobre A (i.e., la integral de f sobre R) se puede obtener mediante cualquiera de las correspondientes integrales iteradas (por el Teorema de Fubini y Definición 5.4.2).

Calculo de la integral iterada en el orden $dxdydz$. Para realizar este cálculo se aplica el Teorema de Fubini usando un argumento similar al descrito en el Ejemplo 5.5.3.

Para comenzar, nótese que $A = [0,1] \times [0,2] \times [0,2]$ es un rectángulo que contiene a R, ya que las desigualdades que definen a R implican claramente que $0 \leq y \leq 2$ para todo $(x,y,z) \in R$. En la aplicación del Teorema de Fubini (Proposición 5.5.1) a este ejemplo, se identifica a $\mathbb{R}^3$ como el espacio producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, en el sentido que cada punto (x,y,z) se identifica con el "par" $((x,y),z)$. En el teorema en cuestión, para cada $z \in [0,2]$ se considera la función $g_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g_z(x,y) = f_R(x,y,z)$, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$ y se establece que la función $G^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G^i(z) = \underline{\mathrm{I}}(g_z, [0,1] \times [0,2])$ para $z \in [0,2]$, es integrable sobre $[0,2]$ y que la integral de G^i sobre $[0,2]$ es igual a la integral de f sobre R. Además, si la función g_z es integrable sobre $[0,1] \times [0,2]$ entonces el mismo teorema permite calcular $G^i(z)$ mediante una de las dos integrales iteradas de g_z sobre $[0,1] \times [0,2]$ (según el orden $dxdy$ o el orden $dydx$), y para esto último se procede en forma similar a la descrita en el Ejemplo 5.5.3.

En el ejemplo que estamos considerando, la función g_z queda definida por

$$g_z(x,y) = \begin{cases} y, & \text{si } (x,y,z) \in R_z \\ 0, & \text{si } (x,y,z) \notin R_z \end{cases}$$

donde $R_z = \{(x,y,z) : (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \text{ y } (x,y,z) \in R\}$, i.e., $R_z = ([0,1] \times [0,2] \times \{z\}) \cap R$ i.e., R es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se obtiene como la intersección del conjunto R con el plano paralelo al plano (X,Y) y que contiene al punto $(0,0,z)$. La Figura 5.5.6 ilustra al conjunto R_z cuando : (a) $0 \leq z \leq 1$ y (b) $1 \leq z \leq 2$ (en ambos casos el plano de la figura está formado por los puntos (x,y,z) con z fijo).

Figura 5.5.6

La función g_z del presente ejemplo es integrable sobre R_z para cada $z \in [0,2]$, y por lo tanto, el Teorema de Fubini y las definiciones de G^i y G^s implican

$$G^i(z) = G^s(z) = \int\limits_{R_z} g_z = \int\limits_{R_z}\int g_z(x,y)dxdy = \int\limits_{R_z}\int g_z(x,y)dydx,$$

y además se cumple que $\int\limits_R f = \int\limits_0^2 G^i(z)dz = \int\limits_0^2 G^s(z)dz$.

Como en el presente ejemplo se pide calcular la integral iterada de f en el orden $dxdydz$, el cálculo de $G^i(z)$ se debe realizar mediante la integral iterada de g_z sobre R_z en el orden $dxdy$.

Un argumento similar al descrito en el Ejemplo 5.5.3 implica que

$$G^i(z) = \int\limits_0^z \Big(\int\limits_0^{\sqrt{z^2-y^2}} ydx\Big)dy, \quad \text{si} \quad 0 \le z \le 1$$

y

$$G^i(z) = \int\limits_0^{\sqrt{z^2-1}} \Big(\int\limits_0^1 ydx\Big)dy + \int\limits_{\sqrt{z^2-1}}^{z} \Big(\int\limits_0^{\sqrt{z^2-y^2}} ydx\Big)dy, \quad \text{si} \quad 1 \le z \le 2$$

y por lo tanto, para $0 \le z \le 1$ resulta que

$$G^i(z) = \int\limits_0^z y\sqrt{z^2-y^2}dy = -\frac{1}{3}(z^2-y^2)^{3/2}/_0^z = \frac{1}{3}z^3,$$

mientras que para $1 \le z \le 2$ se tiene que

$$G^i(z) = \int\limits_0^{\sqrt{z^2-1}} ydy + \int\limits_{\sqrt{z^2-1}}^{z} y\sqrt{z^2-y^2}dy = \frac{1}{2}(z^2-1) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6},$$

i.e.,

$$G^i(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}z^3, & \text{si} \quad 0 \le z \le 1 \\ \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}, & \text{si} \quad 1 \le z \le 2, \end{cases}$$

y por el Teorema de Fubini sigue que,

$$\int\limits_R f = \int\int\limits_R\int ydxdydz = \int\limits_0^2 G^i(z)dz = \int\limits_0^1 \frac{1}{3}z^3dz + \int\limits_1^2 \Big(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}\Big)dz = \frac{1}{12} + 1,$$

i.e., $\int\limits_{R}\int\int y dx dy dz = \frac{13}{12}$.

Para una mayor comprensión del cálculo de integrales múltiples mediante integrales iteradas, comprobaremos el resultado anterior calculando la integral iterada en el orden $dzdydx$.

En este caso también se identifica a $\mathbb{R}^3$ con el espacio producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, pero ahora cada punto en $\mathbb{R}^3$ se identifica con el "par" $((z,y),x)$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ya que el orden de integración es $dzdydx$, y por lo tanto, para cada $x \in [0,1]$ se considera la función $g_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g_x(z,y) = f_R(x,y,z)$, para todo $(z,y) \in [0,2] \times [0,2]$, i.e.,

$$g_x(z,y) = \begin{cases} y, & \text{si } (x,y,z) \in R_x \\ 0, & \text{si } (x,y,z) \notin R_x \end{cases}$$

donde $R_x = \{(x,y,z) : (z,y) \in [0,2]\times[0,2] \text{ y } (x,y,z) \in R\}$, i.e., para cada $x \in [0,1]$, $R_x = (\{x\} \times [0,2] \times [0,2]) \cap R$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se obtiene como la intersección de R con el plano paralelo al plano (Y,Z) y que contiene el punto $(x,0,0)$, y por lo tanto, para $x \in [0,1]$ fijo $(x,y,z) \in R_x$ ssi $z^2 - y^2 \geq x^2, 0 \leq y \leq 2$ y $0 \leq z \leq 2$. La Figura 5.5.7 ilustra al conjunto R_x (el plano de la figura está formada por todos los puntos (x,y,z) con x fijo, y la identificación de sus ejes se debe al orden de integración $dzdydx$).

Figura 5.5.7

Para cada $x \in [0,1]$, la función g_x es integrable sobre R_x, y la aplicación del Teorema de Fubini implica que

$$G^i(x) = G^s(x) = \int\limits_{R_x} g_x = \int\limits_{R_x}\int g_x(z,y) dz dy = \int\limits_{R_x}\int g_x(z,y) dy dz,$$

y que la integral de G^i sobre $[0,1]$ es igual a la integral iterada de f sobre R en el orden $dzdydx$, y debido a ésto el cálculo de $G^i(x)$ se realiza mediante la integral iterada de g_x sobre R_x en el orden $dzdy$. Siguiendo el argumento que se ha usado en los casos anteriores para calcular integrales iteradas dobles, se tiene para este caso que

$$G^i(x) = \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} ydz \right) dy = \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y(2 - \sqrt{x^2+y^2})dy = \frac{4}{3} - x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

y por el Teorema de Fubini, resulta que

$$\int_R f = \iint_R \int ydzdydx = \int_0^1 G^i(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)dx = \frac{13}{12},$$

lo que comprueba el resultado obtenido para la integral iterada en el orden $dxdydz$.

5.6. Sistema de coordenadas curvilíneas

En diversas aplicaciones del cálculo de funciones de una o varias variables reales, la dificultad que se presenta al resolver los correspondientes problemas puede ser reducida en forma apreciable si se usa una manera adecuada de representar los valores que pueden tomar las variables involucradas. La representación habitual, para el caso de n variables, se obtiene al identificar tales valores con las n coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^n$ que queda determinado en forma única mediante la intersección de los n planos (de dimensión $n-1$) definidos implícitamente por las ecuaciones $\pi_i(\mathbf{x}) = a_i$, para $i = 1, ..., n$ donde a_i es el valor asociado a la i-ésima variable, y $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ es el punto en cuestión. Nótese además que el conjunto de todos los puntos de la forma $(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$ con $t \in \mathbb{R}$, corresponde a una recta que contiene al punto $\mathbf{a}$ y tal conjunto puede ser considerado como el resultado de una traslación del eje X_i según el vector $\mathbf{a}$, y por lo tanto, de acuerdo a esta interpretación el punto $\mathbf{a}$ es la intersección de las n rectas obtenidas mediante la traslación de los n ejes coordenados, y los n números a_i se llaman las coordenadas (cartesianas) rectangulares o rectilíneas del punto $\mathbf{a}$.

Evidentemente, el punto $\mathbf{a}$ también puede ser obtenido como la intersección de n conjuntos diferentes de los mencionados anteriormente. En esta sección se establecen las condiciones que deben cumplir tales conjuntos que permiten definir otros sistemas de coordenadas, y para referirnos a estos sistemas el espacio $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathcal{U}^n$, mientras que $\mathbb{R}^n$ será identificado con el sistema habitual de coordenadas rectilíneas.

Definición 5.6.1 Sea $T : \mathcal{U}^n \to \mathbb{R}^n$ una función y sea $C \subset Dom(T)$ un conjunto abierto. Se dice que el par (T, C) define un sistema de coordenadas curvilíneas ssi se cumplen las siguientes condiciones:

(1) T es una función $1-1$ en C.
(2) T es continuamente diferenciable en C.
(3) $T'(\mathbf{u})$ es invertible, para todo $\mathbf{u} \in C$.

Además, si $\mathbf{x} \in T(C)$, entonces las coordenadas curvilíneas de $\mathbf{x}$, determinadas por T y C, son las coordenadas (rectilíneas) del vector $\mathbf{u} \in C$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$, i.e., son los números $u_1, ..., u_n$ tales que $T(u_1, ..., u_n) = (x_1, ..., x_n)$.

Nótese que las coordenadas curvilíneas de un punto dado $\mathbf{x} \in T(C)$ son únicas, ya que T es $1-1$ en C, y por lo tanto, existe un único $\mathbf{u} \in C$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$. Además, como T restringida a C es invertible, resulta que $\mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{x})$, donde T^{-1} denota la función inversa de T restringida a C.

La denominación de coordenadas curvilíneas se justifica de la siguiente manera.

Sea $\bar{\mathbf{u}}$ un punto dado en C y $\bar{\mathbf{x}} = T(\bar{\mathbf{u}})$. Para cada $k = 1, ..., n$, sea $\mathbf{v}_k = (\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{k-1}, t, \bar{u}_{k+1}, ..., \bar{u}_n)$, i.e, $\mathbf{v}_k$ difiere de $\bar{\mathbf{u}}$ en la k-ésima coordenada. Sean $\varphi_k : I\!R \to \mathcal{U}^n$ y $g_k : I\!R \to I\!R^n$ las funciones definidas por $\varphi_k(t) = \mathbf{v}_k$ y $g_k(t) = (T \circ \varphi_k)(t), t \in I\!R$. Por Definición 4.1.2 la función g_k define paramétricamente una curva en $I\!R^n$ que contiene al punto $\bar{\mathbf{x}}$ ya que $g(\bar{u}_k) = T(\varphi_k(\bar{u}_k)) = T(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{x}}$. Además, por la Proposición 3.1.3 la función g_k es diferenciable en $\bar{\mathbf{u}}_k$ y $g'(\bar{u}_k) = T'(\varphi_k(\bar{u}_k)) \cdot \varphi_k'(\bar{u}_k) = T'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_k$, i.e., $g'(\bar{u}_k)$ es igual a la columna k de la matriz Jacobiana $T'(\bar{\mathbf{u}})$, y por la Definición 4.1.2 resulta que $g'(\bar{u}_k)$ representa el vector tangente a la curva definida paramétricamente por la función g_k. Esta argumentación implica que el punto $\bar{\mathbf{x}}$ es la intersección de las n curvas definidas paramétricamente por las funciones $g_k, k = 1, ..., n$, y los vectores tangentes a dichas curvas en el punto $\bar{\mathbf{x}}$ son linealmente independientes (porque $T'(\bar{\mathbf{u}})$ es invertible), y forman una base de $I\!R^n$. Más aún, la matriz $T'(\bar{\mathbf{u}})$ determina una matriz de cambio de base, ya que si $\mathbf{c}_k$ es la k-ésima columna de $T'(\bar{\mathbf{u}})$, entonces $\mathbf{c}_k = g'(\bar{u}_k) = T'(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_k$, y por lo tanto, $T'(\bar{\mathbf{u}})$ transforma la base canónica $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}\}$ en la base $\{\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n\}$ formada por los vectores tangentes a las curvas (definidas por las funciones g_k), en el punto $\bar{\mathbf{x}}$.

En lo que sigue, se describen los sistemas de coordenadas curvilíneas más habituales para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

1. Sistema de coordenadas polares en el plano.

Sea $\mathcal{U}^2$ una copia de $I\!R^2$ formado por los pares (r, θ), tales que $-\infty < r < \infty$, y $-\infty < \theta < \infty$, y sea $T : \mathcal{U}^2 \to I\!R^2$, la función definida por

$$T(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta).$$

Nótese que el dominio de T es igual a $\mathcal{U}^2$ ya que el dominio de cada función componente de T es $\mathcal{U}^2$ $(T = (T_1, T_2)$, donde $T_1 = \pi_1 \cdot (cos \circ \pi_2)$ y $T_2 = \pi_1 \cdot (sen \circ \pi_2)$, siendo

π_1 y π_2 las funciones proyecciones en $\mathcal{U}^2$, i.e., $\pi_1(r,\theta) = r$ y $\pi_2(r,\theta) = \theta$). Sin embargo, el dominio de T se restringe al conjunto formado por los puntos (r,θ) con $r > 0$ (una justificación de tipo geométrica se da más adelante). Además, la Proposición 3.2.3(1) implica que T es continuamente diferenciable en $\mathcal{U}^2$ y como su matriz Jacobiana en (r,θ) es

$$T'(r,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix},$$

resulta que $T'(r,\theta)$ es invertible ssi $r \neq 0$, ya que el determinante de $T'(r,\theta)$ es igual a r, y por lo tanto, basta determinar un conjunto $C \subset \mathcal{U}^2$ en el cual la función T sea $1-1$ para concluir que el par (T, C) define un sistema de coordenadas curvilíneas en el plano.

Para obtener tal conjunto C, consideremos dos puntos $(r_1,\theta_1), (r_2,\theta_2)$ en el dominio de T y supongamos que $T(r_1,\theta_1) = T(r_2,\theta_2)$, i.e., $r_1 cos\theta_1 = r_2 cos\theta_2$ y $r_1 sen\theta_1 = r_2 sen\theta_2$. Es fácil comprobar que estas igualdades se cumplen si y solo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, para algún $k \in I\!N$, y por lo tanto, la función T es $1-1$ cuando su dominio se restringe a un conjunto de la forma $C = \{(r,\theta) : r > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi\}$, para $\theta_0 \in I\!R$ fijo, y en tal caso el conjunto imagen de T es igual a $I\!R^2 - \{(0,0)\}$, ya que si (x,y) es un punto cualquiera de $I\!R^2$ y $(x,y) \neq (0,0)$, entonces existe un único punto $(r,\theta) \in C$ tal que $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. En efecto, los números r y θ definidos por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = arctg(\frac{y}{x})$, determinan el único punto $(r,\theta) \in C$ tal que $T(r,\theta) = (x,y)$. La Figura 5.6.1 ilustra la interpretación geométrica que tienen tales números r y θ: dado el punto (x,y), el número $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ corresponde al radio del círculo centrado en el origen que contiene, evidentemente, al punto (x,y), y el número $\theta = arctg(\frac{y}{x})$ es el ángulo que forma el semi-eje no-negativo X con la semi-recta que comienza en el origen y contiene al punto (x,y) (la medida del ángulo en radianes se calcula en la forma habitual, i.e., desde el semi-eje no-negativo X a dicha semi-recta en el sentido contra-reloj).

Figura 5.6.1.

El argumento anterior justifica la siguiente definición.

Definición 5.6.2. La función $T : \mathcal{U}^2 \to I\!R^2$ definida por $T(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta)$, para $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, define un sistema de coordenadas curvilíneas en el plano, llamado *sistema de coordenadas polares*. Además, si $(x, y) \in I\!R^2$ es un punto distinto de $(0, 0)$, los números $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = arctg(\frac{y}{x})$, se llaman las *coordenadas (curvilíneas) polares* del punto (x, y).

El hecho de que el origen $(0, 0) \in I\!R^2$ no admita coordenadas polares no tiene mayor importancia, debido precisamente a la identificación "punto a punto" que tiene el conjunto $C = \{(r, \theta) : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\} \subset \mathcal{U}^2$ con el conjunto $I\!R^2 - \{(0, 0)\}$, i.e., si $S \subset I\!R^2$ es un conjunto dado en $I\!R^2$, entonces existe un (único) conjunto $R \subset \mathcal{U}^2$ tal que

$$T(R) = \begin{cases} S & \text{si } (0,0) \notin S \\ S - \{(0,0)\}, & \text{si } (0,0) \in S, \end{cases}$$

y por lo tanto, si a priori se sabe que $(0, 0) \in S$, entonces al conjunto $T(R)$ se le agrega el punto $(0, 0)$.

Ahora, consideramos algunas propiedades de tipo geométrica que tiene el sistema de coordenadas polares.

En primer lugar, nótese que el espacio $\mathcal{U}^2$, al ser identificado con una copia de $I\!R^2$, puede ser considerado como el producto cartesiano de dos ejes asociados a las variables r y θ, y por lo tanto, cada punto $(r_0, \theta_0) \in \mathcal{U}^2$ corresponde a la intersección de las rectas paralelas a los ejes coordenados, las que son definidas (implícitamente) por las ecuaciones $r = r_0$ y $\theta = \theta_0$ en $\mathcal{U}^2$. En particular, si (r_0, θ_0) es un punto en el dominio de la función T, i.e., $(r_0, \theta_0) \in C = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, y si L_{r_0} y L_{θ_0} denotan las rectas mencionadas más arriba, entonces $T(L_{r_0} \cap C)$ y $T(L_{\theta_0} \cap C)$ son las curvas en $I\!R^2$ cuya intersección es el punto $(x_0, y_0) = T(r_0, \theta_0)$. La Figura 5.6.2 ilustra esta propiedad.

