CHAPITRE 10

Jacobien, changement de coordonnées.

Dans ce chapitre, nous allons premièrement rappeler la définition du déterminant d'une matrice. Nous nous limiterons au cas des matrices d'ordre 2×2 et 3×3, bien que les résultats énoncés sont vrais dans un cadre plus général. Ensuite nous décrirons le changement de coordonnées pour l'intégrale double, triple et le cas général au moyen du jacobien lui-même défini comme un déterminant.

Etant donnée une matrice A carrée d'ordre $(n \times n)$, c'est-à-dire un tableau de n rangées et n colonnes dont les entrées sont des nombres réels:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

il est possible de lui associer un nombre réel appelé son déterminant et noté $|A|$ ou encore $\det(A)$. Dans ce qui suivra, nous définirons le déterminant de A pour les cas $n = 2, 3$. La définition générale est présentée dans un cours d'algèbre linéaire.

Si A est une matrice carrée d'ordre 2×2, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors son déterminant est $|A| = ad - bc$.

<u>Exemple 10.1</u>:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = (1)(4) - (2)(3) = -2 \quad \text{et} \quad \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = (2)(2) - (-1)(1) = 5.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3×3, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

alors son déterminant est $|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$. Noter qu'il existe un moyen mnémotechnique pour se rappeler cette formule. Il suffit de rajouter à la droite de A ses deux premières colonnes pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e\,. \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

On additionne les produits des éléments sur chacune des diagonales suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array} \qquad \text{on a} \qquad (aei + bfg + cdh)$$

et on soustrait les produits des éléments sur chacune des diagonales suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array} \qquad \text{on a} \qquad -(ceg + afh + bdi).$$

Exemple 10.2:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = ((1)(5)(9)+(2)(6)(7)+(3)(4)(8)) - ((3)(5)(7)+(1)(6)(8)+(2)(4)(9)) = 0 \qquad \text{et}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = ((2)(0)(0)+(3)(2)(3)+(1)(1)(1)) - ((1)(0)(3)+(2)(2)(1)+(3)(1)(0)) = 15.$$

Le déterminant d'une matrice a une relation avec les notions d'aire et de volume. Cette relation suggère un lien possible avec les intégrales multiples. Illustrons cette relation dans le cas des matrices d'ordre 2×2 et 3×3.

Proposition 10.1:
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice d'ordre 2×2. Alors la valeur absolue $|\det(A)|$ du déterminant de A est égale à l'aire du parallélogramme ayant (a,c) et (b,d) comme côtés dans $\mathbf{R}^2$. Voir la figure 10.1.
Preuve:Il est facile de démontrer ceci si nous nous rappelons que

$$\cos(\theta) = \frac{(a,c)\cdot(b,d)}{\|(a,c)\|\,\|(b,d)\|} = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}\,\sqrt{b^2+d^2}}.$$

Car alors

$$\begin{aligned}
\text{aire du parallélogramme} &= \sqrt{a^2+c^2}\,\sqrt{b^2+d^2}|\sin(\theta)| = \sqrt{a^2+c^2}\,\sqrt{b^2+d^2}\,\sqrt{1-\cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{a^2+c^2}\,\sqrt{b^2+d^2}\,\sqrt{1-\frac{(ab+cd)^2}{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \\
&= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2} \\
&= \sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2+c^2d^2)-(a^2b^2+2abcd+c^2d^2)} \\
&= \sqrt{b^2c^2-2abcd+a^2d^2} = \sqrt{(ad-bc)^2} = |(ad-bc)| = |\det(A)|.
\end{aligned}$$

