

Curso de Organización Industrial

R. Fischer
DII

Otoño 2000

Índice General

1	Introducción	1
2	Teoría de Juegos	2
2.1	Introducción	2
2.2	Definiciones	3
2.3	Conceptos de solución en estrategias puras	5
2.3.1	Equilibrio en estrategias dominantes	6
2.3.2	Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas	8
2.3.3	Equilibrio de Nash	10
2.3.4	Estrategias mixtas y existencia de equilibrios de Nash	10
2.3.5	Perfección en el subjuego	13
2.3.6	Juegos de información incompleta e imperfecta	21
3	Problemas de información	27
3.1	El caso de información simétrica	28
3.2	Riesgo moral	30
3.2.1	El caso de dos niveles de esfuerzo	32
3.2.2	Racionamiento de crédito	34
3.3	El problema de selección adversa	37
3.3.1	El problema de los limones Akerlof (1970)	37
3.3.2	El caso de las enfermedades catastróficas en las ISAPRE Fischer and Serra (1996)	37
3.3.3	Un modelo de selección adversa	38
3.3.4	Seguros	42
4	Licitaciones	47
4.1	Mecanismos de licitación	48
4.1.1	Tipos de licitación	48
4.1.2	Propiedades	48
4.2	Comparación de licitaciones	49
4.3	Colusión	51
4.4	La maldición del ganador	52
4.5	Demostración de la equivalencia de licitaciones	53

5	El problema de la firma	57
5.1	Inversiones específicas y oportunismo	58
5.2	El análisis transaccional de Williamson (1985)	59
5.3	El análisis de Hart (1995)	59
6	Monopolios	61
6.1	Costos del monopolio	62
6.2	Monopolio multiproducto	64
6.2.1	Bienes complementarios y sustitutos	64
6.2.2	Monopolio intertemporal I	65
6.2.3	Aprendizaje mediante la experiencia (<i>Learning by doing</i>)	66
6.3	Monopolio con bien duradero	67
7	Monopolio y discriminación	70
7.1	Arbitraje	71
7.2	Tipos de Discriminación	71
7.3	Discriminación perfecta	72
7.4	Discriminación de tercer grado	73
7.4.1	Bienestar bajo discriminación de tercer grado	73
7.5	Discriminación de segundo grado	75
7.5.1	El caso de discriminación perfecta	76
7.5.2	Una tarifa de dos partes	77
7.5.3	Tarifa no lineales	77
7.6	Discriminación de calidad	80
7.7	Calidad y riesgo moral	80
7.8	Discriminación sin monopolio	81
7.8.1	Aplicaciones al caso de discriminación intertemporal	85
8	Regulación de monopolios	89
8.1	Regulación de monopolios: Teoría	91
8.2	Regulación de monopolios en la práctica	94
8.3	Integración vertical y doble marginalización	97
8.4	Restricciones verticales	99
8.4.1	Objetivos de las restricciones verticales	100
8.4.2	Tipos de restricciones verticales	100
9	Oligopolios	103
9.1	Paradoja de Bertrand	103
9.1.1	La solución de Edgeworth	104
9.2	Competencia de Cournot-Nash	106
9.3	Índices de Concentración	109
9.4	Colusión	111
9.4.1	La demanda con esquina	112
9.5	Teoría de superjuegos y colusión	112

9.6	Aplicaciones	114
9.6.1	Número de firmas	114
9.6.2	Tiempo de reacción	114
9.6.3	Bajas de precios cuando los tiempos son buenos	115
9.6.4	Mercados múltiples	115
9.7	Mercados desafiables	117
9.8	Un modelo de competencia monopolística	119
9.9	Entrada de firmas	120
9.9.1	La solución de Stackelberg	121
9.10	Estrategias de negocios	124
9.11	Evolución de la concentración en una industria	124
9.12	Mercados de tipo II	125

Índice de Tablas

2.1	Dilema del prisionero	8
2.2	El resultado de la EIED depende del orden de eliminación de estrategias.	9
2.3	El juego del gallina	10
2.4	Un juego de información incompleta	21
3.1	Un problema de Agente principal	36
7.1	Tarifas de telefonía móvil: ENTEL PCS	78
7.2	Tarifas de telefonía móvil: Superflexible CTC-Startel	79
8.1	Costo social de la cartelización	91