Figura 5.6.2

El conjunto $\gamma_{r_0} = T(L_{r_0} \cap C)$ es el círculo centrado en $(0,0)$ de radio r_0, mientras que $\gamma_{\theta_0} = T(L_{\theta_0} \cap C)$ es la semi-recta que parte en el origen cuya pendiente es igual a $tg\theta_0$ (Figura 5.6.2).

Otra propiedad que se puede destacar es la relacionada con la matriz Jacobiana de T en (r_0, θ_0). En este caso, $T'(r_0, \theta_0)$ transforma la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $I\!R^2$ en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, donde $\mathbf{c}_1 = (cos\theta_0, sen\theta_0)$ y $\mathbf{c}_2 = (-r_0 sen\theta_0, r_0 cos\theta_0)$.

La Figura 5.6.3 ilustra a los vectores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$, trasladados al punto (x_0, y_0), los cuales son vectores tangentes a las curvas γ_{r_0} y γ_{θ_0} respectivamente.

Figura 5.6.3

Nótese que los vectores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ forman una base ortogonal, ya que $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0$.

2. Sistema de coordenadas esféricas para el espacio $I\!R^3$.

En este caso, se considera una copia de $I\!R^3$, denotado por $\mathcal{U}^3$, la que está formada por los puntos (r, θ, φ), cuyas coordenadas (rectilíneas), r, θ y φ son números reales.

Sea $T : \mathcal{U}^3 \to I\!R^3$ la función definida por

$$T(r, \theta, \varphi) = (rcos\theta sen\varphi, rsen\theta sen\varphi, rcos\varphi)$$

Siguiendo un análisis similar al que se hizo para el sistema de coordenadas polares en el plano, es fácil notar también en este caso que el dominio de T es $\mathcal{U}^3$ y que T es continuamente diferenciable en cada punto (r, θ, φ) de $\mathcal{U}^3$ (ya que las funciones componentes de T cumplen tales propiedades). Además, en este caso también se debe restringir el dominio de T a un conjunto $C \subset \mathcal{U}^3$ en el cual T sea una función $1-1$.

Para obtener tal conjunto C, consideremos los puntos (r,θ,φ) de $\mathcal{U}^3$ con $\varphi=\varphi_0$ fijo, i.e., el plano que contiene al punto $(0,0,\varphi_0)$ y que es paralelo al plano definido por la ecuación $\varphi=0$ (i.e., el plano definido por los ejes cartesianos asociados a las variables r y θ en $\mathcal{U}^3$). Si (r_1,θ_1,φ_0) y (r_2,θ_2,φ_0) son dos puntos en el plano $\varphi=\varphi_0$, entonces $T(r_1,\theta_1,\varphi_0)=T(r_2,\theta_2,\varphi_0)$ si y solo si $r_1=r_2$ y $\theta_1=\theta_2+2k\pi$, algún $k\in\mathbb{N}$, ya que la función T restringida al plano $\varphi=\varphi_0$, se comporta como la función que define al sistema de coordenadas polares en el plano, y por lo tanto, el conjunto $C\subset\mathcal{U}^3$ en el cual T es una función $1-1$ es,

$$C=\{(r,\theta,\varphi):r>0,0<\theta\le 2\pi,0<\varphi<\pi\}.$$

La condición que se impone para φ en el conjunto C puede ser fácilmente justificada mediante la representación gráfica del conjunto imagen de T. En efecto, si $T(r,\theta,\varphi)=(x,y,z)$, entonces los números r,θ y φ tienen la siguiente interpretación geométrica. El número r corresponde a la distancia (usual) entre el origen y el punto (x,y,z) ya que $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La coordenada φ es el ángulo (medido en radianes) formado por el semi-eje positivo Z y la semi-recta que parte del origen y que contiene al punto (x,y,z). La coordenada θ es el ángulo (medido en radianes) formado por el semi-eje positivo X y la semi-recta contenida en el plano (X,Y), que parte en el origen y que contiene al punto $(x,y,0)$, el cual es la proyección del punto (x,y,z) sobre el plano (X,Y).

Nótese que el conjunto imagen de C bajo la función T es igual a $T(C)=\mathbb{R}^3-$eje Z, ya que si $T(r,\theta,\varphi)=(x,y,z)$, entonces la definición de T implica que $x^2+y^2=r^2(sen\varphi)^2$, y como $r>0$ y $0<\varphi<\pi$, sigue que $x^2+y^2>0$, i.e., x e y no pueden ser simultáneamente nulos.

Consideremos ahora la matriz Jacobiana de T en un punto (r,θ,φ) del conjunto $C=(0,+\infty)\times(0,2\pi]\times(0,\pi)$. Como T es de clase C^1 en $\mathcal{U}^3$, y en particular diferenciable en cada punto (r,θ,φ) de C, se tiene que

$$T'(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} cos\theta sen\varphi & -rsen\theta sen\varphi & rcos\theta cos\varphi \\ sen\theta sen\varphi & rcos\theta sen\varphi & rsen\theta cos\varphi \\ cos\varphi & 0 & -rsen\varphi \end{pmatrix},$$

y esta matriz es invertible ya que su determinante, que es igual a $-r^2sen\varphi$, es no nulo porque $r>0$ y $0<\varphi<\pi$.

La argumentación anterior justifica la definición siguiente.

Definición 5.6.3. La función $T:\mathcal{U}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(r,\theta,\varphi)=(rcos\theta sen\varphi, rsen\theta sen\varphi, rcos\varphi)$, para $r>0, 0\le\theta<2\pi$ y $0<\varphi<\pi$, define un sistema de coordenadas curvilíneas en $\mathbb{R}^3$, llamado *sistema de coordenadas esféricas*. Además, si $(x, y, z) = T(r, \theta, \varphi)$, los números r, θ, φ se llaman las *coordenadas esféricas* del punto (x, y, z).

En este caso también es posible obtener una expresión explicita de T^{-1}, la función inversa de T. En efecto, si $(x, y, z) = T(r, \theta, \varphi)$, entonces al resolver esta última ecuación para r, θ y φ, se obtiene $(r, \theta, \varphi) = T^{-1}(x, y, z)$, donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \varphi = arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Nótese que, además de la condición que deben cumplir los puntos (x, y, z) que pertenecen al dominio de T^{-1} (i.e., $x^2 + y^2 > 0$, ya que $Dom(T^{-1}) = Rec(T) = I\!R^3$-eje (Z)), se debe agregar la restricción $y \geq 0$, debido a que la función $arccos$ toma valores entre 0 y π, y por lo tanto, las expresiones correspondientes a r, θ y φ en términos de x, y y z, definen las funciones componentes de T^{-1} cuando T está restringida al conjunto $C' = (0, +\infty) \times [0, \pi] \times (0, \pi)$, i.e., cuando $0 \leq \theta \leq \pi$ en lugar de $0 \leq \theta < 2\pi$. Sin embargo, por las propiedades que tienen las funciones sen y cos, basta agregar π a la expresión que define θ, para obtener los valores de θ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ correspondientes a la condición $y < 0$. Esto permite establecer que la función $T^{-1} : I\!R^3 \to \mathcal{U}^3$ queda definida para cada $(x, y, z) \in I\!R^3$-eje Z, de la siguiente manera,

$$T^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (r, \theta, \varphi), & \text{si } y \geq 0 \\ (r, \theta + \pi, \varphi), & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

donde r, θ y φ son las expresiones (en términos de x, y y z) definidas más arriba.

Consideremos ahora, algunas propiedades geométricas del sistema de coordenadas esféricas.

Para comenzar, es conveniente tener presente que cada punto $(r_0, \theta_0, \varphi_0) \in \mathcal{U}^3$ es la intersección de los planos definidos (implícitamente) por las ecuaciones $r = r_0, \theta = \theta_0$ y $\varphi = \varphi_0$ (estos planos son ortogonales a los ejes coordenados asociados a las variables r, θ y φ, respectivamente, y los tres contienen el punto $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$). Si P_{r_0}, P_{θ_0} y P_{φ_0}, denotan a dichos planos, sus intersecciones con el dominio de T resultan ser:

$$\begin{aligned} P^*_{r_0} &= P_{r_0} \cap DomT = \{r_0\} \times [0, 2\pi) \times (0, \pi), \\ P^*_{\theta_0} &= P_{\theta_0} \cap DomT = (0, +\infty) \times \{\theta_0\} \times (0, \pi), \\ P^*_{\varphi_0} &= P_{\varphi_0} \cap DomT = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \{\varphi_0\}. \end{aligned}$$

Las Figuras 5.6.4(a), (b) y (c), ilustran, respectivamente, a los conjuntos $P^*_{r_0}, P^*_{\theta_0}$ y $P^*_{\varphi_0}$.

Figura 5.6.4

Ahora, determinamos la imagen de cada uno de estos conjuntos bajo la función T, i.e., los conjuntos $S_{r_0} = T(P^*_{r_0}), S_{\theta_0} = T(P^*_{\theta_0})$ y $S_{\varphi_0} = T(P^*_{\varphi_0})$. Notar que estos conjuntos son superficies en $I\!R^3$ definidas paramétricamente por las funciones g_{r_0}, g_{θ_0} y g_{φ_0} de $I\!R^2$ en $I\!R^3$, definidas por $g_{r_0}(\theta, \varphi) = T(r_0, \theta, \varphi)$, $g_{\theta_0}(r, \varphi) = T(r, \theta_0, \varphi)$ y $g_{\varphi_0}(r, \theta) = T(r, \theta, \varphi_0)$. La definición de la función T permite obtener fácilmente una representación implícita para cada una de tales superficies, mediante ecuaciones en coordenadas rectilíneas de $I\!R^3$, de la siguiente manera:

- $S_{r_0} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2, x^2 + y^2 > 0\}$, i.e., S_{r_0} es la esfera de radio r_0 centrada en el origen, sin sus *polos*, i.e., sin los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.
- $S_{\theta_0} = \{(x, y, z) : y = kx\}$, con $k = tg\theta_0$, es el semi-plano definido por el eje Z y el punto $(cos\theta_0, sen\theta_0, 0)$, del plano (X, Y), pero que no contiene al eje Z.
- $S_{\varphi_0} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = c^2 z^2\}$, con $c = tg\varphi_0$, es la unión de dos conos que tienen al eje Z como eje de simetría, al origen como vértice común (el cual no pertenece a S_{φ_0}), y cada cono es simétrico del otro con respecto al plano (X, Y).

Las superficies S_{r_0}, S_{θ_0} y S_{φ_0}, son ilustradas en las Figuras 5.6.5(a), (b) y (c), respectivamente.

Figura 5.6.5

Siguiendo con el análisis geométrico, consideremos las intersecciones de a pares, de los planos P_{r_0}, P_{θ_0} y P_{φ_0}, i.e., $L_{r_0\theta_0} = P_{r_0} \cap P_{\theta_0}$, $L_{r_0\varphi_0} = P_{r_0} \cap P_{\varphi_0}$, y $L_{\theta_0\varphi_0} = P_{\theta_0} \cap P_{\varphi_0}$. Claramente, tales intersecciones resultan ser las rectas ortogonales que se intersectan en el punto $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Además, las intersecciones de dichas rectas con el dominio de T, determinan los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} L^*_{r_0\theta_0} &= L_{r_0\theta_0} \cap DomT = \{r_0\} \times \{\theta_0\} \times (0,\pi) = P^*_{r_0} \cap P^*_{\theta_0}, \\ L^*_{r_0\varphi_0} &= L_{r_0\varphi_0} \cap DomT = \{r_0\} \times [0,2\pi) \times \{\varphi_0\} = P^*_{r_0} \cap P^*_{\varphi_0}, \\ \text{y} \quad L^*_{\theta_0\varphi_0} &= L_{\theta_0\varphi_0} \cap DomT = (0,+\infty) \times \{\theta_0\} \times \{\varphi_0\} = P^*_{\theta_0} \cap P^*_{\varphi_0}, \end{aligned}$$

y como T es $1-1$ en su dominio, resulta que

$$T(L^*_{r_0\theta_0}) = S_{r_0} \cap S_{\theta_0}, \quad T(L^*_{r_0\varphi_0}) = S_{r_0} \cap S_{\varphi_0}, \quad \text{y} \quad T(L^*_{\theta_0\varphi_0}) = S_{\theta_0} \cap S_{\varphi_0}.$$

Las Figuras 5.6.6(a), (b) y (c) ilustran, respectivamente, a los conjuntos $T(L^*_{r_0\theta_0})$, $T(L^*_{r_0\varphi_0})$ y $T(L^*_{\theta_0\varphi_0})$.

Figura 5.6.6

Evidentemente, la intersección de estos tres conjuntos (curvas en $I\!R^3$) resulta ser igual al punto $(x_0, y_0, z_0) = T(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Además, si $\gamma_r = S_{\theta_0} \cap S_{\varphi_0}, \gamma_\theta = S_{r_0} \cap S_{\varphi_0}$, y $\gamma_\varphi = S_{r_0} \cap S_{\theta_0}$, entonces γ_r, γ_θ y γ_φ son curvas en $I\!R^3$ que pueden ser definidas (paramétricamente) por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
g_{\theta_0\varphi_0} : I\!R \to I\!R^3, &\text{ tal que } \quad g_{\theta_0\varphi_0}(r) = T(r, \theta_0, \varphi_0), \text{ para } r > 0; \\
g_{r_0\varphi_0} : I\!R \to I\!R^3, &\text{ tal que } \quad g_{r_0\varphi_0}(\theta) = T(r_0, \theta, \varphi_0), \text{ para } 0 \leq \theta < 2\pi; \\
\text{y } g_{r_0\theta_0} : I\!R \to I\!R^3, &\text{ tal que } \quad g_{r_0\theta_0}(\varphi) = T(r_0, \theta_0, \varphi), \text{ para } 0 < \varphi < \pi,
\end{aligned}$$

y como estas funciones satisfacen la Definición 4.1.2, resulta que $g'_{\theta_0\varphi_0}(r_0), g'_{r_0\varphi_0}(\theta_0)$ y $g'_{r_0\theta_0}(\varphi_0)$, son los vectores tangentes a las curvas γ_r, γ_θ y γ_φ, respectivamente, en el punto $(x_0, y_0, z_0) = T(r_0, \varphi_0, \theta_0)$. Más aún, las definiciones de las funciones $g_{\theta_0\varphi_0}, g_{r_0\varphi_0}, g_{r_0\theta_0}$ y T, implican que tales vectores corresponden a los vectores columnas, de la matriz Jacobiana de T en $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, y por lo tanto, la matriz $T'(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ transforma la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathcal{U}^3$ en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ donde $\mathbf{c}_k = T'(r_0, \theta_0, \varphi_0) \cdot \mathbf{e}_k$, para $k = 1, 2$ y 3.

La Figura 5.6.7 ilustra a los vectores $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$, trasladados al punto $(x_0, y_0, z_0) = T(r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

Figura 5.6.7

Nótese que en este caso, los vectores $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ también son ortogonales entre si, y por lo tanto, forman una base ortogonal de $I\!R^3$.

3. Sistema de coordenadas cilíndricas en $I\!R^3$.

Para este sistema, se considera la copia $\mathcal{U}^3$ de $I\!R^3$ formada por lo puntos (r, θ, z), cuyas coordenadas (rectilíneas) r, θ y z son números reales, y la función $T : \mathcal{U}^3 \to I\!R^3$ definida por

$$T(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z).$$

Claramente, T es continuamente diferenciable en $\mathcal{U}^3$ ya que sus funciones componentes T_1, T_2 y T_3, definidas por $T_1 = \pi_1 \cdot cos \circ \pi_2, T_2 = \pi_1 \cdot sen \circ \pi_2$, y $T_3 = \pi_3$, son continuamente diferenciables en $\mathcal{U}^3(\pi_1, \pi_2$ y π_3 son las funciones proyecciones definidas en $\mathcal{U}^3)$. Sin embargo, T no es una función $1-1$ en $\mathcal{U}^3$, y por lo tanto, se debe restringir el dominio de T a un conjunto $C \subset \mathcal{U}^3$ de modo que T sea $1-1$ en C.

Un argumento similar al que se dió para el sistema de coordenadas esféricas en $I\!R^3$, permite establecer que T es $1-1$ en el siguiente conjunto:

$$C = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty\},$$

ya que para cada valor de $z = z_0$ fijo, la función T evaluada en puntos de la forma (r, θ, z_0) se comporta como la función que define el sistema de coordenadas polares en el plano, lo que justifica el rango de valores para las variables r, θ y z, que determinan al conjunto C.

Nótese que en este caso también se cumple que la imagen de C bajo la función T es $T(C) = \mathbb{R}^3$-eje Z, ya que x e y no pueden ser simultáneamente nulos.

La matriz Jacobiana de T en un punto (r, θ, z) de C es

$$T'(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y esta matriz es invertible ya que su determinante es igual a r, y por la definición de C se cumple que $r \neq 0$ (porque $r > 0$).

Definición 5.6.4. La función $T : \mathcal{U}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$, para $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$, define un sistema de coordenadas curvilíneas en $\mathbb{R}^3$, llamado *sistema de coordenadas cilíndricas.*Además, si $(x, y, z) = T(r, \theta, z)$, los números r, θ y z se llaman las *coordenadas cilíndricas* del punto (x, y, z).

En este caso, es fácil notar que la inversa de la función T, está definida por $T^{-1}(x, y, z) = (r, \theta, z)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad \theta = arctg(\frac{y}{x})$ y $z = z$, para (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$-eje Z.

Siguiendo un análisis similar al presentado en los dos casos anteriores, consideraremos ahora algunas propiedades geométricas del sistema de coordenadas cilíndricas.

Sea (r_0, θ_0, z_0) un punto dado en C, y sean P_{r_0}, P_{θ_0} y P_{z_0} los planos en $\mathcal{U}^3$ definidos (implícitamente) por las ecuaciones $r = r_0, \theta = \theta_0$ y $z = z_0$, respectivamente y sean $P^*_{r_0}, P^*_{\theta_0}$ y $P^*_{z_0}$ las correspondientes intersecciones de dichos planos con el dominio de T. La definición de T implica que la imagen de estos conjuntos bajo la función T son las siguientes superficies (definidas implícitamente por las ecuaciones que se indican):

- $S_{r_0} = T(P^*_{r_0}) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r_0^2, z \in \mathbb{R}\}$, i.e., S_{r_0} es el cilindro recto, no-acotado, de radio r_0 y cuyo eje de simetría es el eje Z.
- $S_{\theta_0} = T(P^*_{\theta_0}) = \{(x, y, z) : y = kx, z \in \mathbb{R}\}$, con $k = tg\theta_0$, i.e., S_{θ_0} es el semi-plano definido por el eje Z y el punto $(cos\theta_0, sen\theta_0, 0)$ del plano (X, Y), y que no contiene al eje Z.
- $S_{z_0} = T(P^*_{z_0}) = \{(x, y, z_0) : x^2 + y^2 = r^2\}$, i.e., S_{z_0} es el disco centrado en el punto $(0, 0, z_0)$ y de radio r, el cual está contenido en el plano definido por la ecuación $z = z_0$, y no contiene al centro del disco (porque $r > 0$).