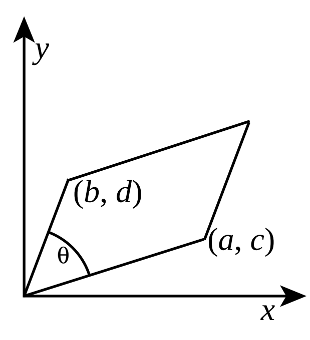

figure 10.1

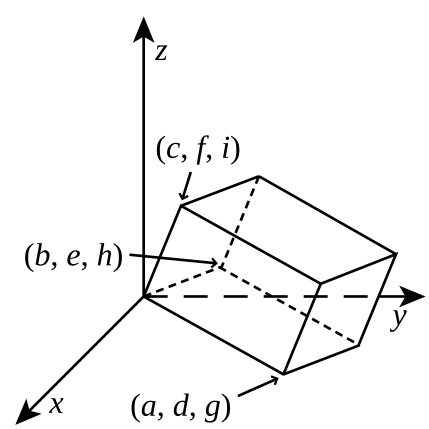

figure 10.2

Proposition 10.1':
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice d'ordre 3×3. Alors la valeur absolue $|\det(A)|$ du déterminant de A est égale au volume du parallélipipède ayant (a, d, g), (b, e, h) et (c, f, i) comme côtés dans $\mathbf{R}^3$. Voir la figure 10.2.

La preuve de ceci est tout à fait similaire à celle du cas des matrices d'ordre 2×2.

Exemple 10.3:
L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $(2, 1)$ et $(1, 3)$ sera

$$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = |(2)(3) - (1)(1)| = 5;$$

alors que le volume du parallélipipède dont les côtés sont $(2, -1, 0)$, $(1, 3, 2)$ et $(1, 2, 4)$ sera

$$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right| = |((2)(3)(4) + (1)(2)(0) + (1)(-1)(2)) - ((0)(3)(1) + (2)(2)(2) + (4)(-1)(1))| = 18.$$

Soit D, un domaine de $\mathbf{R}^n$. Une transformation de coordonnées (on dit aussi un changement de coordonnées) est une fonction

$$\begin{array}{cccc} G: & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

satisfaisant les trois conditions suivantes:
1) la dérivée partielle $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ existe et est continue en tout point de D pour tout entier $i, j, 1 \leq i, j \leq n$;
2) G est injective sur D, c'est-à-dire si $G(P) = G(P')$ pour $P, P' \in D$, alors $P = P'$;
3) le déterminant

$$\det\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_P & \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_P \\ \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_P & \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right|_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right|_P & \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_2}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right|_P \end{pmatrix} \neq 0$$

pour tout point $P \in D$.

Ce dernier déterminant sera noté dans la suite de ces notes

$$\left.\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_P$$

et est appelé le jacobien du changement de coordonnées au point P.

Exemple 10.4:
Considérons le domaine $D = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ et la fonction

$$\begin{array}{cccc} G: & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(r, \theta) \\ y(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \end{array}$$

Alors G est un changement de coordonnées.

Notons premièrement que les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta),$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \qquad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

existent et sont continues sur D.

Si $r\cos(\theta) = r'\cos(\theta')$ et $r\sin(\theta) = r'\sin(\theta')$, alors

$$r = \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \sqrt{(r'\cos(\theta'))^2 + (r'\sin(\theta'))^2} = r'$$

car $r, r' > 0$. De ceci nous obtenons $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. Nous pouvons maintenant conclure que $\theta = \theta'$ car $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$. Ainsi G est une fonction injective sur D.

Finalement le jacobien est

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \left|\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}\right| = r\cos^2(\theta) - (-r)\sin^2(\theta) = r \neq 0$$

car $r > 0$ sur D. De ce qui précède, nous pouvons donc affirmer que G est bien un changement de coordonnées. Ce changement est celui des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

<u>Exemple 10.5</u>:
Considérons le domaine $D = \{(r,\theta,z) \in \mathbf{R}^3 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z \in \mathbf{R}\}$ et la fonction

$$\begin{array}{rccc} G: & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^3. \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(r,\theta,z) \\ y(r,\theta,z) \\ z(r,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors G est un changement de coordonnées dont le jacobien est aussi r. La vérification de ceci est similaire à celle de l'exemple précédent. Ce changement est celui des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes.