Índice de Figuras

2.1	Componentes de un juego: El juego de la moneda	4
2.2	Dilema del Prisionero	7
2.3	Estrategia mixta de un jugador	11
2.4	Entrada de Competencia I	14
2.5	Un juego con tres jugadores	15
2.6	El juego del ultimátum I	16
2.7	El juego del ultimátum II	17
2.8	El juego del ciempiés	18
2.9	El juego del ciempiés, versión monopolio	18
2.10	Entrada de competencia II	19
2.11	Entrada de competencia II modificado	20
2.12	Entrada de competencia III	21
2.13	La transformación de Harsany	23
2.14	Votos recibidos por cada candidato	24
3.1	Agente-principal con información completa	29
3.2	Utilidades de un banco con racionamiento de crédito	35
3.3	Estructura temporal del juego de selección adversa	38
3.4	Contratos con información simétrica	39
3.5	Contratos con información asimétrica	42
3.6	Precios de seguros y elección	43
3.7	Imposibilidad de los contratos <i>pooling</i> de seguros	44
3.8	Posibilidad de contratos <i>separantes</i> de seguros	45
4.1	Excedente esperado de i como función de su tipo.	55
6.1	Ineficiencia estática del monopolio	63
7.1	Monopolio	73
7.2	Demanda por cerveza de distintos consumidores	75
7.3	El monopolio perfectamente discriminante	77
7.4	Tarifa de dos partes	78
7.5	Tarifas no lineales óptimas	80
7.6	Partición del plano de acuerdo a intenciones de compra	82
7.7	Cambios en las intenciones de compra en respuesta a un cambio de precios.	83

7.8	a. Caso en que se reduce solamente el precio de los asientos de segunda. b. Precios eficientes requieren cambiar ambos precios.	83
7.9	a. Equilibrio en el caso que las preferencias dependen de un solo parámetro, b. Densidad de preferencias por asientos de cada tipo.	84
8.1	Costos sociales del monopolio	90
8.2	a. Monopolio natural temporal b. Monopolio natural permanente	91
8.3	Monopolio natural sin economías de escala	92
8.4	Tarificación a costo marginal de un monopolio natural	93
8.5	Doble marginalización	97
9.1	Restricción de capacidad	105
9.2	a. Racionamiento eficiente, b. Racionamiento proporcional	105
9.3	Equilibrio con demanda con esquina	112
9.4	(a) Un mercado desafiante, (b) Inexistencia de una configuración sostenible.	118
9.5	Competencia monopolística	120
9.6	Equilibrio de Stackelberg	122
9.7	Beneficios para la firma 1 bajo prevención de entrada como función del costo fijo.	123
9.8	Concentración y tamaño de mercado	126

Capítulo 1

Introducción

La Organización Industrial (OI) es la rama de la economía que se dedica al estudio de las interacciones entre empresas y sus efectos cuando existe un número limitado de ellas en un mercado. En muchos casos, se trata de mercados regulados, como las telecomunicaciones o el sector eléctrico, por lo que es necesario estudiar a los reguladores y sus relaciones con las empresas.

Además de los principios básicos de microeconomía, la OI utiliza la Teoría de Juegos, que permite analizar el comportamiento estratégico de las empresas, reguladores, consumidores y otros agentes económicos.

Consideremos el caso de una firma que es un monopolio en un sector. La OI estudia problemas como los siguientes: ¿cuál es la estrategia que maximiza sus ganancias y cómo depende ésta de la posibilidad de entrada de nuevas firmas al mercado, de las diferencias entre consumidores o de la durabilidad del bien producido? ¿Que calidad de productos deben ser producidos? Si se trata de un monopolio regulado, como en el caso de los servicios de utilidad pública (telefonía local, agua potable, distribución eléctrica), interesa estudiar los problemas de información que enfrenta el regulador así como el comportamiento de la empresa en esas condiciones.

Buena parte de estas preguntas también son relevantes para el caso de oligopolios, es decir cuando existe un grupo reducido de firmas en un mercado. Pero en este caso existe una serie de otros problemas a estudiar, tales como las estrategias que debe decidir una empresa frente a las estrategias de las otras empresas, las posibilidades de colusión en el mercado y los mecanismos para disuadir la entrada de firmas al mercado.

Capítulo 2

Teoría de Juegos

Esta sección está destinada a presentar la Teoría de Juegos en forma concisa y breve, sin entrar en detalles que pueden confundir al lector. Existen varios excelentes libros que describen en mayor profundidad la Teoría de Juegos entre los que se encuentran Osborne and Rubinstein (1994), Mas-Collel *et al.* (1995), Fudenberg and Tirole (1991), Gibbons (1992) y otros.