Las figuras 5.6.8(a), (b) y (c) ilustran a las superficies S_{r_0}, S_{θ_0} y S_{z_0}, respectivamente.

Figura 5.6.8

Consideremos los conjuntos $L_{r_0\theta_0} = P_{r_0} \cap P_{\theta_0}, L_{r_0 z_0} = P_{r_0} \cap P_{z_0}$, y $L_{\theta_0 z_0} = P_{\theta_0} \cap P_{z_0}$. Claramente, estas intersecciones son las rectas ortogonales que se intersectan en el punto (r_0, θ_0, z_0) (las cuales pueden ser identificadas como las traslaciones paralelas de los ejes coordenados de $\mathcal{U}^3$, de modo que el origen es trasladado al punto (r_0, θ_0, z_0)). Además, si las intersecciones de estas tres rectas con el dominio de T son denotadas por $L^*_{r_0\theta_0}, L^*_{r_0 z_0}$ y $L^*_{\theta_0 r_0}$, respectivamente, entonces se cumple que $L^*_{r_0\theta_0} = P^*_{r_0} \cap P^*_{\theta_0}, L^*_{r_0 z_0} = P^*_{r_0} \cap P^*_{z_0}$ y $L^*_{\theta_0 z_0} = P^*_{\theta_0} \cap P^*_{z_0}$ y como T es $1-1$ en C, estas igualdades implican que $T(L^*_{r_0\theta_0}) = S_{r_0} \cap S_{\theta_0}, T(L^*_{r_0 z_0}) = S_{r_0} \cap S_{z_0}$, y $T(L^*_{\theta_0 z_0}) = S_{\theta_0} \cap S_{z_0}$.

Las Figuras 5.6.9(a),(b) y (c), ilustran los conjuntos $T(L^*_{r_0\theta_0}), T(L^*_{r_0 z_0})$ y $T(L^*_{\theta_0 z_0})$, respectivamente.

Figura 5.6.9

La intersección de estas tres curvas en $I\!R^3$ es el punto $(x_0, y_0, z_0) = T(r_0, \theta_0, z_0)$. Además, un argumento similar al descrito para el sistema de coordenadas esféricas permite asegurar que los vectores tangentes a dichas curvas corresponden a las columnas de la matriz Jacobiana $T'(r_0, \theta_0, z_0)$, y más precisamente, los vectores tangentes a las curvas ilustradas en las Figuras 5.6.8(c), (b) y (a) corresponden, respectivamente, a la primera, segunda y tercera columna de $T'(r_0, \theta_0, z_0)$, y por lo tanto, esta matriz también representa a una matriz de cambio de base: transforma la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathcal{U}^3$ en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ de $I\!R^3$ donde $\mathbf{c}_k = T'(r_0, \theta_0, z_0) \cdot \mathbf{e}_k$, para $k = 1, 2, 3$. Nótese que en este caso también los vectores $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ forman una base ortogonal de $I\!R^3$.

Los tres ejemplos de sistemas de coordenadas curvilíneas que se presentaron en esta sección grafican claramente el nombre de "coordenadas curvilíneas", en el sentido que si se dejan fijas $n-1$ coordenadas de puntos en $\mathcal{U}^n$ y se deja variar la restante coordenada (determinando tales puntos una recta $L \subset \mathcal{U}^n$ que corresponde a la traslación del eje en $\mathcal{U}^n$ asociado a la coordenada que varía), entonces la imagen de tal conjunto de puntos bajo la función T define una curva en $I\!R^n$. En particular, si T es la función identidad de $\mathcal{U}^n$ en $I\!R^n$, entonces tal conjunto imagen es precisamente la recta $T(L) = L$ en $I\!R^n$, i.e., la función T define el sistema de "coordenadas rectilíneas" cartesianas de $I\!R^n$.

En la siguiente sección se ilustra la utilidad que tienen los sistemas de coordenadas curvilíneas en el cálculo de integrales múltiple, ya que en ciertos casos permiten transformar una integral múltiple sobre una región $R \subset I\!R^n$, la cual es "difícil de trabajar", en otra integral múltiple cuya región de integración $S \subset \mathcal{U}^n$ es más "simple" de operar para el cálculo de alguna de las correspondientes integrales iteradas.

5.7. Teorema de cambio de variables para integrales múltiples

En esta sección se considera uno de los resultados más importantes en la teoría de la integración múltiple: El Teorema del Cambio de Variables. Este resultado es una extensión de la llamada fórmula "por sustitución o cambio de variable" para el cálculo de integrales de una variable real, la que establece la siguiente igualdad:

$$\int\limits_{\varphi(R)} f(x)dx = \int\limits_{R} f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt,$$

donde $R \subset I\!R$ es un intervalo cerrado, $\varphi : I\!R \to I\!R$ es una función de clase C^1 en R tal que φ' no se anula en R y $f : I\!R \to I\!R$ es una función continua en $\varphi(R)$. La sustitución o cambio de variable queda definida por $x = \varphi(t)$. El factor $|\varphi'(t)|$ incluye a los casos cuando φ' es positiva en R ó cuando φ' es negativa en R (la condición de que $\varphi' \neq 0$ en R implica que φ es monótona en R, i.e., es creciente ó decreciente en R).

En el caso de varias variables, $R \subset I\!R^n$, es un conjunto medible Jordan (en particular, un rectángulo en $I\!R^n$), la función φ se reemplaza por una función $T : I\!R^n \to I\!R^n$ que define un sistema de coordenadas (curvilíneas), la que determina el "cambio de variables", y la función $f : I\!R^n \to I\!R$ debe ser integrable sobre $T(R)$. Bajo estas condiciones la fórmula del cambio de variables es la siguiente:

$$\int_{T(R)} f(\mathbf{x})dV_{\mathbf{x}} = \int_{R} f(T(\mathbf{u})) \cdot |detT'(\mathbf{u})|dV_{\mathbf{u}}$$

donde $\det T'(\mathbf{u})$ denota el determinante de la matriz Jacobiana $T'(\mathbf{u})$. El cambio de variables queda definido por $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$ y las notaciones $dV_{\mathbf{x}}$ y $dV_{\mathbf{u}}$ se usan para indicar las variables sobre las cuales quedan definidas las dos integrales.

La demostración de la fórmula para el caso de varias variables hace uso de algunos resultados relativos a las funciones lineales de $I\!R^n$ en $I\!R^n$, y de algunas propiedades que tiene una determinada norma de matrices, las cuales se presentan a continuación.

Proposición 5.7.1. Toda función lineal invertible de $I\!R^n$ en $I\!R^n$ se puede expresar como la composición de un número finito de funciones lineales elementales, i.e., si $L : I\!R^n \to I\!R^n$ es una función lineal invertible, entonces existen funciones lineales invertibles $T_1, T_2, ..., T_r$ de $I\!R^n$ en $I\!R^n$ tales que $L = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_r$ donde cada T_i es una de los tres tipos siguientes:

Tipo I: $T(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = (x_1, ..., \lambda x_k, ..., x_n)$, para algún $\lambda \neq 0$, i.e., $T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ si $j \neq k$, y $T(\mathbf{e}_k) = \lambda \mathbf{e}_k$.

Tipo II: $T(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k + x_\ell, ..., x_n)$, para $\ell \neq k$, i.e., $T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ para $j \neq k$, y $T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_\ell$.

Tipo III: $T(x_1, ..., x_k, ..., x_\ell, ...x_n) = T(x_1, ..., x_\ell, ..., x_k, ..., x_n)$, i.e., $T\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ si $j \neq k, \ell, T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_\ell$ y $T(\mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_k$. ■

En términos matriciales, el resultado anterior es conocido como el procedimiento de descomposición de Gauss-Jordan. Si M y M_i, para $i = 1, ..., r$, denotan las matrices que representan a L y T_i con respecto a un par de bases fijas de $I\!R^n$ (e.g., base canónica), entonces se cumple que $M = M_1 ... M_r$ y $M^{-1} = M_r^{-1} ... M_1^{-1}$.

En lo sucesivo, $\det L$ denota el determinante de M. Claramente, $\det\ L = \lambda$ si L es de tipo I, y $|detL| = 1$ si L es de tipo II o III.

Notar que si $g, h : I\!R^n \to I\!R^n$ son funciones diferenciables en R y $g(R)$, respectivamente, entonces el teorema de la regla de la cadena junto con la propiedad del producto de determinantes implica que $\det\ ((h \circ g)'(\mathbf{x})) = \det\ (h'(g(\mathbf{x})) \cdot \det(g'(\mathbf{x}))$, para todo $\mathbf{x} \in R$. En particular, si g define un sistema de coordenadas curvilíneas y $h = g^{-1}$, entonces $\det(h'(g(\mathbf{x})) \cdot \det(g'(\mathbf{x})) = 1$, para todo $\mathbf{x} \in R$. Más aún, si g es lineal y M es la matriz que representa a g (con respecto a las bases canónicas), entonces $\det(g'(\mathbf{x})) = \det\ M$, para todo $\mathbf{x}$.

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal y $A = (a_{ij})$ la matriz que representa a L con respecto a las bases canónicas. Las Proposiciones 2.5.2(2) y 2.6.2 establecen que L es continua en $\mathbb{R}^n$ y que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|L(\mathbf{x})\| \leq K\|\mathbf{x}\|, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

donde la constante K depende de los valores $L(\mathbf{e}_j), j = 1, ..., n$, i.e., de los números a_{ij}, y de la norma que se use para los vectores $L(\mathbf{x})$.

En el caso específico cuando se considera la norma $\| \cdot \|_\infty$ (para los vectores $\mathbf{x}$ y $L(\mathbf{x})$), la igualdad $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, i.e.,

$$L(\mathbf{x}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j),$$

y $|x_j| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$, para $j = 1, ..., n$, implican que

$$\|L(\mathbf{x})\|_\infty = \max\{|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| : i = 1, ..., n\} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i = 1, ..., n\},$$

y por lo tanto, en este caso se tiene que $K = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i = 1, ..., n\}$. La identificación entre L y A (i.e., $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$), y la dependencia explícita de K en término de los elementos de A, justifican la siguiente notación: $K(L) = K(A) = K$.

Si $\mathcal{M}_n$ denota al espacio de las matrices (reales) de $n \times n$, entonces lo anterior permite definir una función $N : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, tal que a cada $A \in \mathcal{M}_n$ se le asocia el número $N(A) = K(A)$.

Proposición 5.7.2. La función N satisface las siguientes propiedades:

1) $N(A) = 0$ si y solo si $A = 0$.
2) $N(\alpha A) = |\alpha| N(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y toda $A \in \mathcal{M}_n$.
3) $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$, para toda A y B en $\mathcal{M}_n$.
4) Para cada $A \in \mathcal{M}_n$ existen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ tales que $N(A) = \|A\mathbf{x}\|_\infty$.
5) $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq N(A) \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y toda $A \in \mathcal{M}_n$.
6) $N(A \cdot B) \leq N(A) \cdot N(B)$, para todas A y B en $\mathcal{M}_n$.
7) Si $I \in \mathcal{M}_n$ es la matriz identidad, entonces $N(I) = 1$.

Demostración. Las tres primeras propiedades pueden ser demostradas fácilmente usando la definición de la función N y las correspondientes definiciones en $\mathcal{M}_n$ de la matriz nula, producto de una matriz por un escalar y la suma de matrices respectivamente (se deja propuesto como un ejercicio). Sin embargo, dichas propiedades pueden ser reestablecidas de modo de mantener el estudio dentro del contexto del cálculo de funciones de varias variables reales, y para esto basta aplicar nuevamente el argumento que se usó para definir la diferencial de orden superior de una función escalar o vectorial (sección 4.5), i.e., se considera el isomorfismo canónico entre los espacios $\mathcal{M}_n$ y $I\!R^{n^2}$, que asocia a cada matriz $A \in \mathcal{M}_n$ un vector $\mathbf{v} \in I\!R^{n^2}$ definido por $\mathbf{v} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{a}^n)$, donde $\mathbf{a}^i \in I\!R^n$ es el vector correspondiente a la fila i de A. Las definiciones de la función N y de la norma $\|\cdot\|_1$ en $I\!R^n$ implican que

$$N(A) = \max\{\|\mathbf{a}^1\|_1, \|\mathbf{a}^2\|_1, ..., \|\mathbf{a}^n\|_1\},$$

i.e., N puede ser considerada como una función de $I\!R^{n^2}$ en $I\!R$ y en tal caso la Proposición 1.1.2 (iii) establece que N es una norma en $I\!R^{n^2}$. Las propiedades 1), 2) y 3) siguen directamente de las correspondientes propiedades de una norma en $I\!R^{n^2}$ y del isomorfismo entre $\mathcal{M}_n$ y $I\!R^{n^2}$.

Las restantes propiedades también pueden ser demostradas usando el isomorfismo indicado más arriba entre $\mathcal{M}_n$ y $I\!R^{n^2}$. Sin embargo, para una exposición más directa y autocontenida se considera la definición de la función N para dichas demostraciones.

(4) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y supongamos que $N(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|$. Si $\mathbf{x}$ es el vector definido por $x_j = 1$ si $a_{pj} \geq 0$ y $x_j = -1$ si $a_{pj} < 0$, entonces claramente se tiene que $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ y $N(A) = \|A\mathbf{x}\|_\infty$.

(5) Sigue de la definición de la función N.

(6) Sean A y B en M_n. El producto de matrices y la propiedad (5) implican que

$$\|(A \cdot B)(\mathbf{x})\|_\infty = \|A(B\mathbf{x})\|_\infty \leq N(A) \cdot \|B\mathbf{x}\|_\infty,$$

y como por (4), $N(A \cdot B) = \|(A \cdot B)(\mathbf{x})\|_\infty$ para $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, se deduce que $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$.

(7) Si $A = I$, matriz identidad, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, para todo i, y por lo tanto, $N(I) = 1$. ■

El argumento que se dió para justificar las tres primeras propiedades del resultado anterior nos permite denominar a la función N como una norma en el espacio $\mathcal{M}_n$, y en consecuencia, usar la correspondiente notación, i.e., $\|A\| = N(A)$.

Además, lo anterior también se puede establecer para el espacio $\mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^n)$ de las funciones lineales de $I\!R^n$ en $I\!R^n$, debido al isomorfismo canónico entre $\mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^n)$ y $\mathcal{M}_n$ y la identificación de $K(L)$ con $K(A)$, i.e., la función $M : \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^n) \to I\!R$ definida por $M(L) = K(L)$, coincide con la función N en el sentido que $M(L) = N(A)$, para $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in I\!R^n$. Esto permite el uso de $\|L\|$ para denotar la constante $K = K(L) = K(A)$.

Consideremos ahora una función $T : I\!R^n \to I\!R^n$ que define un sistema de coordenadas curvilíneas en un conjunto $C \subset DomT$. Entonces, para cada $\mathbf{u} \in C, D(T, \mathbf{u})$ es una función lineal de $I\!R^n$ en $I\!R^n$ y su matriz representante (con respecto a las bases canónicas) es precisamente $T'(\mathbf{u})$, la matriz Jacobiana de T en $\mathbf{u}$ cuyo elemento (i,j) es $\frac{\partial T_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})$, y por lo tanto,

$$\|T'(\mathbf{u})\| = \max\{\sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial T_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})| : i = 1, ..., n\},$$

Notar que si $F : I\!R^n \to I\!R$ es la función definida por $F(\mathbf{u}) = \|T'(\mathbf{u})\|$, entonces F es continua en C, por el álgebra de funciones (Proposición 2.5.1) y porque las funciones $\frac{\partial T_i}{\partial u_j}$ son continuas en C (Definición 3.2.2). En particular, si $Q \subset C$ es un conjunto compacto, entonces la Proposición 2.5.8 asegura que F es acotada en Q, y más aún, F alcanza su valor máximo en Q, i.e., existe $\bar{\mathbf{u}} \in Q$ tal que $F(\bar{\mathbf{u}}) = \sup\{\|T'(\mathbf{u})\| : \mathbf{u} \in Q\}$. El número $F(\bar{\mathbf{u}})$ será denotado por $\rho(T, Q)$.

Evidentemente, si T es lineal, entonces $T'(\mathbf{u}) = T$ para todo $\mathbf{u} \in I\!R^n$, y por lo tanto, se cumple que $|detT'| = |detT|$ y $\rho(T, Q) = \|T\|$.

La demostración de la fórmula del cambio de variables para la integración múltiple se hará en varias etapas, comenzando con el caso particular en que T es una transformación lineal invertible y f es la función constante igual a 1.

Proposición 5.7.3. Sea $T : I\!R^n \to I\!R^n$ una función lineal invertible, y sea $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$. Si $R \subset I\!R^n$ es tal que su frontera $Fr(R)$ está formada por un número finito de conjuntos suaves (pedazos de superficies suaves), entonces la frontera de $T(R)$ también es la unión de un número finito de conjuntos suaves y se cumple que

$$v(T(R)) = \int\limits_{T(R)} 1\!\!1 dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{R} |detT'| dV_{\mathbf{u}} = |detT| v(R).$$

Demostración: En primer lugar notar que si la proposición se cumple para dos funciones lineales L y $T : I\!R^n \to I\!R^n$, entonces también es válida para la función compuesta $L \circ T$. En efecto, si $R \subset I\!R^n$ satisface la hipótesis, entonces $T(R)$ y $S = L(T(R))$ son conjuntos cuyas fronteras están formadas por un número finito de conjuntos suaves, y se cumple que

$$v(T(R)) = \int\limits_{T(R)} 1\!\!1 dV = \int\limits_{R} |detT'| dV = |detT| v(R),$$

y

$$v(L(S)) = \int\limits_{L(S)} 1\!\!1 dV = \int\limits_{S} |detL'| dV = |detL| \cdot v(S),$$

y estas igualdades implican que

$$v((L \circ T)(R)) = \int\limits_{(L \circ T)(R)} 1\!\!1 dV = \int\limits_{R} |det(L \circ T)'| dV = |det(L \circ T)| v(R)$$

ya que $(L \circ T)(R) = L(T(R)) = L(S), L' = L, T' = T$, $(L \circ T)'(\mathbf{u}) = L'(T(\mathbf{u})) \cdot T'(\mathbf{u})$, y $det(L \circ T) = detL \cdot detT$.