<u>Exemple 10.6</u>:
Considérons le domaine $D = \{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$ et la fonction

$$\begin{array}{rccc} G: & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^3. \\ & \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(\rho,\theta,\varphi) \\ y(\rho,\theta,\varphi) \\ z(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors G est un changement de coordonnées. On note premièrement que les dérivées partielles

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \cos(\theta)\sin(\varphi), & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi), & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin(\theta)\sin(\varphi), & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi), & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \cos(\varphi), & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0, & \text{et} \quad \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho\sin(\varphi) \end{array}$$

existent et sont continues.

Si $\rho\sin(\varphi)\cos(\theta) = \rho'\sin(\varphi')\cos(\theta')$, $\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) = \rho'\sin(\varphi')\sin(\theta')$, et $\rho\cos(\varphi) = \rho'\cos(\varphi')$, alors

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(\rho\sin(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\varphi)\sin(\theta))^2 + (\rho\cos(\varphi))^2} \\ &= \sqrt{(\rho'\sin(\varphi')\cos(\theta'))^2 + (\rho'\sin(\varphi')\sin(\theta'))^2 + (\rho'\cos(\varphi'))^2} = \rho' \end{aligned}$$

car $\rho, \rho' > 0$. De ceci, nous obtenons $\sin(\varphi)\cos(\theta) = \sin(\varphi')\cos(\theta')$, $\sin(\varphi)\sin(\theta) = \sin(\varphi')\sin(\theta')$ et $\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$ après simplification par ρ. La dernière équation nous permet d'affirmer que $\varphi = \varphi'$ car $0 < \varphi, \varphi' < \pi$. Finalement de $\sin(\varphi)\cos(\theta) = \sin(\varphi)\cos(\theta')$, $\sin(\varphi)\sin(\theta) = \sin(\varphi)\sin(\theta')$, nous obtenons que $\cos(\theta) = \cos(\theta')$, $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ après simplification par $\sin(\varphi) > 0$ car $0 < \varphi < \pi$. De cette dernière observation, nous obtenons que $\theta = \theta'$ car $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$. Ainsi G est une fonction injective sur D.

Finalement le jacobien est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} &= \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho\sin(\varphi) \end{pmatrix} \right| \\
&= (-\rho^2\cos^2(\theta)\sin^3(\varphi) - \rho^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + 0) \\
&\quad - (\rho^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + 0 + \rho^2\sin^2(\theta)\sin^3(\varphi)) \\
&= -\rho^2\sin^3(\varphi) - \rho^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) = -\rho^2\sin(\varphi).
\end{aligned}$$

Ce changement est celui des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes.

Si nous résumons les résultats obtenus dans les trois exemples précédents, nous avons le tableau suivant:

changement de coordonnées	valeur absolue du jacobien
polaires → cartésiennes	r
cylindriques → cartésiennes	r
sphériques → cartésiennes	$\rho^2\sin(\varphi)$

Les expressions dans la colonne de droite sont celles que nous avons rencontré lors des changements de variables pour les intégrales doubles et triples. Ceci ne surprendra personne après l'énoncé du théorème du changement de variables pour les intégrales multiples.

Théorème 10.1:
Soient D', un domaine de $\mathbf{R}^n$, un changement de coordonnées:

$$\begin{aligned} G: \quad D' &\longrightarrow \mathbf{R}^n, \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ x_2(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,u_2,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D = G(D')$, l'image du domaine D', et une fonction réelle

$$\begin{aligned} f: \quad D &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) &\longmapsto f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

tels que l'intégrale n-ième

$$\iint\!\cdots\!\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n$$

existe. Alors l'intégrale n-ième

$$\iint\!\cdots\!\iint_{D'} f(x_1(u_1,\ldots,u_n),x_2(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_n)) \left|\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\right| du_1\,du_2\,\ldots\,du_{n-1}\,du_n$$

existe et est égale à

$$\iint\!\cdots\!\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n.$$

Esquisse de la preuve dans le cas où $n = 3$: Nous voulons montrer que

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

où u, v, w est un système de coordonnées, x, y, z un autre système tel que x, y, z sont des fonctions de u, v, w et que nous avons un changement de coordonnées. Nous avons que

