Problema 1

Sea $F : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y,z,w) = (x^3 - y^2 + z^2 + w^3, x^2y - y^3 - y - \frac{1}{2}z^3 - w^2 + 4)$. Sea también el pto de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tal que $F(a,b,c,d) = 0$ con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

1. Demuestre que (x,z) se pueden despejar en función de (y,w).
2. Calcule $\frac{\partial}{\partial y}x$ y $\frac{\partial}{\partial w}z$.
3. Chequee que el pto $(1,-1,2,1)$ satisface las condiciones del T.F.I.
4. Para la función G que da el T.F.I calcule, de manera aproximada el valor de $G(-1,02;0{,}98)$.

Solución:

Antes de empezar con la solución del problema recordemos el enunciado del T.F.I.

Teorema 1 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 tal que para un pto. $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $F(a,b) = 0$. Si escribimos*

$$F'(a,b) = \left[\begin{array}{cc} F'_x(a,b) & F'_y(a,b) \end{array} \right]$$

donde $F'_x(a,b)$ denota la matriz formada con las columnas del Jacobiano asociadas a x (respectivamente y) y $F'_y(a,b)$ es invertible entonces:

$\exists U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\exists W \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $(a,b) \in U$, $a \in W$ y $\forall x \in W$ $\exists! y \in \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in U$ donde $F(x,y) = 0$.

Esto define una función $G : W \mapsto \mathbb{R}^m$ de clase C^1 tal que

$$F(x, G(x)) = 0 \, \forall x \in W$$

En particular $G(a) = b$. Además $G'(x) = -[F'_y(x,G(x))]^{-1} F'_x(x,G(x))$ $\forall x \in W$.

1. Usemos el T.F.I. en el pto. (a,b,c,d). Debemos ver que

   (i) F de clase C^1.

(ii) $F(a,b,c,d)=0$.

(iii) $F'_{xz}(a,b,c,d)$ se invertible.

Acá $F'_{xz}(a,b,c,d)$ denota la matriz formada por las columnas asociadas a las variables x y z de la matriz Jacobiana asociada a F en (a,b,c,d), es decir las columnas asociadas a x y z de $F'(a,b,c,d)$.

(i) Es claro que F es de clase C^1 ya que las funciones componentes de F son de clase C^1. Por álgebra de funciones (composición de funciones contínuas es contínua) y observando que las funciones involucradas son polinomiales concluimos.

(ii) Se tiene por hipótesis.

(iii) Calculemos el Jacobiano de F:

$$F'(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y & 2z & 3w^2 \\ 2x^2y & (x^2-3y^2-1) & \frac{-3}{2}z^2 & -2w \end{pmatrix}$$

Ahora bien, tendrémos que

$$F'_{xz}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2z \\ 2x^2y & \frac{-3}{2}z^2 \end{pmatrix}$$

y evaluando en (a,b,c,d)

$$F'_{xz}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 3a^2 & 2c \\ 2a^2b & \frac{-3}{2}c^2 \end{pmatrix}$$

el cuál será invertible siempre que $0 \neq det(F'_{xz}(a,b,c,d)) = -\frac{9a^2c^2}{2} - 4a^2bc$ lo cual es cierto ya que $a,b,c>0$.

Así concluímos que podemos usar el T.F.I. en el pto. (a,b,c,d) y por lo tanto podemos despejar las variables (x,z) en función de (y,w).

2. Calculemos $F'_{xz}(a,b,c,d)^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\frac{-3}{2}c^2 & -2c \\ -2ab & 3a^2 \end{pmatrix} := A$ donde $D = det(F'_{xz}(a,b,c,d))$. El teorema nos da una función G que cumple con que

$$(x,z) = G(y,w) = (G_1(y,w)G_2(y,w))$$

por lo que $x = G_1(y,w)$ y $z = G_2(y,w)$. Con esto y como

$$G'(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}G_1 & \frac{\partial}{\partial w}G1 \\ \frac{\partial}{\partial y}G_2 & \frac{\partial}{\partial w}G2 \end{pmatrix}$$

entonces, por T.F.I.

$$\frac{\partial}{\partial y}x = \frac{\partial}{\partial y}G_1 \text{ y } \frac{\partial}{\partial w}z = \frac{\partial}{\partial w}G_2$$

.

Sea $B = F'_{yw}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} -2b & 3d^2 \\ (a^2-3b^2-1) & -2d \end{pmatrix}$. Así

$$\frac{\partial}{\partial y}x = A_1.B_{.1} = \frac{3bc^2}{D} + \frac{2c(3b^2+1)}{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}z = A_2.B_{.2}$$

3. Propuesto. Sólo deben recordar que una aproximación de primer orden de la función G puede ser

$$G(x) \approx G(x_0) + G'(x_0)(x-x_0) \text{ para puntos cercanos a } x_0$$