Este resultado, junto con la Proposición 5.7.2 implican que basta demostrar la presente proposición para el caso en que T es una función lineal elemental.

Supongamos que T es de tipo I y que está definida por $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$, con $x_i = u_i$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n = \lambda u_n$ (para un λ dado no nulo). Sea $R \subset I\!R^n$ tal que $Fr(R) = S_1 \cup ... \cup S_p$, donde cada S_k es un conjunto suave. Como T es continua (por ser lineal) y es $1-1$, se tiene que

$$Fr(T(R)) = T(Fr(R)) = T(S_1) \cup ... \cup T(S_p),$$

y por la Proposición 5.3.6 resulta que cada $T(S_k)$ es un conjunto suave, y esto implica que $T(R)$ satisface la proposición y, en particular, es medible Jordan.

Para demostrar la fórmula correspondiente al volumen de $T(R)$ aplicamos el Teorema de Fubini para expresar la integral de la función constante igual a $|\lambda|$ sobre R mediante una determinada integral iterada (notar que $detT' = detT = \lambda$).

Sea R_n la proyección de R sobre el subespacio de $I\!R^n$ generado por $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n-1}\}$. Para cada punto $(u_1, ..., u_{n-1}, 0)$ de R_n, sea S_n el conjunto de los $u_n \in I\!R$ tales que $(u_1, ..., u_{n-1}, u_n) \in R$. Entonces, el Teorema de Fubini implica que

$$\int\limits_R |\lambda| dV_{\mathbf{u}} = \int\limits_{R_n} (\int\limits_{S_n} |\lambda| du_n) du_1, ..., du_{n-1},$$

y si $\varphi : I\!R \to I\!R$ es la función definida por $\varphi(s) = \lambda s$, entonces el Teorema del cambio de variable para integrales de una variable real (con $r = \varphi(s)$) implica que

$$\int\limits_{\varphi(S_n)} dr = \int\limits_{S_n} |\varphi'(s)| ds = \int\limits_{S_n} |\lambda| ds$$

donde $\varphi(S_n) = \{r : r = \varphi(s), s \in S_n\}$, i.e., $\varphi(S_n) = \{\lambda s : s \in S_n\}$, y por lo tanto,

$$\int\limits_R |\lambda| dV_{\mathbf{u}} = \int\limits_{R_n} (\int\limits_{\varphi(S_n)} dr) du_1 ... du_{n-1},$$

y como $T(R_n) = R_n$ y $\varphi(S_n)$ es el conjunto de los $x_n \in I\!R$ tales que $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in T(R)$ para cada $(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in T(R_n)$, resulta que

$$\int\limits_{R_n} (\int\limits_{\varphi(S_n)} dr) du_1 ... du_{n-1} = \int\limits_{T(R_n)} (\int\limits_{\varphi(S_n)} dx_n) dx_1 ... dx_{n-1} = \int\limits_{T(R)} dV_{\mathbf{x}},$$

obteniéndose que

$$v(T(R)) = \int\limits_{T(R)} dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{R} |\lambda| dV_{\mathbf{u}} = |\lambda| v(R).$$

Si T es la función de tipo II definida por $T(u_1, ..., u_n) = (u_1, ..., u_{n-1}, u_n + u_k)$ para $k \neq n$, entonces se aplica el argumento anterior usando $\varphi(t) = t + u_k$, y el hecho que $detT' = detT = 1$.

Finalmente, si T es la función elemental de tipo III definida por $T(u_1, ..., u_k, ..., u_\ell, ..., u_n) = (u_1, ..., u_\ell, ..., u_k, ..., u_n)$, entonces basta aplicar el Teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración de las coordenadas k y ℓ, ya que en este caso también se cumple que $|detT'| = |detT| = 1$, lo que completa la demostración. ■

En la siguiente etapa de la justificación de la fórmula del Teorema del cambio de variables para la integración múltiple, se considera el caso en que T define un sistema de coordenadas (curvilíneas) en $\mathbb{R}^n$ y el conjunto R es un rectángulo particular.

Un cubo de longitud lateral ℓ en $\mathbb{R}^n$ es un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ tal que $b_i - a_i = \ell$, para $i = 1, ..., n$. El punto $\mathbf{p} = (\frac{a_1+b_1}{2}, ..., \frac{a_n+b_n}{2})$, se llama el *centro* del cubo R.

Notar que un cubo de longitud lateral ℓ y centro $\mathbf{p}$ es igual a la bola cerrada con centro $\mathbf{p}$ y radio $\ell/2$, definida con la norma $\|\cdot\|_\infty$, y por lo tanto, es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Además, notar que todo cubo es no-degenerado.

Proposición 5.7.4. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función que define un sistema de coordenadas curvilíneas en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$). Si R es un cubo de longitud lateral $2r$ contenido en $DomT$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1) El conjunto $T(R)$ está contenido en un cubo de longitud lateral $2r\rho(T, R)$, donde $\rho(T, R) = \sup\{\|T'(\mathbf{u})\| : \mathbf{u} \in R\}$.
2) El conjunto $T(R)$ es medible Jordan y

$$v(T(R)) = \int\limits_{T(R)} dV_{\mathbf{x}} \leq \int\limits_{R} |detT'| dV_{\mathbf{u}}.$$

Demostración. 1) Sea $R = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\| \leq r\}$ el cubo de longitud lateral $2r$ y de centro $\mathbf{p}$, tal que $R \subset DomT$. La hipótesis para T permite la aplicación del Teorema del valor medio a cada función componente T_i de T en el cubo R, y por lo tanto, para cada $\mathbf{u} \in R$ se tiene que

$$T_i(\mathbf{u}) - T_i(\mathbf{p}) = \nabla T_i(\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{p}) = \sum_j \frac{\partial T_i}{\partial u_j}(v_i)(u_j - p_j),$$

donde $\mathbf{v}_i$ pertenece al segmento lineal que une $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$, y de estas igualdades resulta que

$$|T_i(\mathbf{u}) - T_i(\mathbf{p})| \leq \sum_j |\frac{\partial T_i}{\partial u_j}(\mathbf{v}_i)||u_j - p_j| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\| \sum_j |\frac{\partial T_i}{\partial u_j}(\mathbf{v}_i)| \leq r\rho(T, R),$$

y esto implica que $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{p})\|_\infty \leq r\rho(T, R)$, i.e., $T(R) \subset B_\infty(T(\mathbf{p}), r\rho(T, R))$, lo que demuestra (1).

Notar que el volumen del cubo que contiene a $T(R)$ es igual a $(2r\rho(T, R))^n = (\rho(T, R))^n \cdot v(R)$.

2) Como R es un cubo, es medible Jordan (Proposición 5.4.4(1)), y su frontera es la unión (finita) de sus lados o caras, los cuales son conjuntos suaves, y por lo tanto, si $Fr(R) = S_1 \cup ... \cup S_p$, entonces la hipótesis para T implica que

$$Fr(T(R)) = T(Fr(R)) = T(S_1) \cup ... \cup T(S_p)$$

(ya que T es continua y $1 - 1$), además, cada $T(S_k)$ es un conjunto suave (Proposición 5.3.6), lo que demuestra que $T(R)$ es un conjunto medible Jordan.

En esta parte demostramos que si $h : I\!\!R^n \to I\!\!R$ es la función definida por $h(\mathbf{u}) = |detT'(\mathbf{u})|$, entonces el volumen de $T(R)$ está acotado por la integral de la función h sobre R (la cual existe porque h es continua y R es un cubo en $I\!\!R^n$).

La Proposición 5.7.3 establece que si $L : I\!\!R^n \to I\!\!R^n$ es una función lineal invertible y A su matriz representante (con respecto a las bases canónicas), entonces

$$|detA| \cdot v(S) = v(L(S)),$$

para todo conjunto medible Jordan $S \subset I\!\!R^n$.

Si aplicamos este resultado cuando $S = T(R)$ y $L = D(T^{-1}, \mathbf{x})$ para un $\mathbf{x} \in S$ dado, entonces A es la matriz Jacobiana de L en $\mathbf{x}$, i.e., $A = (T^{-1})'(\mathbf{x})$, y se tiene que

$$|det(T^{-1})'(\mathbf{x})| v(T(R)) = v(L(T(R)),$$

y como $L = (D(T, \mathbf{u}))^{-1}$ y $A = [T'(\mathbf{x})]^{-1}$ para $\mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{x})$ (porque T cumple el Teorema de la Función Inversa), y $L(T(R)) = (L \circ T)(R)$, la igualdad anterior junto con el resultado establecido en (1) implican que

$$|det[T'(\mathbf{u})]^{-1}| \cdot v(T(R)) \leq (\rho(L \circ T, R))^n \cdot v(R),$$

donde $\rho(L \circ T, R) = \max\{\|(L \circ T)'(\mathbf{v})\| : \mathbf{v} \in R\}$. Además como L es una función lineal, $D(L, \mathbf{z}) = L$ y $L'(\mathbf{z}) = A$ para todo $\mathbf{z}$ (Proposición 3.1.2(2)) y por el Teorema de la Regla de la Cadena se tiene que

$$(L \circ T)'(\mathbf{v}) = L'(T(\mathbf{v})) \cdot T'(\mathbf{v}) = A \cdot T'(\mathbf{v})$$

para todo $\mathbf{v} \in R$, y estas igualdades junto con la propiedad: $det(A \cdot A^{-1}) = 1$, implican que

$$v(T(R)) \leq |detT'(\mathbf{u})| \cdot [\max_{\mathbf{v} \in R} \|(T'(\mathbf{u}))^{-1} \cdot T(\mathbf{v})\|]^n \cdot v(R),$$

y esta desigualdad se cumple para cada $\mathbf{u} \in R$.

En particular, si $\mathcal{P} = \{R_1, ..., R_q\}$ es una partición de R tal que cada R_i es un cubo de longitud lateral $\ell_i < \delta$ (para un cierto $\delta > 0$) con centro $\mathbf{u}_k$, entonces al aplicar la desigualdad anterior a cada R_k con $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$, la suma de todas ellas implica que

$$v(T(R)) \leq \sum_k |detT'(\mathbf{u}_k)| \{ \max_{\mathbf{w} \in R_k} \|[T'(\mathbf{u}_k)]^{-1} T'(\mathbf{w})\| \}^n v(R_k).$$

Notar que la suma del lado derecho es similar a una suma inferior o superior de la función $h(\mathbf{u}) = |detT'(\mathbf{u})|$ determinada por la partición $\mathcal{P}$, salvo por el factor central (término elevado a n). Demostraremos que dicho factor, para un δ adecuado, es arbitrariamente cercano a 1.

Sea $L_k : I\!R^n \to I\!R^n$ la función lineal definido por la matriz $A_k = [T'(\mathbf{u}_k)]^{-1}$ para cada $k = 1, ..., q$. La hipótesis para T y la Proposición 3.2.3(5) implican que la función $G_k = L_k \circ T$ es continuamente diferenciable en R, y su matriz Jacobiana en $\mathbf{u}$ es

$$G'_k(\mathbf{u}) = (L_k \circ T)'(\mathbf{u}) = L'_k(T(\mathbf{u})) \cdot T'(\mathbf{u}) = [T'(\mathbf{u}_k)]^{-1} \cdot T'(\mathbf{u}),$$

y por lo tanto, si $G_{k1}, ..., G_{kn}$ son las funciones componentes de G_k, la Definición 3.2.2 establece que la función $\frac{\partial G_{k_i}}{\partial u_j}$ es continua en R para $i, j = 1, ..., n$, y en particular se tiene que

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{u}_k} \frac{\partial G_{k_i}}{\partial u_j}(\mathbf{u}) = \frac{\partial G_{k_i}}{\partial u_j}(\mathbf{u}_k)$$

y como $G'_k(\mathbf{u}_k) = [T'(\mathbf{u}_k)]^{-1} \cdot T'(\mathbf{u}_k) = I$, matriz identidad de orden n, sigue que la función $g_k : I\!R^n \to I\!R$ definida por

$$g_k(\mathbf{u}) = \|[T'(\mathbf{u}_k)]^{-1} \cdot T'(\mathbf{u})\| = \max_i \sum_j |\frac{\partial G_{k_i}}{\partial u_j}(\mathbf{u})|$$

también es continua en R_k (Proposición 2.5.1), y claramente se cumple que $\lim g_k(\mathbf{u}) = 1$. La Definición 2.3.1 implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_k > 0$, tal que si $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\| < \delta_k$ se cumple que $|g_k(\mathbf{u}) - 1| < \varepsilon$, i.e., $g_k(\mathbf{u}) < 1 + \varepsilon$. Sin embargo, para asegurar que esto último se cumpla en todos los cubos R_k, basta elegir $\delta' = \min\{\delta_k\}$, y si $\delta' < \delta$ se determina una partición $\mathcal{P}'$ más fina que $\mathcal{P}$ con la cual se tiene que $g_k(\mathbf{u}) < 1 + \varepsilon$ para todo $\mathbf{u} \in R'_k \in \mathcal{P}'$ y para todo $k = 1, ..., q'$. En particular también se cumple que $\max\{g_k(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R_k\} < 1 + \varepsilon$ para todo k, y aplicando esto último en la cota obtenida para $v(T(R))$ resulta que

$$v(T(R)) \leq (1 + \varepsilon)^n \sum_k |detT'(\mathbf{u}_k)| v(R_k) \leq (1 + \varepsilon)^n S(h, \mathcal{P}')$$

donde $S(h, \mathcal{P}')$ denota la suma superior de la función $h(\mathbf{u}) = |detT'(\mathbf{u})|$, determinada por la partición $\mathcal{P}'$, y como

$$S(h, \mathcal{P}') < \int_R h(\mathbf{u}) dV_{\mathbf{u}} + \varepsilon$$

se tiene que

$$v(T(R)) < (1+\varepsilon)^n \{ \int_R |detT'(\mathbf{u})| dV_{\mathbf{u}} + \varepsilon \}, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

y por lo tanto, esto implica que $v(T(R)) \leq \int_R |detT'| dV_{\mathbf{u}}$, completando la demostración. ■

La siguiente etapa en la demostración de la fórmula del cambio de variable tiene por objeto demostrar que la desigualdad establecida en la proposición anterior también se cumple para el caso en que f es una función continua cuyo dominio contiene a $T(R)$, la imagen de un cubo R, bajo la transformación T. Este resultado permite demostrar la fórmula (i.e., la igualdad) para el caso general.

Proposición 5.7.5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función que define un sistema de coordenadas (curvilíneas) en $\mathbb{R}^n$, y R un cubo contenido en el dominio de T. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $T(R) \subset Domf$, entonces

$$\int_{T(R)} f dV_{\mathbf{x}} \leq \int_R (f \circ T) |detT'| dV_{\mathbf{u}},$$

donde $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$.

Demostración. En primer lugar notar que la continuidad de f y la hipótesis para T aseguran la existencia de cada una de las integrales ya que R y $T(R)$ son medibles Jordan (Proposiciones 5.4.4(1) y 5.7.4(2)). Además, tales hipótesis implican:

(i) f es uniformemente continua en $T(R)$ (ya que f es continua y $T(R) \subset Domf$ es compacto).

(ii) Existe $M > 0$ tal que $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| \leq M \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R (porque T es continuamente diferenciable y $R \subseteq DomT$ es compacto).

(iii) La función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(\mathbf{u}) = |detT'(\mathbf{u})|$ es uniformemente continua en R (porque R es compacto y $detT'(\mathbf{u})$ es un polinomio en las funciones $\frac{\partial T_i}{\partial u_j}$, las cuales son continuas en R), y por lo tanto, como $g(R)$ es compacto existe $K > 0$ tal que $g(\mathbf{u}) = |detT'(\mathbf{u})| \leq K$ para todo $\mathbf{u} \in R$.

La propiedad (i) establece que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $T(R)$ que cumplen $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Además, si $\ell = \delta/M$, entonces la propiedad (ii) también implica que $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| < \delta$ para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R tal que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \ell$. Estas implicancias permiten asegurar que $|(f \circ T)(\mathbf{u}) - (f \circ T)(\mathbf{v})| < \varepsilon$, para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R tal que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \ell$.

Consideremos ahora una partición $\mathcal{P} = \{R_1, ..., R_q\}$ de R en la cual cada R_k es un cubo de longitud lateral menor que ℓ. Para un punto $\mathbf{u} \in R_k$ (e.g., el centro de R_k), sean $\mathbf{x}_k = T(\mathbf{u}_k)$ y $f_k = f(T(\mathbf{u}_k))$. La elección de ℓ implica que para todo k

$$|(f \circ T)(\mathbf{u}) - f_k| < \varepsilon, \text{ para todo } \mathbf{u} \in R_k$$

y

$$|f(\mathbf{x}) - f_k| < \varepsilon, \text{ para todo } \mathbf{x} \in T(R_k).$$

Como $T(R) = T(R_1) \cup ... \cup T(R_q)$, las desigualdades anteriores junto con la propiedad (iii) y la desigualdad de la Proposición 5.7.4(2) implican que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{T(R)} f dV - \int\limits_{R} (f \circ T)|detT'|dV &= \sum_k \{ \int\limits_{T(R_k)} f dV - \int\limits_{R_k} (f \circ T)|detT'|dV \} \\
&\leq \sum_k \{ \int\limits_{T(R_k)} (f - f_k) dV + \int\limits_{R_k} (f_k - f \circ T)|detT'|dV \} \\
&< \sum_k \{ \varepsilon \int\limits_{T(R_k)} dV + \varepsilon \int\limits_{(R_k)} |detT'|dV \} \\
&\leq \varepsilon \{ \sum_k \int\limits_{T(R_k)} dV + K \sum_k \int\limits_{R_k} dV \} \\
&= \varepsilon (v(T(R)) + K v(R)),
\end{aligned}$$

y como lo anterior se cumple para todo $\varepsilon > 0$, sigue que

$$\int\limits_{T(R)} f dV \leq \int\limits_{R} (f \circ T)|detT'|dV,$$

lo que completa la demostración. ■

A continuación se demuestra la fórmula del cambio de variable para el caso general.

Proposición 5.7.6. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en un abierto $A \subset Dom(T)$, y sea $R \subset \mathbb{R}^n$ tal que

1) $Fr(R)$, la frontera de R, es la unión de un número finito de conjuntos suaves.
2) R y $Fr(R)$ están contenidos en A.
3) T es $1-1$ en R
4) $detT'(\mathbf{u}) \neq 0$ para todo $\mathbf{u} \in R - B$, donde $B = \phi$ ó B es la unión de un número finito de conjuntos suaves.