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \max\{\delta_i \mid 1\leq i\leq m\}\to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i, \qquad (*)$$

où D est divisé en m sous-régions $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Nous choisissons la sous-région R_i de la façon suivante:

$$R_i = \{(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \mid u_i \leq u \leq u_i + \Delta u_i,\ v_i \leq v \leq v_i + \Delta v_i,\ w_i \leq w \leq w_i + \Delta w_i\}$$

où $P_i = (u_i, v_i, w_i) \in D'$, $\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i > 0$. Posons $x_i = x(P_i), y_i = y(P_i), z_i = z(P_i)$. Nous avons représenté la région R_i à la figure 10.3.

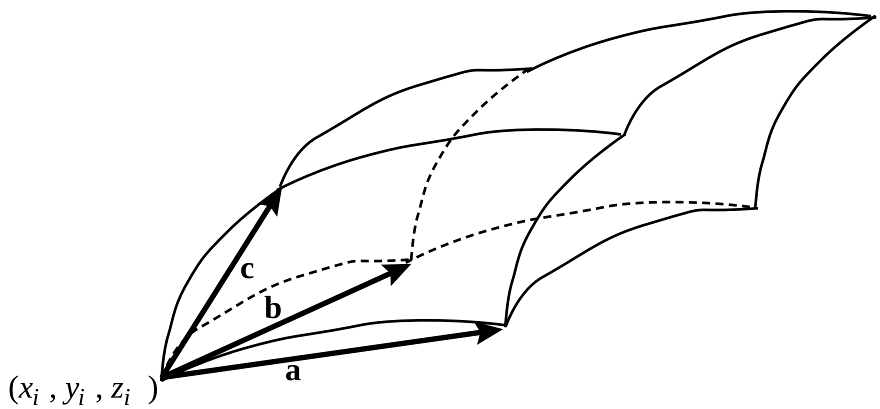

figure 10.3

Donc le volume de R_i est approximativement le volume du parallélipipède ayant comme côtés: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$. En utilisant le théorème 4.2' d'approximation linéaire, nous avons

$$\mathbf{a} \approx \left(\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{P_i} \right)(\Delta u_i),$$

$$\mathbf{b} \approx \left(\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{P_i} \right)(\Delta v_i)$$

$$\text{et}\quad \mathbf{c} \approx \left(\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_{P_i}, \left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{P_i} \right)(\Delta w_i).$$

Mais le volume du parallélipipède est égal à la valeur absolue du déterminant dont les colonnes sont $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$. En substituant ces valeurs approximatives ci-dessus, nous obtenons

$$\Delta V_i \approx \left| \left.\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{P_i} \right| (\Delta u_i)(\Delta v_i)(\Delta w_i).$$

En remplacant dans $(*)$ ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \lim_{\substack{m\to\infty \\ \max\{\delta_i \mid 1\leq i\leq m\}\to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(x(P_i),y(P_i),z(P_i)) \left| \left.\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{P_i} \right| (\Delta u_i)(\Delta v_i)(\Delta w_i) \\ &= \iiint_{D'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw\end{aligned}$$

Exemple 10.7:
Evaluons l'intégrale triple $\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$ où D est le parallélipipède ayant pour sommets les points suivants: A $= (0,0,0)$, B $= (1,2,1)$, C $= (2,3,2)$, D $= (1,1,1)$, A$' = (1,1,2)$, B$' = (2,3,3)$, C$' = (3,4,4)$ et D$' = (2,2,3)$. Nous avons représenté le domaine D dans la figure 10.4.

