Guía N°3 Cálculo en Varias Variables MA22A
Profesor: Pierre Guiraud

Auxiliar: Raúl Aliaga Díaz
Ayudantes: Dušan Juretić, Matías Reeves

1. Calcular
$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 y e^{x^3} dx dy$$

2. Calcule la integral
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz$$

3. Indique, justificando muy brevemente, cuál de las siguientes funciones $F : Q \to \mathbb{R}$, $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ son integrables:
(i) $F(x, y) = y \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $F(x, y) = \sin y$ si $x = 0$.
(ii) $F(x, y) = |x| + |y|$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $F(0, 0) = 1$.
(iii) $F(x, y) = \frac{1}{x^4+y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $F(0, 0) = 1$.

4. Calcule el volumen de la región determinada por las siguientes desigualdades:
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 9 \\ y + 2z &\leq 6 \\ y - 2z &\leq 6 \\ y &\leq 0 \end{aligned}$$

5. Considere dos esferas de radio r de modo que sus centros estén separados por una distancia $d < 2r$. Calcule el volumen de la región encerrada por ambas esferas.

6. Calcular
$$\int_D x dx dy$$
donde D es la región encerrada por las curvas
$$\begin{aligned} x &= -y^2 \\ x &= 2y - y^2 \\ x &= 2 - 2y - y^2 \end{aligned}$$

7. Calcule la integral
$$\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1 + y^4}\, x^2 dy dx$$

8. (i) Calcular

$$\int_C \log(x^2+y^2)dxdy$$

donde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2, \quad x,y \geq 0\}$

(ii) Calcular el volumen de E, donde E es una esfera que cumple $x^2+y^2+z^2=a^2$

9. Considere el sólido Y de $\mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades siguientes

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad x^2+y^2 \geq 1$$

Este sólido tiene densidad variable igual a

$$\rho(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Calcule la masa del sólido.

10. Probar que el volumen del sólido limitado por los tres planos de coordenadas en $\mathbb{R}^3$ y el plano tangente a la superficie $xyz = a$ $(a > 0)$, en un punto cualquiera de ella es constante.

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$ una función continua. Si bien esta función no está definida en el origen uno podría intentar definir la integral de f sobre la bola unitaria B por un proceso de límite. Haciendo una analogía con el caso de una variable la idea será definir

$$\int_B f = \int_{B \backslash B(0,\epsilon)} f$$

donde $B(0,\epsilon)$ es la bola de centro 0 y radio ϵ. Supongamos que existen constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ y $C > 0$ tales que

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

¿Para qué valores de α tiene sentido la definición de arriba?

12. Sean f y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotadas e integrables en $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que:
(i) $f \cdot g$ es integrable.
(ii) Si $f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in R$, con $\alpha > 0 \Longrightarrow \frac{1}{f}$ es integrable.
(iii) Usando la parte (i) y $\int_R (f+\lambda g)^2$ muestre que

$$\int_R f \cdot g \leq \left(\int_R f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_R g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Concluya que, si $Vol(R) = 1$,

$$\int\limits_R f \geq \frac{1}{\int_R \frac{1}{f}}$$

13. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, y T una función definida por:

$$T(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)$$

(i) Dibuje Ω. Encuentre y dibuje D tal que $T(D) = \Omega$.
(ii)Calcule

$$\int\limits_\Omega \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dA$$

14. (i) Dibuje la región definida por

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / vu \geq 1, uv \leq 2, u \leq 2, v \leq u\}$$

(ii) Calcule

$$I = \int\limits_\Omega 8u^3 v du dv$$

15. Calcular

$$\int\limits_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} xyz dx dy dz$$

donde R es la región del primer octante acotada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

16. Demostrar que el volumen de R es $\frac{1}{n!}$, donde

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_1 < 1, \quad 0 \leq x_{i+1} \leq x_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$$