Si $f : I\!R^n \to I\!R$ es continua y acotada en $T(R)$, entonces

$$\int\limits_{T(R)} f dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{R} (f \circ T)|detT'| dV_{\mathbf{u}}.$$

Demostración. Las hipótesis para T, F y (1) implican que la función $f \circ T|detT'|$ es integrable sobre R (dicha función es continua y acotada en R y R es medible Jordan).

Para demostrar la igualdad, se debe comprobar previamente que f es integrable sobre $T(R)$, para lo cual basta demostrar que $T(R)$ es medible Jordan (ya que f es continua y acotada en $T(R)$). En lo que sigue se supone que $f \geq 0$. El caso general sigue directamente del caso $f \geq 0$ y se considera al final de esta demostración.

Sea Q un cubo tal que $R \subset Q$. Como R es medible Jordan, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathcal{P}$ de Q formada por cubos tal que $R = C_1 \cup ... \cup C_p \cup S_R$, donde $C_1, ..., C_p$ son los cubos que están contenidos en R, S_R es la parte de R que no está contenida en ninguno de los cubos C_k y $v(S_R) < \varepsilon$ (la existencia de $\mathcal{P}$ está asegurada por la condición (1), i.e., porque la frontera de R es de contenido cero). Además, si suponemos que $B = \phi$ en la condición (4) entonces T y f satisfacen la Proposición 5.7.5 en cada cubo C_k, y por lo tanto, se tiene

$$\int\limits_{R(C_k)} f dV_{\mathbf{x}} \leq \int\limits_{C_k} (f \circ T)|detT'| dV_{\mathbf{u}}, \text{ para } k = 1, ..., p,$$

y si $C = C_1 \cup ... \cup C_p$, estas desigualdades junto con la Proposición 5.4.7 implican

$$\int\limits_{T(C)} f dV_{\mathbf{x}} \leq \int\limits_{C} (f \circ T)|detT'| dV_{\mathbf{u}},$$

ya que por la condición (3) y porque $\text{Int}(C_i \cap C_j) = \phi$ si $i \neq j$ se cumple que

$$T(C) = T(C_1) \cup ... \cup T(C_p) \text{ y que } Int(T(C_i) \cap T(C_j)) = \phi \text{ si } i \neq j.$$

Además, como $Int(C \cap S_R) = \phi$, también se cumple que $Int(T(C) \cap T(S_R)) = \phi$ y que $T(R) = T(R \cup S_R) = T(C) \cup T(S_R)$ (por la condición (3)), y por lo tanto, de la Proposición 5.4.7 resulta que

$$\int\limits_{T(R)} f dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{T(C)} f dV_{\mathbf{x}} + \int\limits_{T(S_R)} f dV_{\mathbf{x}}$$

y

$$\int\limits_{R}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}}=\int\limits_{C}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}}+\int\limits_{S_R}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}}$$

y estas igualdades junto con la desigualdad anterior implican

$$\begin{aligned}\int\limits_{T(R)} fdV_{\mathbf{x}}-\int\limits_{R}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}} &\leq \int\limits_{T(S_R)} fdV_{\mathbf{x}}-\int\limits_{S_R}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}},\\ &\leq Mv(T(S_R))+Mv(S_R)\end{aligned}$$

donde $M>0$ es tal que $f(\mathbf{x})\leq M$, para todo $\mathbf{x}\in T(R)$ y $((f\circ T)|detT'|)(\mathbf{u})\leq M$, para todo $\mathbf{u}\in R$ (la existencia de M está asegurada por el acotamiento de las funciones f y $detT'$ en $T(R)$ y R, respectivamente, y porque T es $1-1$ en R, según la condición (3)). La hipótesis de que T es continuamente diferenciable en A y la condición (2) implican la existencia de una constante $K>0$ tal que

$$\|T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v})\|\leq K\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|,\ \text{para todo } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ en } R,$$

y como $R_S\subset R$ y $v(S_R)<\varepsilon$ se tiene que $v(T(S_R))<\varepsilon K^n$ y esto implica

$$\int\limits_{T(R)} fdV_{\mathbf{x}}-\int\limits_{R}(f\circ T)|detT'|fdV_{\mathbf{u}}\leq M(v(T(S_R))+v(S_R))<\varepsilon M(K^n+1),$$

y como $\varepsilon>0$ es cualquiera resulta que

$$\int\limits_{T(R)} fdV_{\mathbf{x}}\leq\int\limits_{R}(f\circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}}.$$

La igualdad de la fórmula sigue al aplicar la desigualdad anterior al caso en que T,f y R se reemplazan por $L=T^{-1},g=(f\circ T)|detT'|$ y $S=T(R)$, respectivamente. Claramente, las hipótesis para T,f y R implican que L,g y S también satisfacen dichas hipótesis (justificar), y por lo tanto,

$$\int\limits_{L(S)} gdV_{\mathbf{u}}\leq\int\limits_{S}(g\circ L)|detL'|dV_{\mathbf{x}}$$

donde $\mathbf{u}=L(\mathbf{x})$.

Las definiciones de L,g y S implican

$$\begin{aligned}(g\circ L)|detL'|&=(((f\circ T)|detT'|)\circ L)|detL'|\\ &=((f\circ T\circ L)|detT'\circ L|)|detL'|,\end{aligned}$$

y como $T \circ L = I$ (función identidad), resulta que

$$\begin{aligned}(det(T' \circ L) \cdot detL')(\mathbf{x}) &= det(T' \circ L)(\mathbf{x}) \cdot detL'(\mathbf{x}) \\ &= det(T'(L(\mathbf{x})) \cdot L'(\mathbf{x})) \\ &= det(T \circ L)'(\mathbf{x})) \\ &= 1,\end{aligned}$$

y por lo tanto, al reemplazar $g, (g \circ L)|detL'|, S$ y $L(S)$ en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\int\limits_R (f \circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}} \leq \int\limits_{T(R)} f dV_{\mathbf{x}},$$

lo que implica la igualdad de la fórmula del cambio de variables.

En el argumento que se usó para demostrar la última desigualdad, se supone que $B = \phi$ en la condición (4), y por lo tanto, no es válido si B es un conjunto suave no vacío contenido en R, ya que en tal caso T^{-1} podría no ser continuamente diferenciable. Sin embargo, si $B \neq \phi$, la Proposición 5.3.6, establece que B y $T(B)$ son conjuntos de contenido cero, y por lo tanto, la Proposición 5.4.9 implica que las funciones f y $(f \circ T)|detT'|$ son integrables sobre $T(R)$ y R, respectivamente, y que los valores de las correspondientes integrales son independientes de la manera en que se definan dichas funciones en los conjuntos $T(R)$ y R, y en consecuencia la fórmula del cambio de variables es válida también para el caso en que $B \neq \phi$.

Finalmente, consideramos el caso en que $f \ngeq 0$ en $T(R)$. Si se denotan por $T(R)^+$ y $T(R)^-$ los subconjuntos de $T(R)$ en los cuales $f \geq 0$ y $f < 0$, respectivamente, entonces la condición (3) (que establece que T es $1-1$ en R) implica que $R = R^+ \cup R^-$ donde $T(R^+) = T(R)^+$ y $T(R^-) = T(R)^-$, y aplicando la fórmula del cambio de variables separadamente para f en $T(R)^+$ y f en $T(R)^-$, el caso general sigue de la Proposición 5.4.7 al sumar las correspondientes igualdades (ya que $R^+ \cap R^- = T(R)^+ \cap T(R)^- = \phi$), lo que completa la demostración. ■

Corolario 5.7.7. Si la función f en la proposición anterior es discontinua en un conjunto suave $S \subset R$ y es acotada en $R - S$, e integrable sobre $R - S$, entonces

$$\int\limits_{T(R-S)} f dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{R-S} (f \circ T)|detT'|dV_{\mathbf{u}}$$

Demostración. Sigue directamente de la proposición anterior (aplicada a $R - S$) y la Proposición 5.4.9. Más aún, si se define f en S de modo que f sea acotada en todo R, el corolario se cumple con R en lugar de $R - S$. ■

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos que ilustran el uso de la fórmula del Teorema del cambio de variables para la integración múltiple.

Ejemplo 5.7.1. Sea $T : I\!R^n \to I\!R^n$ una función que satisface las hipótesis de la Proposición 5.7.6 para un rectángulo $R \subset I\!R^n$ de volumen arbitrariamente pequeño. Entonces, el volumen de $T(R)$ es aproximadamente igual a $|detT'(\bar{\mathbf{u}})|v(R)$, para cualquier $\bar{\mathbf{u}}$ en R.

Solución. Nótese que si T es una función lineal, entonces la Proposición 5.7.3 establece la igualdad, i.e., $v(T(R)) = |detT'|v(R) = |detT|v(R)$. Consideremos ahora el caso general. Como T y R satisfacen la Proposición 5.7.6, al reemplazar f por la función constante igual a 1, la fórmula resultante establece que

$$\int\limits_{T(R)} dV_{\mathbf{x}} = \int\limits_{R} |detT'|dV_{\mathbf{u}},$$

y si $\bar{\mathbf{u}} \in R$, la aproximación afín de T en $\bar{\mathbf{u}}$ definida por

$$A(\mathbf{u}) = T(\bar{\mathbf{u}}) + T'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}), \text{ para } \mathbf{u} \in I\!R^n,$$

satisface $T(\mathbf{u}) \approx A(\mathbf{u})$ para $\mathbf{u} \in R$, y esto implica que $detT'(\bar{\mathbf{u}})$ es una aproximación de $detT'(\mathbf{u})$ para $u \in R$, y por lo tanto,

$$\int\limits_{T(R)} dV_{\mathbf{x}} \approx \int\limits_{R} |detT'(\bar{\mathbf{u}})|dV_{\mathbf{u}},$$

y como $detT'(\bar{\mathbf{u}})$ es una constante, la Definición 5.4.3 junto con la Proposición 5.4.5 implican que

$$v(T(R)) = \int\limits_{T(R)} dV\mathbf{x} \approx \int\limits_{R} |detT'(\bar{\mathbf{u}})|dV_{\mathbf{u}} = |detT'(\bar{\mathbf{u}})|v(R),$$

lo que comprueba que $|detT(\bar{\mathbf{u}})|v(R)$ es un valor aproximado del volumen de $T(R)$.

Para ilustrar lo anterior, consideremos la función $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ definida por $T(u_1, u_2) = (u_1^2, u_1 + u_2)$, y sea R el rectángulo definido por $[1, 1+\alpha] \times [1, 1+\beta]$, donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Claramente, la función T es continuamente diferenciable en $I\!R^2$ y es $1-1$ en el conjunto $A = \{(u_1, u_2) : u_1 > 0\}$. Además, $detT' \neq 0$ en A ya que

$$T'(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y } detT'(u_1, u_2) = 2u_1 > 0$$

para todo $(u_1,u_2)\in A$, y en particular, $detT'\neq 0$ en R.

La aproximación afín de T en $\bar{\mathbf{u}}=(1,1)$ es la función $A:I\!\!R^2\to I\!\!R^2$ definida por

$$A(u_1,u_2)=T(1,1)+T'(1,1)((u_1,u_2)-(1,1))=(2u_1-1,u_1+u_2)$$

y como $T(u_1,u_2)\approx A(u_1,u_2)$ para $(u_1,u_2)\in R$, cuando α y β son pequeños, resulta que el número $detT'(1,1)=2$, es un valor aproximado de $detT'(u_1,u_2)$ para $(u_1,u_2)\in R$, y por lo tanto,

$$v(T(R))=\int\int_{T(R)} dxdy\approx\int\int_{R}|detT'(1,1)|dudv=2\int\int_{R} dudv,$$

i.e., $v(T(R))\approx 2\alpha\beta$.

Para comparar este resultado con el valor exacto de $v(T(R))$, usamos la fórmula del cambio de variable (con $f=1$), y se tiene

$$v(T(R))=\int\int_{T(R)} dxdy=\int\int_{R}|detT'(u_1,u_2)|du_1,du_2=\int_1^{1+\beta}\int_1^{1+\alpha}2u_1du_1du_2,$$

y esto implica que $v(T(R))=(2\alpha+\alpha^2)\beta$, y por lo tanto, si $\bar{v}$ denota el volumen aproximado de $T(R)$, se concluye que $v(T(R))=\bar{v}+\alpha^2\beta\approx\bar{v}$ si α y β son pequeños.

Ejemplo 5.7.2. Sea $T:I\!\!R^2\to I\!\!R^2$ la función definida por $T(u,v)=(u^2-v,u+v^2)$, y sea $R\subset I\!\!R^2$ el conjunto formado por los puntos (u,v) tales que $0\leq u\leq 1$ y $0\leq v\leq 1$ (i.e., R es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$).

Comprobaremos que T y R satisfacen la Proposición 5.7.6 y la correspondiente fórmula cuando f es la función $f(x,y)=x+y$.

En primer lugar nótese que T es continuamente diferenciable en $I\!\!R^2$ (ya que sus funciones componentes lo son), y además, es una función $1-1$ en $I\!\!R^2$. Para verificar esto último, supongamos que $T(u,v)=T(r,s)$, y demostremos que $(u,v)=(r,s)$, i.e., $u=r$ y $v=s$.

Si $T(u,v)=T(r,s)$, entonces la definición de T implica $u^2-v=r^2-s$ y $u+v^2=r+s^2$. Claramente, se tiene que si $u=r$, entonces $v=s$ y también se cumple el recíproco, i.e., $v=s$ implica $u=r$. Supongamos, $u\neq r$ y $v\neq s$ (no se puede cumplir $u\neq r$ y $v=s$, y tampoco $u=r$ y $v\neq s$). Como las igualdades $u^2-v=r^2-s$ y $u+v^2=r+s^2$ son equivalentes a $u^2-r^2=v-s$ y $u-r=-(v^2-s^2)$, resulta que $-(v^2-s^2)(u+r)=v-s$, y como $v\neq s$, se tiene que $(v+s)(u+r)=0$, lo que implica $v=-s$ o $u=-r$; pero ninguna de éstas es posible ya que $v=-s$ con $u+v^2=r+s^2$ implica $u=r$, mientras que $u=-r$ con $u^2-v=r^2-s$ implica $v=s$, contradiciendo el supuesto de que $u\neq r$ y $v\neq s$. Por lo tanto, $T(u,v)=T(r,s)$ implica $(u,v)=(r,s)$, i.e., T es $1-1$ en R.

Por otra parte, como R es un cuadrado ("cubo") en $I\!R^2$, su frontera (que es la unión de sus cuatro lados) también está contenido en $I\!R^2$. Además, como T es $1-1$ en $I\!R^2$, lo es en particular en R.

La argumentación anterior nuestra que T y R cumplen las tres primeras condiciones de la Proposición 7.5.6. Para comprobar la condición (4) se obtiene previamente $T'(u,v)$

$$T'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix},$$

y por lo tanto, $detT'(u,v) = 4uv + 1 \neq 0$, para todo $(u,v) \in R$, y con esto se completa la comprobación de que T y R satisfacen las condiciones de la Proposición 5.7.6. Además, como $f(x,y) = x + y$, es continua se cumple la fórmula del cambio de variables, i.e.,

$$\int\int_{T(R)} f(x,y) dV_{(x,y)} = \int\int_{R} (f \circ T)(u,v)|detT'(u,v)| dV_{(u,v)}$$

y para comprobar esta igualdad, calcularemos primero la integral sobre R. Como $detT'(u,v) = 4uv + 1 > 0$ para todo $(u,v) \in R$, las definiciones de las funciones f y T implican

$$(f \circ T)(u,v)|detT'(u,v)| = (u^2 - v + u + v^2)(4uv + 1)$$

para todo $(u,v) \in R$. Por el Teorema de Fubini, la integral de esta función sobre R es igual a cada una de sus dos integrales iteradas asociadas, y por lo tanto, si se considera la integral iterada en el orden $dudv$, resulta

$$\begin{aligned} \int\int_{R} (f \circ T)(u,v)|detT'(u,v)| dudv &= \int_0^1 (\int_0^1 (u^2 - v + u + v^2)(4uv + 1) du) dv \\ &= \int_0^1 (\frac{5}{6} + \frac{4}{3}v - v^2 + 2v^3) dv \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Para calcular la integral de f sobre $T(R)$, se determina previamente el conjunto $T(R)$. Como T es continua y $1-1$ en $I\!R^2$, se cumple que $Fr(T(R)) = T(Fr(R))$, y por lo tanto, la frontera de $T(R)$ es la unión de las imágenes, bajo T, de cada uno de los lados del cuadrado R, i.e., si ℓ_i para $i = 1,2,3,4$, denotan los lados de R, entonces $Fr(T(R)) = T(\ell_1) \cup T(\ell_2) \cup T(\ell_3) \cup T(\ell_4)$. Los conjuntos $T(\ell_i)$ se obtienen de la siguiente manera (usando la definición de T y teniendo presente que si $(x,y) = T(u,v)$, entonces $x = u^2 - v$, e $y = u + v^2$).

(1) Sea $\ell_1 = \{(u,0) : 0 \leq u \leq 1\}$. Si $(u,0) \in \ell_1$, entonces $(x,y) = T(u,0)$ implica $x = u^2$ e $y = u$, i.e., $T(\ell_1)$ es la parte de la parábola definida por: $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 1$.

(2) Sea $\ell_2 = \{(1,v) : 0 \leq v \leq 1\}$. Si $(1,v) \in \ell_2$, entonces $(x,y) = T(1,v)$ implica $x = 1-v$ e $y = 1+v^2$, i.e., $T(\ell_2)$ es la parte de la parábola definida por: $y = 1+(1-x)^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

(3) Sea $\ell_3 = \{(u,1) : 0 \leq u \leq 1\}$. Si $(u,1) \in \ell_3$, entonces $(x,y) = T(u,1)$ implica $x = u^2-1$ e $y = u+1$, i.e., $T(\ell_3)$ es la parte de la parábola definida por: $y = 1+\sqrt{1+x}$, para $-1 \leq x \leq 0$.

(4) Sea $\ell_4 = \{(0,v) : 0 \leq v \leq 1\}$. Si $(0,v) \in \ell_4$, entonces $(x,y) = T(0,v)$ implica $x = -v$ e $y = v^2$, i.e., $T(\ell_4)$ es la parte de la parábola definida por: $y = x^2$, para $-1 \leq x \leq 0$.

La Figura 5.7.1 ilustra los conjuntos R y $T(R)$.