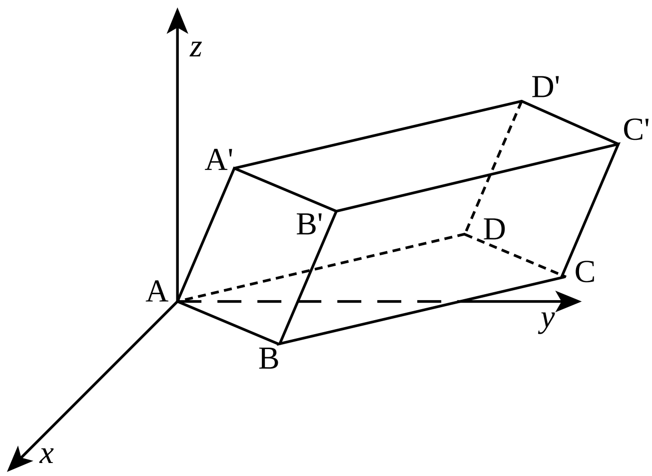

figure 10.4

Le plan contenant les points A, B, C, D a comme équation $z - x = 0$, celle du plan contenant les points A', B', C', D' est $z - x = 1$. Le plan contenant les points A, D, A', D' a comme équation $y - x = 0$, celle du plan contenant B, C, B', C' est $y - x = 1$. Le plan contenant les points A, B, A', B' a comme équation $3x - y - z = 0$, celle du plan contenant C, D, C', D' est $3x - y - z = 1$. Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées:

$$\begin{aligned} u &= -x + y, \\ v &= 3x - y - z, \\ w &= -x + z. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées. Il faut simplement noter que la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible ou encore que son déterminant n'est pas nul. Dans ces nouvelles coordonnées, D correspond au domaine $D' = \{(u,v,w) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1, 0 \le w \le 1\}$ et

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & = & u & + & v & + & w \\ y & = & 2u & + & v & + & w \\ z & = & u & + & v & + & 2w \end{pmatrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = -1.$$

Donc de tout ceci et du théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz\,dxdydz &= \iiint_{D'} (u+v+w)(2u+v+w)(u+v+2w)|-1|\,dudvdw \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (u+v+w)(2u+v+w)(u+v+2w)\,dw \right) dv \right) du \\ &= \frac{197}{24}. \end{aligned}$$

Exemple 10.8:
Soit la région R de $\mathbf{R}^2$ dans le premier quadrant consistant des points (x,y) tels que $1 \le xy \le 4$ et $x \le y \le 3x$,

c'est-à-dire que $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x, y,\ 1 \le xy \le 4 \text{ et } 1 \le (y/x) \le 3\}$. Nous avons représenté R dans la figure 10.5.

