CHAPITRE 11

Applications de l'intégrale multiple.

Ce chapitre sera très bref. Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités ou encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres cours. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, surtout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

Si une quantité de matière est contenue dans une région R de $\mathbf{R}^3$ et $\delta(x, y, z)$ est la densité par unité de volume au point (x, y, z), alors le centre de masse $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de celle-ci est défini au moyen d'intégrales. En physique, pour un système de n particules, alors la composante $\overline{x}$ de ce centre par rapport à l'axe des x est définie par l'équation

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

dans laquelle m_i est la masse et x_i est la coordonnée par rapport à l'axe des x de la position de la i-ième particule. On définit $\overline{y}$ et $\overline{z}$ de la même façon. Si la quantité de matière est distribuée continûment dans la région R et $\delta(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z), alors nous sommes amenés à définir son centre de masse $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ par

$$\overline{x} = \frac{\iiint_R x\,\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_R \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}, \quad \overline{y} = \frac{\iiint_R y\,\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_R \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz} \quad \text{et} \quad \overline{z} = \frac{\iiint_R z\,\delta(x, y, z)\,dxdydz}{\iiint_R \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Il est aussi possible dans la situation précédente de décrire le moment d'inertie par rapport à un axe. Nous nous limiterons à décrire ce moment par rapport à l'axe des z. En physique, le moment d'inertie d'un système de n particules par rapport à un axe de rotation est défini par l'équation

$$m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$$

dans laquelle m_i est la masse et r_i est la distance à l'axe donné de la i-ième particule. Si la quantité de matière est distribuée continûment dans la région R et $\delta(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z), alors le moment d'inertie I par rapport à l'axe des z comme axe de rotation sera

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ce moment d'inertie permet de décrire l'énergie cinétique d'un corps rigide qui tourne autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω comme $I\omega^2/2$.

Il y a une version 2-dimensionnelle du moment d'inertie. Si R est une région de $\mathbf{R}^2$ et $\delta(x, y)$ est la densité par unité d'aire au point (x, y). Alors son moment d'inertie par rapport à l'axe des x est $\iint_R y^2\,\delta(x, y)\,dx\,dy$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 11.1:

Soient la région R à l'intérieur du tétraèdre dans $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et la fonction de densité $\delta(x, y, z) = x + y + z$. Déterminer le centre de masse de cette région.

Exercice 11.2:

Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de $\mathbf{R}^3$ tels que $z \geq 0$, $(x^2 + y^2 + z^2) \leq 1$ et $3z^2 \geq (x^2 + y^2)$.

Exercice 11.3:

a) Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de $\mathbf{R}^3$ tels que $0 \leq z \leq H$, $(x^2 + y^2) \leq \mathrm{R}^2$.

b) Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de $\mathbf{R}^3$ tels que $-H/2 \leq y \leq H/2$, $(x^2 + z^2) \leq \mathrm{R}^2$.

Exercice 11.4:

Soient a et b, deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Considérons le tore T engendré par la rotation du cercle d'équation $(y - b)^2 + z^2 = a^2$ autour de l'axe des z. Calculer la masse $\iiint_T \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ de ce tore en sachant que la densité est constante sur les cercles contenus dans des plans parallèles au plan des x, y et dont les centres sont situés sur l'axe des z et qu'en un point A, elle est proportionnelle à la distance de A au centre du méridien qui porte A.