Figura 5.7.1

La integral de f sobre $T(R)$ puede ser obtenida (por el Teorema de Fubini), mediante cualquiera de sus dos integrales iteradas. La integral iterada en el orden $dydx$ implica que

$$x^2 \leq y \leq 1+\sqrt{1+x}, \text{ para cada } x \in [-1,0],$$

y

$$\sqrt{x} \leq y \leq 1+(1-x)^2, \text{ para cada } x \in [0,1],$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int\int_{T(R)} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\Big(\int_{x^2}^{1+\sqrt{1+x}} (x+y)dy\Big)dx + \int_{0}^{1}\Big(\int_{\sqrt{x}}^{1+(1-x)^2} (x+y)dy\Big)dx \\ &= \frac{4}{5} + \frac{13}{15} \\ &= \frac{5}{3},\end{aligned}$$

y con este resultado se completa la comprobación de la fórmula del cambio de variables para este ejemplo.

En los siguientes ejemplos se consideran los cambios de variables más usuales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y que fueron descritos en la sección anterior, i.e., la transformación que define el sistema de coordenadas polares en el plano $\mathbb{R}^2$ y las que definen los sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5.7.3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $T(r,\theta) = (rcos\theta,\, rsen\theta)$, y sea $(x,y) = T(r,\theta)$.

La función T es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$, es $1-1$ en el conjunto $C = \{(r,\theta) : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, y además $detT'(r,\theta) = r$, para todo (r,θ). Si $(r_0,\theta_0) \in C$ y R es el rectángulo $[r_0, r_0 + \Delta r] \times [\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta]$, entonces el argumento dado en el Ejemplo 5.7.1 implica que el número $|detT'(r_0,\theta_0)|\Delta r\Delta\theta = r_0\Delta r\Delta\theta$ determina un valor aproximado del área de la región $S = T(R)$ contenida en el plano (X,Y). La Figura 5.7.2 ilustra los conjuntos R y S.

Figura 5.7.2

El valor exacto del área de S, se puede calcular usando la fórmula del cambio de variables ya que T y R satisfacen la Proposición 5.7.6, y dicho valor resulta ser

$$
\begin{aligned}
A(S) = \int_S dV_{(x,y)} = \int_R |detT'(r,\theta)|dV_{(r,\theta)} &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \Big(\int_{r_0}^{r_0+\Delta r} rdr\Big)d\theta \\
&= \Big(\frac{1}{2}(r_0+\Delta r)^2 - \frac{1}{2}r_0^2\Big)\Delta\theta \\
&= r_0\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $A(S) \approx r_0 \Delta r \Delta\theta$ para Δr y $\Delta\theta$ pequeños, lo que comprueba para este caso, el resultado obtenido en el Ejemplo 5.7.1, i.e., el número $r_0 \Delta r \Delta\theta = |detT'(r_0, \theta_0)| \Delta r \Delta\theta$ representa un valor aproximado del área de la región $S = T(R)$. La expresión $r\Delta r\Delta\theta$ es llamada el *elemento de área* en coordenadas polares.

Nótese además que si $f : I\!R^2 \to I\!R$ es una función integrable en S, entonces la fórmula del cambio de variables usando coordenadas polares establece que

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int\int_R F(r,\theta) r dr d\theta$$

donde $F(r,\theta) = f(rcos\theta, rsen\theta)$.

Ejemplo 5.7.4. Sea $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ la función que define al sistema de coordenadas esféricas en $I\!R^3$, i.e.,

$$T(r,\theta,\varphi) = (rcos\theta sen\phi, rsen\theta sen\phi, rcos\phi).$$

En la sección 5.6 se comprobó que T es continuamente diferenciable en $I\!R^3$ y es $1-1$ en $C = \{(r,\theta,\phi) : r > 0, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \phi < \pi\}$. Además, si $(r,\theta,\varphi) \in C$, $|detT'(r,\theta,\phi)| = r^2 sen\phi$. Un argumento similar al descrito en el ejemplo anterior implica que si $R = [r_0, r_0 + \Delta r] \times [\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta] \times [\phi_0, \phi_0 + \Delta\phi]$, donde $(r_0, \theta_0, \phi_0) \in C$, entonces $|detT'(r_0,\theta_0,\phi_0)| \cdot \Delta r \Delta\theta\Delta\phi = r_0^2 sen\phi_0 \; \Delta r\Delta\theta\Delta\phi$ determina un valor aproximado para el volumen de la región $S = T(R)$. La Figura 5.7.3 ilustra el conjunto S.

Figura 5.7.3

Como T y R satisfacen la Proposición 5.7.6, el valor exacto del volumen de S puede ser obtenido mediante la aplicación de la fórmula del cambio de variables de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
v(S) = \int\limits_S dV_{(x,y,z)} &= \int\limits_R |detT'(r,\theta,\phi)|dV_{(r,\theta,\phi)}\\
&= \int\limits_{\phi_0}^{\phi_0+\Delta\phi} (\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} (\int\limits_{r_0}^{r_0+\Delta r} r^2 sen\phi dr)d\theta)d\phi\\
&= \int\limits_{\phi_0}^{\phi_0+\Delta\phi} sen\phi\Delta\theta\cdot\frac{1}{3}((r_0+\Delta r)^3 - r_0^3)d\phi\\
&= (r_0^2\Delta r + r_0(\Delta r)^2 + \frac{1}{3}(\Delta r)^3)\Delta\theta\cdot(cos\phi_0 - cos(\phi_0+\Delta\phi))
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, si Δr, $\Delta\theta$ y $\Delta\phi$ son pequeños, entonces se tiene que $cos\phi_0 - cos(\phi_0+\Delta\phi) = cos\phi_0 - cos\phi_0\cdot cos\Delta\phi + sen\phi\cdot sen\Delta\phi \approx sen\phi_0\Delta\phi$ ya que $cos\Delta\phi\approx 1$ y $sen\Delta\phi\approx\phi$, y esto implica que $v(S)\approx r_0^2 sen\phi_0\Delta r\theta\Delta\phi = |detT'(r_0,\theta_0,\phi_0)|\cdot v(R)$, lo que comprueba el resultado del Ejemplo 5.7.1 para este caso. El término $r^2 sen\phi\Delta r\Delta\theta\Delta\phi$ se llama el *elemento de volumen* en coordenadas esféricas.

La fórmula del cambio de variables cuando se usan las coordenadas esféricas para una función $f : I\!\!R^3 \to I\!\!R$ integrable sobre S resulta ser la siguiente

$$
\int\int\limits_S\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int\limits_R\int F(r,\theta,\varphi)r^2 sen\phi drd\theta d\phi,
$$

donde $F(r,\theta,\varphi) = f(rcos\theta sen\phi, rsen\theta sen\phi, rcos\phi)$.

El caso de la transformación que define el sistema de coordenadas cilíndricas en $I\!\!R^3$ se deja propuesto como ejercicio.

5.8. Integrales impropias

En esta sección se demuestra que, bajo ciertas condiciones, las definiciones y resultados obtenidos de la teoría de la integral múltiple, pueden ser extendidos al caso de funciones no acotadas sobre conjuntos no acotados en $I\!\!R^n$.

Previamente a la descripción de la extensión en cuestión es conveniente recordar las nociones de conjuntos no acotados y funciones no acotadas.

Un conjunto $C\subset I\!\!R^n$ se dice ser *no acotado* si para cualquier $r>0$ existe $\mathbf{x}\in C$ tal que $\|\mathbf{x}\| > r$, i.e., $C\not\subset B(\mathbf{0},r)$ (equivalente, no existe $\rho>0$ tal que $C\subset B(\mathbf{0},r)$).

Una función $f : I\!\!R^n\to I\!\!R$ es *no acotada* en un conjunto $C\subset I\!\!R^n$ si existe $\mathbf{a}\in I\!\!R^n$ tal que $\mathbf{a}$ es punto de acumulación de $C\cap Domf$, y para todo $r>0$, el conjunto $f(B(\mathbf{a},r))$ es no acotado en $I\!R$, i.e., los números $|f(\mathbf{x})|$ con $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, r)$, son arbitrariamente grandes. El punto $\mathbf{a}$ se llama *punto de discontinuidad infinita de* f (se dice también que $\mathbf{a}$ es un punto de discontinuidad no reparable de f).

Ejemplo 5.8.1.
1) Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Claramente, el conjunto $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es el conjunto de los puntos de discontinuidad no reparable de f en $I\!R^2$, y por lo tanto, f es no acotada en cualquier conjunto $C \subset I\!R^2$ si (al menos) un punto de B es punto de acumulación de C. Esto implica que f es acotada en cualquier conjunto $C \subset C(\alpha, \beta)$, donde $C(\alpha, \beta) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 - \alpha\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1 + \beta\}$, para $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta > 0$. Notar además que B es un conjunto de contenido cero (y por lo tanto, es de medida cero).
2) Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}.$$

En este caso, el conjunto de puntos de discontinuidad no reparable de f en $I\!R^2$ es la unión de los ejes cartesianos X e Y, i.e., $B = \{(x,y) : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$, y por lo tanto, f es no acotada en cualquier subconjunto de $I\!R^2$ que admite (al menos) un punto de acumulación en B, y en consecuencia, f es acotada en cualquier conjunto $C \subset C(\alpha, \beta)$, donde $C(\alpha, \beta) = \{(x,y) : |x| \geq \alpha\} \cup \{(x,y) : |y| \geq \beta\}$, para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Notar que en este ejemplo, el conjunto B es de medida cero, pero no es de contenido cero (B es no acotado).

La extensión de la teoría de la integral múltiple al caso de funciones no acotadas sobre conjuntos no acotados está basada en las condiciones que aseguran la integrabilidad de una función acotada sobre un conjunto acotado. Recordar que tales condiciones establecen que una función $f : I\!R^n \to I\!R$ acotada en un conjunto acotado $C \subset I\!R^n$ es integrable sobre C si se cumplen las siguientes condiciones:

CI1: El conjunto de los puntos de discontinuidad de f en C es de medida cero.
CI2: El conjunto C es medible Jordan, i.e., $Fr(C)$ es de contenido cero.

Para el caso de una función no acotada en conjuntos no acotados de $I\!R^n$ la extensión hace uso de las condiciones CI1 y CI2 restringidas a rectángulos. Más específicamente, las condiciones para una función no acotada f en un conjunto $C \subset I\!R^n$ son las siguientes:

CINA1: Si B es el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f, entonces, para cualquier rectángulo $R \subset I\!R^n$ el conjunto $B \cap R$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos suaves.
CINA2: Para cualquier rectángulo $R \subset I\!R^n$, la frontera de $C \cap R$ es la unión de un número finito de conjuntos suaves.

Nótese que estas condiciones se cumplen con cada una de las funciones del Ejemplo 5.8.1 (comprobar gráficamente esta afirmación).

Evidentemente, para que estas condiciones sean distintas de las condiciones CI1 y CI2, se debe cumplir al menos una de las siguientes:
- El conjunto B contiene puntos de discontinuidad infinita de f.
- El conjunto C es no acotado.

Definición 5.8.1. Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia creciente de subconjuntos acotados de C, donde $L \subset (0, +\infty)$, i.e., $C_\lambda \subset C$ para todo $\lambda \in L$ y $C_\lambda \subset C_{\lambda'}$ si $\lambda < \lambda'$. Se dice que $\{C_\lambda\}$ *converge* a C ssi para todo subconjunto acotado $A \subset C$ tal que f es acotada en A, existe $\lambda \in L$ tal que $A \subset C_\lambda$.

Nótese que esta definición implica que f es acotada en cada C_λ.

En lo sucesivo se supone que las familias $\{C_\lambda\}$ convergentes a C son elegidas de modo que f es integrable Riemann sobre C_λ y que C_λ satisface la condición CINA2, para todo $\lambda \in L$.

Evidentemente, existen diversas maneras para cubrir al conjunto C mediante familias convergentes a C. Sin embargo, para el cálculo de la integral de f sobre C que se define más adelante, es conveniente elegir familias $\{C_\lambda\}$ que convergen a C de modo que la frontera de cada C_λ (o una parte de ella) tenga la misma "forma" que la intersección de las fronteras de B y C (cuando es no vacía), ó la que tiene la frontera de C (o parte de ella) tal como se ilustra a continuación.

Ejemplo 5.8.2. Consideremos los siguientes conjuntos $C \subset I\!R^2$ para las funciones del Ejemplo 5.8.1.

1) $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ para $f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$.

En este caso $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es el conjunto de puntos de discontinuidad de f (tales puntos son de discontinuidad infinita), y $Fr(B) \cap Fr(C) = B \neq \phi$.

Claramente, la familia $\{C_\lambda\}$ definida por

$$C_\lambda = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{\lambda}\}, \text{ para } \lambda \in I\!N, \lambda \geq 2,$$

converge a C. Además, la "forma" de C_λ (disco abierto, centrado en $(0, 0)$ y de radio $\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}}$) es del mismo tipo que la del conjunto C (disco cerrado, con centro en $(0, 0)$ y radio 1).

2) $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$ y $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$.

Para este caso también se cumple que $Fr(B) \cap Fr(C) = B$, donde $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, pero a diferencia del caso anterior el conjunto C es no acotado. Sin embargo, como la frontera de C es igual al conjunto B, la familia $\{C_\lambda\}$ definida por

$$C_\lambda = \{(x,y) : 1 + \frac{1}{\lambda^2} < x^2 + y^2 < 2 + \lambda\}, \text{ para } \lambda \in I\!N,$$

converge a C. Además, como la frontera de C_λ es

$$Fr(C_\lambda) = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{\lambda^2}\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2 + \lambda\},$$

se cumple la condición de que una parte de ella (la que corresponde al círculo centrado en $(0,0)$ y radio $\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}$) tiene la misma forma que la intersección $Fr(B) \cap Fr(C)$.

3) $C = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$ y $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$.

En este caso, el conjunto C es no acotado y su frontera es la unión de dos semi-rectas,

$$Fr(C) = \{(x,1) : x \geq 1\} \cup \{(1,y) : y \geq 1\},$$

y como el conjunto B, formado por los puntos de discontinuidad de f, es igual a la unión de los ejes coordenados, se tiene que $Fr(B) \cap Fr(C) = \phi$. Por lo tanto, la elección de una familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C debe hacerse de modo que la frontera de C_λ tenga la forma de una parte de la frontera de C (en este caso, de una parte estricta ya que la frontera de C es no acotada y los C_λ son, por definición, acotados). Una familia $\{C_\lambda\}$ que converge a C y que satisface esto último, es la familia definida por

$$C_\lambda = \{(x,y) : 1 \leq x \leq \lambda, \;\; 1 \leq y \leq \lambda\}, \text{ para } \lambda \in I\!N.$$

En cada uno de los casos considerados en el ejemplo anterior se usó a $I\!N$ como conjunto de índices para cada una de las familias $\{C_\lambda\}$. Evidentemente, esto no quita generalidad al estudio de dichos casos, ya que bastaría usar el intervalo $(\lambda_0, +\infty)$ con $\lambda_0 \geq 2$, como conjunto de índices en lugar de $I\!N$, manteniendo los mismos resultados. Más aún, si el conjunto de índices L es un subconjunto acotado de $(0, +\infty)$, es posible redefinir la familia $\{C_r : r \in L\}$, mediante un adecuado cambio de índices, de modo que el nuevo conjunto de índices sea de la forma $(\lambda_0, +\infty)$, para algún $\lambda_0 \geq 0$. Para ilustrar esto último, consideremos nuevamente el Ejemplo 5.8.2(1). Claramente, la familia $\{C_r : 0 < r < 1\}$ definida por $C_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 < r\}$ es una familia creciente de subconjuntos acotados de C que cumple la condición exigida en la Definición 5.8.1, y por lo tanto, se puede decir que converge a C (cuando $r \to 1$). Sin embargo, si se define λ por $\lambda = 2/(1-2r)$, entonces la familia $\{C_r : 0 < r < 1\}$ coincide con la familia $\{C_\lambda : \lambda \in (2, +\infty)\}$.

La argumentación anterior permite suponer, sin perder generalidad, que el conjunto de índices L de cualquier familia $\{C_\lambda\}$ que converge al conjunto C es igual al intervalo $(0, +\infty)$ ó a un subconjunto no acotado de dicho intervalo.

El objetivo de la Definición 5.8.1 es obtener, bajo ciertas condiciones, la integral de f sobre C (cuando existe), mediante los correspondientes valores de la integral de f sobre los conjuntos C_λ.

Definición 5.8.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $C \subset \mathbb{R}^n$ tales que

(1) f es no acotada en C o C es no acotado en $\mathbb{R}^n$.

(2) Para toda familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C, f es integrable Riemann sobre cada C_λ.

Se dice que f es *impropiamente integrable Riemann* sobre C ssi para cada familia $\{C_\lambda : \lambda \in L\}$ que cumple la condición (2), la función $g : L \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\lambda) = \int_{C_\lambda} f$$

admite límite *finito* en $+\infty$, y este límite es el mismo para todas las familias $\{C_\lambda\}$ que cumplen la condición (2).

El valor del límite se llama la *integral impropia* (según Riemann) de f sobre C, y se denota por

$$\int_C f = \lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f$$

En lo sucesivo se supone que toda familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C satisface la condición (2) de la definición anterior, i.e., f es integrable sobre cada C_λ.

En la definición anterior se exige que el valor de la integral impropia de f sobre C (cuando existe), debe ser independiente de las familias de conjuntos que convergen a C. Este requisito puede hacer impracticable, en diversos casos, el cálculo de la correspondiente integral. Sin embargo, existe una clase importante de funciones para las cuales basta calcular el límite correspondiente a una sola familia convergente al conjunto C. La clase en cuestión esta formada por las funciones escalares que toman valores de un solo signo en C.

Proposición 5.8.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función no negativa en un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que f es no acotada en C o C es no acotado en $\mathbb{R}^n$. Si $\{C_\lambda\}$ es una familia convergente a C para la cual

$$\lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f$$

existe y es finito, entonces f es impropiamente integrable sobre C, i.e.,

$$\lim_{\mu} \int_{D_\mu} f = \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f$$

para cualquier familia $\{D_\mu\}$ convergente a C.

Demostración. Sea $\{D_\mu : \mu \in M\}$ una familia convergente a C, distinta de la familia $\{C_\lambda : \lambda \in L\}$. Por la Definición 5.8.1, se tiene que C_λ y D_μ son subconjuntos acotados de C y que f es acotada en C_λ y D_μ, para todo $\lambda \in L$ y todo $\mu \in M$. Además, la Definición 5.8.1 aplicada a la familia $\{C_\lambda\}$ establece que para cada $\mu \in M$ existe $\lambda \in L$ tal que $D_\mu \subset C_\lambda$, y como f es integrable en cada C_λ y cada D_μ, la hipótesis $f \geq 0$ en C y la Proposición 5.4.5(6) implican que

$$\int_{D_\mu} f \leq \int_{C_\lambda} f,$$

y como las hipótesis para f y $\{C_\lambda\}$ también implican

$$\int_{C_\lambda} f \leq \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f,$$

de estas dos desigualdades sigue que

$$\int_{D_\mu} f \leq \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f$$

para todo $\mu \in M$.