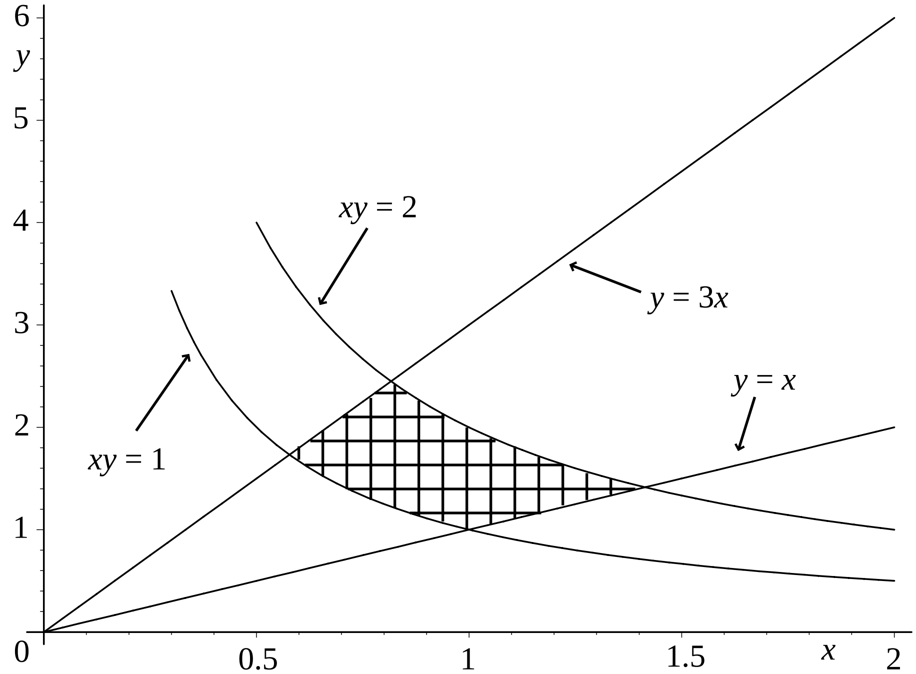

figure 10.5

Evaluons l'intégrale double $\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$. Considérons les nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées pour les points (x, y) dans le premier quadrant. Noter que nous avons aussi

$$\begin{cases} x = u^{1/2}v^{-1/2} \\ y = u^{1/2}v^{1/2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left| \begin{pmatrix} (1/2)u^{-1/2}v^{-1/2} & (-1/2)u^{1/2}v^{-3/2} \\ (1/2)u^{-1/2}v^{1/2} & (1/2)u^{1/2}v^{-1/2} \end{pmatrix} \right| = (1/2)v^{-1}.$$

La région R' correspondant à R dans les coordonnées u, v sera $R' = \{(u, v) \mid 1 \le u \le 4, 1 \le v \le 3\}$. De ce qui précède et du théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy &= \iint_{R'} \big((u^{1/2}v^{-1/2})^2 + (u^{1/2}v^{1/2})^2\big)(1/2)v^{-1}\, du\, dv \\ &= \iint_{R'} \frac{(uv^{-2} + u)}{2}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\int_1^3 (uv^{-2} + u)\, dv\right) du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(-uv^{-1} + uv\right]_{v=1}^{v=3} du = \frac{4}{3}\int_1^4 u\, du = \frac{4}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right]_{u=1}^{u=4} = 10. \end{aligned}$$

Les deux exemples précédents illustrent un des emplois du théorème 10.1. Il s'agit de déterminer un système de coordonnées tel que le domaine D' correspondant à la région d'intégration de départ est plus simple. Dans les deux exemples précédents, ces nouvelles coordonnées correspondent aux bords de notre région d'intégration initial et la nouvelle région d'intégration est alors un cube dans le premier cas et un rectangle dans le second cas.

$\star \quad \star \quad \star$

Exercice 10.1:

Evaluer chacune des intégrales suivantes:

a) $\iint_R (x+y)^2\, dx\, dy$ où R est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $y > 0$, $1 \leq y-x \leq 2$ et $1 \leq y^2-x^2 \leq 9$,

b) $\iiint_R (x + y)\, dx\, dy\, dz$ où R est l'intérieur du tétraèdre dans $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 3)$, $(-1, 2, 4)$ et $(0, 2, 5)$,

c) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ contenue dans le premier octant et consistant des points (x, y, z) tels que $1 \leq xy \leq 2$, $1 \leq xz \leq 2$ et $1 \leq yz \leq 2$,

d) $\iiint_R (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ où R est l'intérieur du parallélipipède dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 3, 1)$, $(0, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(-1, 4, 4)$, $(0, 4, 1)$ et $(0, 5, 4)$,

e) $\iint_R xy\, dx\, dy$ où R est l'ensemble des points (x, y) dans le premier quadrant de $\mathbf{R}^2$ tels que $2x \leq y \leq 4x$, $1 \leq xy \leq 9$,

f) $\iint_R (x^3 + y^3)\, dx\, dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0, (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$,

g) $\iint_R (1 - (x/a)^2 - (y/b)^2)\, dx\, dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$.

Exercice 10.2:

Soit la région $R(\alpha)$ du plan à l'intérieur de la parabole d'équation $y = x^2$ et sous la droite d'équation $y = \tan(\alpha)x$ où α est un nombre réel de l'intervalle ouvert $(0, \pi/2)$.

a) Décrire la région $R'(\alpha)$ correspondant à la région $R(\alpha)$ dans les coordonnées polaires.

b) Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \iint_{R(\alpha)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ en fonction de $\cos(\alpha)$.