Tarea N°1 Cálculo en Varias Variables MA22A
Profesor: Pierre Guiraud
Auxiliar: Raúl Aliaga Díaz
Ayudantes: Dušan Juretić, Matías Reeves
Jueves 28 de Abril del 2005

Pregunta 1
Sean $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 y

$$u(x,y,z) = v(x,y,w) \qquad \text{donde } w = z - \varphi(x,y)$$

Suponga que φ satisface

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \Delta\varphi = 0$$

Pruebe que si $\Delta u = 0$, entonces se satisface:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Indicación: Recuerde que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Pregunta 2
a) Considere las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definidas como

$$f(x,y) = (\tan(x+y), 1+xy, e^{x^2+y}) \qquad g(u,v,w) = \sin(uv + \pi w)$$

Sea $h = g \circ f$. Encuentre el plano tangente al grafo de h en el punto $(0,0,0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y + e^{xy}, x - e^{xy})$
i) Comprobar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y hallar su matriz Jacobiana.
ii) Comprobar que $f \circ f$ es diferenciable y calcular su matriz Jacobiana.

Pregunta 3
a)Sea S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1\}$.
i) Encuentre los planos tangentes a S en $(0, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(0,1,0)$.
ii) Bosqueje la intersección de S con el plano $\{x = 0\}$ (es decir el plano $y - z$). En este bosquejo indique los puntos $(0, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0,1,0)$ y dibuje los vectores normales a S en esos puntos.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable, y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(\vec{x}) = g(\vec{x})\vec{x}$$

Demostrar que f es constante en el conjunto $S_r = \{\|\vec{x}\| = r\} \quad \forall r > 0$