Además, como $f \geq 0$ en C y $\{D_\mu\}$ converge a C, la función $g : M \to I\!\!R$ definida por

$$g(\mu) = \int_{D_\mu} f$$

es creciente en M, y por la desigualdad anterior es acotada superiormente, lo que asegura la existencia del

$$\lim_{\mu \to \infty} g(\mu) = \lim_{\mu} \int_{D_\mu} f,$$

y esto implica que

$$\lim_{\mu} \int_{D_\mu} f \leq \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f.$$

Aplicando el argumento anterior a la familia $\{D_\mu\}$ en lugar de la familia $\{C_\lambda\}$ se tiene que

$$\lim_{\lambda} \int\limits_{C_\lambda} f \leq \lim_{\mu} \int\limits_{D_\mu} f,$$

y de estas dos últimas desigualdades sigue la igualdad

$$\lim_{\mu} \int\limits_{D_\mu} f = \lim_{\lambda} \int\limits_{C_\lambda} f,$$

completando la demostración. ■

En los siguientes ejemplos se ilustra este resultado.

Ejemplo 5.8.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^p}.$$

Determinar valores de p para los cuales existe la integral impropia de f sobre el conjunto $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Solución. En primer lugar nótese que f es positiva en C, para cualquier valor de p en $\mathbb{R}$. Además f es no acotada en C si $p > 0$, y es acotada si $p \leq 0$.

El caso $p \leq 0$ implica que f es integrable Riemann sobre C, ya que C es acotado y

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{-p}$$

es continua en C, para todo $p \leq 0$, y por lo tanto, en este caso no se puede aplicar la noción de la integral impropia ya que f es acotada en C y C es acotado en $\mathbb{R}^n$, i.e., se puede decir que f no es impropiamente integrable sobre C porque f y C no cumplen las condiciones que exige la definición de la integral impropia.

Consideremos el caso $p > 0$. Para este caso, la función f es no acotada en C (recordar que la noción de la integral de Reimann exige que la función en estudio sea acotada sobre un conjunto acotado). Por lo tanto, tiene sentido determinar para que valores de $p > 0$ se cumple la Proposición 5.8.1. Para esto, se elige una familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C de modo que la "forma" de los C_λ sea similar a la del conjunto C tal como se ilustró en el Ejemplo 5.8.2(1), i.e., $C_\lambda = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{\lambda}\}$, para $\lambda \geq \frac{1}{2}$, y el conjunto de índices L es el intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

Para aplicar la Proposición 5.8.1 se tiene que calcular (si existe) el $\lim_{\infty} g(\lambda)$, donde $g : L \to I\!R$ es la función definida por

$$g(\lambda) = \int_{C_\lambda} f = \int\int_{C_\lambda} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^p} dxdy.$$

Para calcular esta integral aplicamos la fórmula del cambio de variables (Proposición 5.7.6), usando coordenadas polares, lo que implica

$$\int\int_{C_\lambda} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^p} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\lambda)} \frac{r}{(1-r^2)^p} drd\theta, \text{ donde } r(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda},$$

y mediante un cálculo directo de la integral iterada con respecto a r y θ, se tiene que

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\pi \ell n(1-r^2)/_0^{r(\lambda)}, & \text{si } p = 1 \\ -\frac{\pi}{1-p}(1-r^2)^{1-p}/_0^{r(\lambda)}, & \text{si } p \neq 1, \end{cases}$$

y por lo tanto, la función g queda definida por

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\pi \ell n(\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}), & \text{si } p = 1 \\ -\frac{\pi}{1-p}[(\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2})^{1-p} - 1], & \text{si } p \neq 1, \end{cases}$$

y como $\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} > 0$ para $\lambda \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, resulta que

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p \geq 1, \\ \frac{\pi}{1-p}, & \text{si } 0 < p < 1, \end{cases}$$

y este resultado, por la Definición 5.8.2, implica que la función f es impropiamente integrable sobre C para $0 < p < 1$, y que la integral impropia de f sobre C es

$$\int\int_C \frac{1}{(1-x^2-y^2)^p} dxdy = \frac{\pi}{1-p}, \text{ para } 0 < p < 1.$$

Ejemplo 5.8.4. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{x^p y^p},$$

y sea $C = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$.

Determinar para que valores de p, la función f es impropiamente integrable sobre C.

Solución. En primer lugar, nótese que la noción de la integral de Riemann de f sobre C no se puede aplicar en este caso ya que el conjunto C es no acotado en $\mathbb{R}^2$.

Además, es claro que f es continua en $\mathbb{R}^2$ para $p \leq 0$ (en realidad, es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ para $p \leq 0$) y es discontinua para $p > 0$ (los ejes cartesianos forman el conjunto B de los puntos de discontinuidad de f los cuales son puntos de discontinuidad infinita). Sin embargo, esto último no tiene relevancia en este problema ya que $Fr(C) \cap Fr(B) = \phi$. Más aún, si $p < 0, f$ es no acotada en C, y para $p \geq 0$ f es acotada en C (ya que $x \geq 1$ e $y \geq 1$ implican que $0 < f(x,y) \leq 1$, si $p \geq 0$).

Como $f > 0$ en C, es posible aplicar la Proposición 5.8.1 para determinar si f es impropiamente integrable sobre C. Para esto se debe elegir una familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C de modo que la frontera de los C_λ (o parte de ella) tenga la misma forma de la frontera de C. Una familia $\{C_\lambda\}$ que cumple lo anterior es la del Ejemplo 5.8.2(3), i.e., $C_\lambda = \{(x,y) : 1 \leq x \leq \lambda, 1 \leq y \leq \lambda\}$, para $\lambda \in \mathbb{N}$ (el conjunto L de índices es $L = \mathbb{N}$). Para esta familia $\{C_\lambda\}$, la función $g : L \to \mathbb{R}$ queda definida por

$$g(\lambda) = \int\int_{C_\lambda} f(x,y)dxdy = \int_1^\lambda \int_1^\lambda \frac{1}{x^p y^p} dxdy,$$

y el valor de esta integral iterada se obtiene directamente al aplicar el teorema de Fubini (Proposición 5.5.1), con lo cual resulta que

$$g(\lambda) = \begin{cases} [\ell n(\lambda - 1)]^2, & \text{si } p = 1, \\ \left[\frac{\lambda^{1-p}-1}{1-p}\right]^2, & \text{si } p \neq 1, \end{cases}$$

y esto implica que

$$\lim_{\infty} g(\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \leq 1 \\ \frac{1}{(p-1)^2}, & \text{si } p > 1, \end{cases}$$

y por la Definición 5.8.2, se concluye que f es impropiamente integrable sobre C para $p > 1$, y que la integral impropia de f sobre C es igual a

$$\int\int_C \frac{1}{x^p y^p} dxdy = \frac{1}{(p-1)^2}, \text{ para todo } p > 1.$$

El resultado de la Proposición 5.8.1 es válido para funciones que toman valores de un solo signo en el conjunto C. Un problema obvio que aparece en este punto es determinar bajo que condiciones una función que toma valores positivos y negativos en un conjunto C, es impropiamente integrable sobre C. En la siguiente proposición se da una respuesta a este problema mediante un test de comparación.

Proposición 5.8.2. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones y $C \subset \mathbb{R}^n$ tales que ambas funciones tienen el mismo conjunto de puntos de discontinuidad infinita relativo al conjunto C (i.e., $\bar{B}_f \cap \bar{C} = \bar{B}_g \cap \bar{C}$). Si $|f| \leq g$ en C y si g es impropiamente integrable sobre C, entonces f es impropiamente integrable sobre C.

Demostración. Sea $\{C_\lambda : \lambda \in L\}$ una familia convergente al conjunto C que satisface la Definición 5.8.1 para las funciones f y g.

La hipótesis $|f| \leq g$ y la desigualdad $f \leq |f|$ implican que $f + |f| \leq 2|f| \leq 2g$, y como f y g son integrables Riemann sobre cada C_λ, estas desigualdades junto con la Proposición 5.4.5 y la Definición 5.8.1 implican

$$\int_{C_\lambda} f + |f| \leq 2 \int_{C_\lambda} |f| \leq 2 \int_{C_\lambda} g \leq 2 \int_{C} g.$$

Además, como $f + |f| \geq 0$, la función $h : L \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(\lambda) = \int_{C_\lambda} (f + |f|)$$

es creciente y acotada superiormente por el número igual a $2 \int_C g$, y por lo tanto, existe

$$\lim_{h \to \infty} h(\lambda) = \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} (f + |f|).$$

Un argumento similar permite deducir que también existe el siguiente límite,

$$\lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} |f|,$$

y por lo tanto, si ℓ' y ℓ'' denotan a estos límites, la proposición anterior asegura que ℓ' y ℓ'' son las integrales impropias de $f + |f|$ y $|f|$ sobre C, respectivamente, y como

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f &= \lim_{\lambda} \Big(\int_{C_\lambda} (f + |f|) - \int_{C_\lambda} |f| \Big) \\ &= \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} (f + |f|) - \lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} |f|,\end{aligned}$$

resulta que

$$\int\limits_C f = \lim_{\lambda} \int\limits_{C_\lambda} f = \ell' - \ell'',$$

lo que completa la demostración, ya que la argumentación anterior es válida para toda familia convergente a C. ■

Ejemplo 5.8.5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Determine si f es impropiamente integrable sobre $C = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1, y \geq 0\}$.

Solución. Claramente $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in C$ tal que $x \geq 0$ y $f(x,y) < 0$ para $(x,y) \in C$ con $x > 0$, y como $|x| < 1$ para todo $(x,y) \in C$, se cumple que

$$|f(x,y)| < \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \text{ para } (x,y) \in C.$$

Además, la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

satisface las condiciones exigidas en la proposición anterior, ya que

- f y g tiene los mismos puntos de discontinudad infinita relativos a $C(B_f = B_g = B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ y $\bar{C} \cap B_f = \bar{C} \cap B_g = B)$.
- $|f(x,y)| < g(x,y)$, para todo $(x,y) \in C$, y
- g es impropiamente integrable sobre C (por el Ejemplo 5.8.3, para $p = 1/2$),

y estas condiciones, por la Proposición 5.8.2, aseguran que f es impropiamente integrable sobre C.

El valor de la integral impropia de f sobre C puede ser obtenido siguiendo un argumento similar al que se desarrolla en el Ejemplo 5.8.3, i.e., se aplica la fórmula del cambio de variables usando coordenadas polares para calcular la integral de f sobre C_λ, donde $C_\lambda = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1 - \frac{1}{\lambda}, y \geq 0\}$, para $\lambda \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, define una familia convergente a C. Si $r(\lambda) = (\lambda - 1)/\lambda$, la fórmula implica

$$\int\int\limits_{C_\lambda} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{r(\lambda)} \frac{r^2 cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta = 0,$$

y por lo tanto, la integral impropia de f sobre C es igual a 0.

En resumen, los resultados anteriores permiten determinar la existencia de la integral impropia para:

- funciones que tienen un solo signo en el conjunto de integración (se aplica la Proposición 5.8.1),
- funciones acotadas superiormente (en el conjunto de integración) por funciones no-negativas que satisfacen la Proposición 5.8.1 (se aplica la Proposición 5.8.2).

Evidentemente, si la función en estudio no corresponde a ninguna de las anteriores, entonces el problema de la existencia de la integral impropia de tal función puede ser abordado solo parcialmente, en el sentido que el cálculo (si existe) del

$$\lim_{\lambda} \int_{C_\lambda} f$$

se puede efectuar para algunas familias $\{C_\lambda\}$ que convergen a C, y obviamente, no para *todas*. Si dicho límite existe para una determinada familia $\{C_\lambda\}$, se dice que f es *condicionalmente integrable* sobre C, o que la integral de f sobre C *converge condicionalmente*. En particular, la familia $\{C_\lambda\}$ es elegida de modo de aprovechar algún tipo de simetría que tengan los valores que toma f con respecto a un punto o un conjunto de puntos, y el correspondiente límite (definido más arriba) cuando existe, se llama un *valor principal* de la integral de f sobre C.

Terminamos esta última sección, con un ejemplo que ilustra las nociones mencionadas anteriormente.

Ejemplo 5.8.6. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{xy},$$

y sea $C = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Determine la integrabilidad de f sobre C.

Solución. Claramente, el conjunto B de los puntos de discontinuidad infinita de f en C es igual a la unión de los ejes cartesianos, y se tiene que $B \cap C = \{(0,y) : 1 \leq y \leq 2\}$. Además, $f(x,y) = -f(-x,y)$, para todo (x,y) en $C - B$ tal que $0 < x \leq 1$, y por lo tanto, los valores de f cumplen una cierta simetría con respecto al segmento lineal $B \cap C$.

Para estudiar la integrabilidad de f sobre C (la que no puede ser abordada por las Proposiciones 5.8.1 y 5.8.2), se considera una familia $\{C_\lambda\}$ convergente a C que use el tipo de simetría señalada más arriba. Una familia $\{C_\lambda\}$ que satisface estas condiciones queda definida por $C_\lambda = C_\lambda^+ \cup C_\lambda^-$, donde

$$C_\lambda^+ = \{(x,y) : \frac{1}{\lambda} \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\} \text{ y } C_\lambda^- = \{(x,y) : -1 \leq x \leq \frac{1}{\lambda}, 1 \leq y \leq 2\},$$

para $\lambda \in (2, +\infty)$. La definición de f y el Teorema de Fubini implican que

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{C_\lambda} f &= \int\limits_1^2 \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{xy} dxdy + \int\limits_1^2 \int\limits_{\frac{1}{\lambda}}^2 \frac{1}{xy} dxdy \\
&= \ell n(-x)/_{-1}^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \ell n y|_1^2 + \ell n(x)|_{\frac{1}{\lambda}}^2 \cdot \ell n y|_1^2 \\
&= (\ell n 2)^2,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$
\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{C_\lambda} f = (\ell n 2)^2,
$$

es una valor principal de la integral de f sobre C (la cual converge condicionalmente con respecto a tal familia $\{C_\lambda\}$).

Consideremos ahora la familia $\{C_\lambda\}$ definida por $C_\lambda = C'_\lambda \cup C''_\lambda$, donde $C'_\lambda = C^-_\lambda$ y $C''_\lambda = \{(x, y) : \frac{1}{\lambda^2} \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Para esta familia, la integral de f sobre C_λ resulta ser

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{C_\lambda} f &= \int\limits_1^2 \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{xy} dxdy + \int\limits_1^2 \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^2 \frac{1}{xy} dxdy \\
&= \ell n(-x)/_{-1}^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \ell n y/_1^2 + \ell n(x)/_{\frac{1}{\lambda^2}}^2 \cdot \ell n y/_1^2 \\
&= -\ell n \lambda \cdot \ell n 2 + (\ell n 2 + 2\ell n \lambda) \cdot \ell n 2 \\
&= \ell n 2(\ell n 2 + \ell n \lambda),
\end{aligned}
$$

y esto implica que

$$
\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{C_\lambda} f = +\infty,
$$

y por lo tanto, la integral de f sobre C no converge condicionalmente para esta familia $\{C_\lambda\}$. Más aún, por la Definición 5.8.2, se concluye que f no es impropiamente integrable sobre C.

Problemas Resueltos

Problema 1.

Sea $C \subset I\!R^n$ un conjunto acotado de medida cero, y $A \subset I\!R^n$ un rectángulo que contiene a C tal que $\int\limits_A \mathbb{1}_C$ existe. Entonces $\int\limits_A \mathbb{1}_C = 0$, i.e., $v(C) = 0$.

Solución. Sea I el valor de la integral de la función $\mathbb{1}_C$ sobre A. Las Definiciones 5.1.6 y 5.1.7 establecen que

$$L(\mathbb{1}_C, \mathcal{P}) \leq I \leq U(f, \mathcal{P})$$

para cualquier partición $\mathcal{P}$ de A, y como $\mathbb{1}_C \geq 0$ en A, la Definición 5.1.5 implica que $L(\mathbb{1}_C, \mathcal{P}) \geq 0$, y por lo tanto, basta probar que $L(\mathbb{1}_C, \mathcal{P}) = 0$, para toda partición $\mathcal{P}$ de A.

Sea $\mathcal{P}$ una partición de A. Para todo subrectangulo S determinado por $\mathcal{P}$ se cumple que $m_S(\mathbb{1}_C) = \inf\{\mathbb{1}_C(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\} = 0$.

En efecto, si $S \cap C = \phi$, entonces $\mathbb{1}_C(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in S$, y esto implica que $m_S(\mathbb{1}_C) = 0$. Si $S \cap C \neq \phi$, entonces $Int(S \cap C) \neq \phi$, ya que en caso contrario, el conjunto $S \cap C$ contiene un rectángulo no-degenerado y como $S \cap C \subset C$, el conjunto C no sería de medida cero (Corolario 5.3.5), lo que contradice la hipótesis de C, y por lo tanto, si $S \cap C \neq \phi$ también se cumple que $m_S(\mathbb{1}_C) = 0$, y de la Definición 5.1.5 sigue que $L(\mathbb{1}_C, \mathcal{P}) = \Sigma m_S(\mathbb{1}_C) \cdot v(S) = 0$, lo que demuestra que $I = 0$.

Nótese que la hipótesis de que C es acotado se usa en el mismo enunciado del problema (C está contenido en un rectángulo A).

Problema 2.

Sean C_1 y C_2 los subconjuntos de $I\!R^3$ definidos por $C_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1\}$ y $C_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcular el volumen de $C = C_1 \cap C_2$.

Solución. El conjunto C es la intersección de los cilindros sólidos C_1 y C_2, cuyos ejes de simetria corresponden a los ejes Y y X, respectivamente (el origen $(0, 0, 0)$ es el "centro" del conjunto C). Por la Definición 5.4.3, el volumen de C es

$$v(C) = \int\limits_C 1,$$

y esta integral se puede calcular mediante cualquiera de las correspondientes integrales iteradas (dicha integral existe porque en el enunciado del problema se asume que el volumen de C existe, i.e., se asume que C es medible Jordan).

Por el Teorema de Fubini, la integral iterada en el orden $dxdydz$ resulta ser igual a:

$$\int\int_C\int dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} dxdydz = \int_{-1}^{1} 4a^2 dydz,$$

donde $a = \sqrt{1 - z^2}$, ya que para un valor fijo de $z \in [-1, 1]$, la intersección del conjunto C con el plano que pasa por el punto $(0, 0, z)$ y que es paralelo al plano (X, Y), es igual al conjunto $\{(x, y, z) : x^2 \leq 1 - z^2, y^2 \leq 1 - z^2\}$, con z fijo, y por lo tanto,

$$v(C) = 4\int_{-1}^{1}(1 - z^2)dz = \frac{16}{3}.$$

Para una mayor ilustración del cálculo de integrales iteradas, calculemos el volumen de C mediante la integral iterada en el orden $dzdydx$.

Para $x \in [-1, 1]$ fijo, se determina la intersección de C con el plano P_x que pasa por el punto $(x, 0, 0)$ y que es paralelo al plano (Z, Y). El conjunto resultante es

$$C_x = \{(x, y, z) : z^2 \leq 1 - x^2, y^2 + z^2 \leq 1\},$$

y por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$v(C) = \int\int_C\int dxdydz = \int_{-1}^{1}(\int\int_{C_x} dzdy)dx$$

y la simetría de C con respecto al origen, implica que

$$v(C) = 8\int_{0}^{1}(\int\int_{C_x^+} dzdy)dx$$

donde $C_x^+ = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}, y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$, para $x \in [0, 1]$ fijo, i.e., C_x^+ es la parte de C_x contenida en el primer cuadrante del plano P_x. La siguiente figura (achurada) ilustra el conjunto $C_x^+, x \in [0, 1]$ fijo.

y la integral iterada sobre C_x^+ en el orden $dzdy$ es

$$\begin{aligned}\int\int_{C_x^+} dzdy &= \int_0^x \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\Big)dy + \int_x^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\Big)dy \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsen 1 - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsen x,\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}v(C) &= 8\int_0^1 \Big(\int\int_{C_x^+} dzdy\Big)dx \\ &= 4\int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} + arcsen 1 - arcsen x)dx \\ &= 4[\frac{1}{3} + arcsen 1 - arcsen 1 + 1] \\ &= \frac{16}{3},\end{aligned}$$

lo que comprueba el resultado obtenido anteriormente con la integral iterada sobre C en el orden $dxdydz$.

En el siguente problema se considera otra aplicación del Teorema de Fubini. El resultado en cuestión se conoce como la *regla de Leibnitz*, que permite el intercambio de las operaciones de derivación e integración.

Problema 3.

Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en el rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$. Entonces se cumple que

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Solución. La hipótesis de la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$, implica que la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ es integrable sobre R (Proposición 5.2.1). En particular, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es integrable sobre $R_y = [a, b] \times [c, y]$, para todo $y \in [c, d]$, y el Teorema de Fubini aplicado a $\frac{\partial f}{\partial y}$ y R_y establece que, para cada $v \in [c, y]$, la función $G : [c, y] \to I\!R$ definida por

$$G(v) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)dx,$$

es integrable sobre $[c, y]$, y

$$\int_c^y G(v)du = \int_c^y \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)dxdv = \int_a^b \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)dvdx.$$

Además, si H denota una primitiva de G, i.e., $H'(v) = G(v)$, el Teorema Fundamental de Cálculo implica que

$$\int_c^y G(v)dv = H(y) - H(c) \quad \text{y} \quad \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)dv = f(x, y) - f(x, c),$$

y al reemplazar estas igualdades en las anteriores, resulta que

$$H(y) - H(c) = \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, c)dx,$$

y al derivar esta última igualdad con respecto a y se tiene que

$$H'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx,$$

y como $H'(y) = G(y)$, la definición de la función G implica la igualdad

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx,$$

completando la demostración de la regla de Leibniz.

En el siguiente problema se hace uso de la fórmula del cambio de variables para el cálculo del volumen de una cierta región acotada en $I\!R^3$

Problema 4.

Un *toro* con eje de simetría igual al eje Z, es el conjunto que se obtiene al rotar (en torno a este eje) un disco de radio $a > 0$ perpendicular al plano (X,Y), cuyo centro está a una distancia $b > a$ del eje Z, tal como lo indica la siguiente figura.

Calcule el volumen del toro.

Solución. En primer lugar nótese que un punto (x,y,z) pertenece al toro ssi

$$x = (b + rcos\theta)cos\phi; \quad y = (b + rcos\theta)sen\phi; \quad z = rsen\theta,$$

donde r denota la distancia del punto (x,y,z) al centro del círculo de radio a que se rota en torno al eje Z, ϕ es el ángulo que forma el eje X con la recta L (contenida en el plano (X,Y)) que une el origen $(0,0,0)$ con el centro de dicho círculo, y θ es el ángulo formado por la recta L y la recta que une el centro del círculo de radio a y el punto (x,y,z). El centro de tal círculo es el punto $(bcos\phi, bsen\phi, 0)$, y las variaciones para r, θ y ϕ son:

$0 < r \leq a$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$, i.e., si $T : \mathcal{U}^3 \to I\!R^3$ es la función definida por $T(r, \theta\phi) = (x, y, z)$, donde x, y y z son las coordenadas del punto del toro definidas más arriba, entonces, $T([0,a] \times [0,2\pi) \times [0,2\pi))$ es igual al toro definido en el enunciado del problema. Si C denota al toro, entonces la fórmula del cambio de variables (Proposición 5.7.6) implica

$$v(C) = \int\int_R\int |detT'| dr d\theta d\phi$$

donde $R = (0,a] \times [0,2\pi) \times [0,2\pi)$ y $|detT'| = r(b + rcos\theta)$ (comprobar esta igualdad), y por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned} v(C) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r(b + rcos\theta) dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (b \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} cos\theta) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 b}{2} \cdot 2\pi d\phi \\ &= 2\pi^2 a^2 b, \end{aligned}$$

y por lo tanto, el volumen del toro es igual a $2\pi^2 a^2 b$.

En el siguiente problema se ilustra la aplicación que tiene la integral múltiple (específicamente, los teoremas de Fubini y el de cambio de variables), para el cálculo de algunos conceptos físicos asociados a conjuntos sólidos, tales como la masa, centro de masa, y momentos de inercia.

Problema 5.

Un conjunto acotado $S \subset I\!R^n$ se dice ser un *sólido* si S es medible Jordan y $v(S) > 0$. Si $\rho : I\!R^n \to I\!R$ es una función no-negativa e integrable sobre S que representa una *densidad de masa* de S (masa por unidad de volumen), se define la *masa* M de S como la siguiente integral,

$$M = \int_S \rho(\mathbf{x}) dV,$$

y el *centro de masa* de S es el punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, cuya coordenada i-ésima es igual a

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \int_S x_i \rho(\mathbf{x}) dV.$$

Además, dado un punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, el *momento de inercia* de S con respecto a $\mathbf{c}$, es el número real $I(\mathbf{c})$ definido por

$$I(\mathbf{c}) = \int\limits_S \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 \rho(\mathbf{x}) dV,$$

donde $\| \cdot \|$ denota la norma $\| \cdot \|_2$.

Más aún, dada una recta $L \subset \mathbb{R}^n$, el momento de inercia de S con respecto a L, es el número real $I(L)$ definido por

$$I(L) = \int\limits_S d^2(\mathbf{x}, L) \rho(\mathbf{x}) dV,$$

donde $d(\mathbf{x}, L)$ denota la distancia (Euclideana) del punto $\mathbf{x} \in S$ a la recta L.

(i) Si S es una bola cuya densidad de masa es constante, demuestre que el centro de masa de S es igual al centro de S.

(ii) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un sólido y ρ su función de densidad de masa. Demuestre que el valor mínimo de $I(\mathbf{c})$ se obtiene cuando $\mathbf{c}$ es el centro de masa de S.

(iii) Calcule el momento de inercia de un cilindro recto S con respecto a su eje, sabiendo que su radio basal es a, su masa es M, y que la densidad de masa en cada uno de sus puntos es proporcional a la distancia de dicho punto al eje del cilindro.

Solución.

(i) Sea $S = \{(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < \delta^2\}$ una bola con centro (a, b, c) y radio δ. Si la densidad de masa de S es constante, i.e., $\rho(x, y, z) = k$, para todo $(x, y, z) \in S$, entonces la masa M de S es igual a

$$M = \iiint\limits_S k dx dy dz = k v(S),$$

y el centro de masa de S es el vector $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_S x \rho(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{v(S)} \iiint\limits_S x dx dy dz,$$

y similarmente para $\bar{y}$ y $\bar{z}$, i.e.,

$$\bar{y} = \frac{1}{v(S)} \iiint\limits_S y dx dy dz \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{1}{v(S)} \iiint\limits_S z dx dy dz.$$

Para demostrar que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (a, b, c)$, aplicamos la fórmula del cambio de variables para obtener $\bar{x}$ usando coordenadas esféricas. El conjunto S queda definido como sigue: $(x, y, z) \in S$ ssi $x = a + rcos\theta sen\phi$; $\quad y = b + rsen\phi sen\phi$; y $z = c + rcos\phi$, para $(r, \theta, \phi) \in R = (0, \delta] \times [0, 2\pi) \times [0, \pi)$. El valor de $\bar{x}$ resulta ser

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{v(S)} \int\int_S\int xdxdydz \\
&= \frac{1}{v(S)} \int\int_R\int (a + rcos\theta sen\phi) \cdot r^2 sen\phi drd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{v(S)} [\int\int_R\int ar^2 sen\phi drd\theta d\phi + \int\int_S\int r^3 cos\theta sen^2\phi drd\theta d\phi],
\end{aligned}$$

y como

$$\int\int_R\int ar^2 sen\phi drd\theta d\phi = a\int\int_R\int r^2 sen\phi drd\theta d\phi = a \cdot v(S),$$

y, además, como por el teorema de Fubini se cumple que

$$\int\int_R\int ar^3 cos\theta sen^2\phi drd\theta d\phi = \int_0^\pi sen\phi d\phi \cdot \int_0^{2\pi} cos\theta d\theta \cdot \int_0^a r^3 dr = 0,$$

se concluye que $\bar{x} = a$.

Un argumento similar aplicado a $\bar{y}$ y $\bar{z}$ implica que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (a, b, c)$.

(ii) La definición de $I(\mathbf{c})$ establece que

$$I(\mathbf{c}) = \int_S \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 \rho(\mathbf{x}) dV,$$

y como $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{c}} + \|\mathbf{c}\|^2$ (donde $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \sum x_i c_i$), resulta que

$$I(\mathbf{c}) = \int_S \|\mathbf{x}\|^2 \rho(\mathbf{x}) dV - 2\Sigma c_i \int_S x_i \rho(\mathbf{x}) dV + \|\mathbf{c}\|^2 \int_S \rho(\mathbf{x}) dV,$$

y esta igualdad junto con las definiciones de la masa M de S y el centro de masa $\bar{\mathbf{x}}$ de S, implican que

$$I(\mathbf{c}) = I(\mathbf{0}) - 2M\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{x}} + M\|\mathbf{c}\|^2,$$

y usando nuevamente la igualdad: $\|\mathbf{c} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2 - 2\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \|\bar{\mathbf{x}}\|^2$, resulta que

$$I(\mathbf{c}) = I(\mathbf{0}) - M\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 + M\|\mathbf{c} - \bar{\mathbf{x}}\|^2,$$

y claramente, de esta igualdad sigue que el valor mínimo de $I(\mathbf{c})$ se obtiene cuando $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{x}}$, y en tal caso dicho valor mínimo es $I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{0}) - M\|\bar{\mathbf{x}}\|^2$.

(iii) En primer lugar, nótese que la altura h del cilindro S no es conocida. Sin embargo, se puede calcular fácilmente usando los datos del problema, para lo cual se supone que $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$.

En efecto, como la función de densidad de masa de un punto $(x, y, z) \in S$ es proporcional a la distancia de (x, y, z) al eje del cilindro S, i.e., al eje Z, tal función queda definida por $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, para una cierta constante $k > 0$, y por lo tanto, la masa M de S es igual a

$$M = \int\int_S\int k\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,$$

y el valor de esta integral se obtiene al aplicar la fórmula del cambio de variables usando coordenadas cilíndricas, lo que implica

$$M = k\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^a r \cdot rdrd\theta dz = \frac{2\pi}{3}ka^3h,$$

y de esta igualdad sigue que la altura h de S es

$$h = \frac{3M}{2\pi ka^3}.$$

Ahora, calculamos el momento de inercia de S con respecto al eje Z. Por definición $I(L_z)$ es igual a

$$\begin{aligned} I(L_z) &= \int\int_S\int d^2((x, y, z), L_z)\rho(x, y, z)dxdydz \\ &= \int\int_S\int (x^2 + y^2) \cdot k\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz, \end{aligned}$$

y usando nuevamente la fórmula del cambio de variables y las coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$\begin{aligned} I(L_z) &= k\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r \cdot rdrd\theta dz, \\ &= \frac{2\pi}{5}ka^5h, \end{aligned}$$

y reemplazando el valor de h obtenido más arriba, resulta que

$$I(L_z) = \frac{3}{5}a^2M.$$

Problemas Propuestos

1. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida en $R = [0,1] \times [0,1]$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable sobre R y que $\int\limits_R f = \frac{1}{2}$.

2. Sea $A_k = \{(x,y) : xy = \frac{1}{k}, 0 \le x < 1, 0 < y \le 1\}, k \in I\!N$, y sea $A = \cup A_k$. Se define una función $f : [0,1] \times [0,1] \to I\!R$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in A \\ 1 & \text{si } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable sobre $[0,1] \times [0,1]$ (usando la definición y mediante una propiedad equivalente que use la noción de conjunto de medida cero). Determine el valor de la integral de f sobre $[0,1] \times [0,1]$.

3. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función no-negativa en $C \subset D_f$. Se define el conjunto ordenado de f sobre C como el siguiente conjunto

$$C_0(f,C) = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) : 0 \le x_{n+1} \le f(\mathbf{x})\} \subset I\!R^{n+1}.$$

Si C es medible Jordan y f es continua en C, demuestre que $C_0(f,C)$ es medible Jordan en $I\!R^{n+1}$ y que $v(C_0(f,C)) = \int\limits_C f$. Interprete geométricamente los casos $n = 1$ y $n = 2$.

4. Sea $f_i : I\!R \to I\!R$ una función integrable sobre $[a_i, b_i]$, para cada $i = 1, ..., n$. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ la función definida en $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ por $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1)...f_n(x_n)$, donde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ y $x_i \in [a_i, b_i]$. Demuestre que f es integrable sobre R y que

$$\int\limits_R f = \int\limits_{a_1}^{b_1} f_1(t)dt \cdot \int\limits_{a_2}^{b_2} f_2(t)dt ... \int\limits_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt.$$

5. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ una función integrable sobre $[a,b] \times [a,b]$. Demuestre que

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^y f(u,v)dudv = \int\limits_a^b \int\limits_x^b f(u,v)dvdu.$$

6. Sea $R = \{(x,y) : 0 \le \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1\}$, donde $a > 0$ y $b > 0$, y sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ una función tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua en R. Demuestre que existe un punto (c,d) en el segmento lineal que une los puntos $(a,0)$ y $(b,0)$ tal que

$$\int\limits_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy = f(0,0) - f(a,0) + a\frac{\partial f}{\partial x}(c,d).$$

7. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ son continuas en un conjunto abierto $A \subset D_f$. Demuestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en A (aplique la regla de Leibnitz a la siguiente igualdad

$$f(x,y) - f(a,y) = \int\limits_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt.$$

8. Calcule el volumen de las regiones limitadas por las superficies definidas implícitamente por las ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = x + y$.

9. Idem que P8 para las superficies definidas por las ecuaciones $z = 0, x^2 + y^2 = 2x$ y $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Sea R la región acotada por las superficies definidas por las ecuaciones $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$. Calcule $\int\int\limits_R\int (x^2 + y^2)^2 dxdydz$.

11. Calcule el centro de masa del sólido acotado por dos semi-esferas concentricas de radios a y b, con $a < b$,
    (i) si la función de densidad de masa es constante.
    (ii) si la función de densidad de masa en cada punto del sólido es proporcional a la distancia de tal punto al centro de las semi-esferas.

12. Sea $R = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$. Calcule la siguiente integral

$$\int\limits_R\int \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

13. Sea $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ la función definida por $T(u,v) = (u, v(1 + u^2))$ y sea $R = \{(u,v) : 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\}$.
    a) Dibuje R y $T(R)$.

b) Calcule las áreas de R y $T(R)$, y compruebe que

$$\text{Area } (T(R)) \approx |detT'(u_0, v_0)| \cdot \text{ Area}(R),$$

para algún $(u_0, v_0) \in R$.

c) Compruebe la formula del cambio de variables para la función $f(x, y) = x$ y el conjunto R (defina $(x, y) = T(u, v)$).

14. Sea $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ell ny, x+y \geq 2, y \leq 3\}$. Dibuje R y determine los conjuntos L_x y L_y, donde $L_x = \{y : (x, y) \in R\}$ para x fijo y $L_y = \{x : (x, y) \in R\}$ para y fijo.

15. Sea $R = \{(x, y, z) : x + y + 2z \leq 2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Dibuje los conjuntos R_x, R_y R_z, donde $R_x = \{(x, y, z) \in R : x \text{ es fijo, }\}$. (i.e., R_x es la intersección de R con el plano paralelo al plano (Y, Z) y que pasa por el punto $(x, 0, 0)$. R_y y R_z se definen en forma similar).

16. Sea $I = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^{\sqrt{y}} dx)dy + \int\limits_1^2 (\int\limits_0^{2-y} dx)dy.$

a) Dibuje la región R sobre la cual se define I.

b) Calcule I y comprueba su resultado mediante la integral iterada en el orden $dydx$.

17. Obtenga las expresiones de las integrales iteradas en los órdenes: $dxdydz, dzdxdy$ y $dydzdx$, sobre la región R del problema P15.

18. Calcule (si existe) la siguiente integral,

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} sen(x^2 + y^2)dxdy.$$

19. Sea $B = \{(x, y) : ycotg\beta \leq x \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq asen\beta\}$, donde $a > 0$ y $\beta \in (0, \pi/2)$.

i) Determine gráficamente, el conjunto B.

ii) Demuestre que la integral impropia $\int\limits_B\int \ell n(x^2+y^2)dxdy$ converge a $a^2\beta(\ell na - \frac{1}{2})$.

20. a) Calcule $\int\limits_{-1}^{1} (\int\limits_0^{1-|x|} (\int\limits_0^{2x+y} dz)dy)dx.$

b) Obtenga las expresiones de las integrales iteradas sobre la región de integración de la parte (a) en los órdenes $dxdydz$ y $dydzdx$.