2.1 Introducción

La teoría de juegos examina el comportamiento estratégico de jugadores que interactúan motivados por la maximización de la utilidad y que saben que los otros participantes son racionales. Su campo de aplicación es enorme y va desde la economía a la biología. La teoría de juegos comienza con trabajos de Zermelo (1913), quién muestra que juegos como el ajedrez son resolubles. Borel (1921) y Von Neumann (1959) en los años 20 estudian los equilibrios de tipo *minimax* en juegos de suma cero, es decir, juegos en los que lo que gana un jugador lo pierde su rival. Sin embargo, el primer avance importante ocurre en los años 40, con la publicación del libro sobre Teoría de Juegos de Neumann and Morgenstern (1944) que divulgó una formalización general de juegos en su forma *extendida* y *normal*, introdujo el concepto de estrategia en juegos extensivos y propuso aplicaciones. En los años 50 hubo un desarrollo importante de estas ideas en Princeton, con Luce and Raiffa (1957), difundiendo los resultados en su libro introductorio, Kuhn (1953) trabajando en definir el concepto de información en juegos, Shapley (1953) que permitió establecer una forma de atacar los juegos cooperativos (es decir, aquellos en los que los jugadores pueden establecer contratos para actuar en forma mancomunada) y por fin Nash (1950) quién definió el equilibrio que lleva su nombre, lo que permitió extender la teoría a juegos no-cooperativos más generales que los de suma cero. Durante esa época, el Departamento de Defensa de los EE.UU. fue el que financió las investigaciones en el tema, debido a que la mayor parte de las aplicaciones de los juegos de tipo suma-cero se concentraban en temas de estrategia militar.

En los 60 y 70 Harsanyi (1967) extendió la teoría de juegos a juegos de información incompleta, es decir, aquellos en que los jugadores no conocen todas las características del juego: por ejemplo, no saben lo que obtienen los otros jugadores como recompensa. Ante la multiplicidad de equilibrios de Nash, muchos de los cuales no eran soluciones razonables a juegos, Selten (1975) definió el concepto de equilibrio perfecto en el subjuego para juegos de información completa y una generalización para el caso de juegos de información

imperfecta.¹

Ejemplo 1 Ejemplos de juegos:

1. El análisis de las negociaciones. Las negociaciones entre sindicato y empresa, por ejemplo, se pueden analizar como juegos en que las partes tratan de dividir el excedente de la empresa antes de pagar los salarios.
2. El análisis de las licitaciones. Las empresas y el Estado utilizan procesos de licitación para comprar o vender bienes y servicios. Es importante saber cuales son los mecanismos de licitación adecuados ante cada tipo de licitación y sus debilidades.
3. El comportamiento de las firmas ante la entrada de competencia. Las firmas pueden ser agresivas frente a la nueva competencia, reduciendo precios y aumentando el gasto publicitario o pueden acomodar la entrada, tratando de llegar a un entendimiento con la firma entrante.
4. Los juegos de atrición, en los que se evalúa la capacidad para resistir y que permiten evaluar la situación de defensa de un país.
5. Estrategias en comercio internacional. En el comercio internacional, los gobiernos protegen la producción nacional a costa de las empresas extranjeras, evaluando el costo que podría tener una posible reacción de los gobiernos extranjeros.
6. Análisis político. Las reglas electorales alteran las plataformas electorales de los candidatos y se pueden estudiar las consecuencias de distintos tipos de reglas. Un ejemplo en que las predicciones de los modelos teóricos se cumplen es la segunda vuelta electoral del 2000.
7. Evolución de las especies biológicas. Las especies que conocemos son el producto de un largo proceso de interacciones con otras especies. Los genes y la influencia de éstos sobre su comportamiento y características físicas hacen que individuos de una especie tengan distinta capacidad reproductora, con lo que los genes más exitosos en el juego reproductivo son los que sobreviven.
8. ...

◇

2.2 Definiciones

Definición 1 Un *juego* en forma extensiva está compuesto de:²

1. El conjunto de *jugadores* $i \in 1 \dots n$, quienes toman decisiones y son racionales (i.e. maximizan su utilidad).
2. Un *árbol* del juego compuesto de:

¹Harsanyi, Nash y Selten recibieron el premio Nobel de economía por sus contribuciones a la teoría de juegos.

²La definición que sigue es una versión simplificada. Una versión más precisa puede encontrarse en Osborne and Rubinstein (1994)

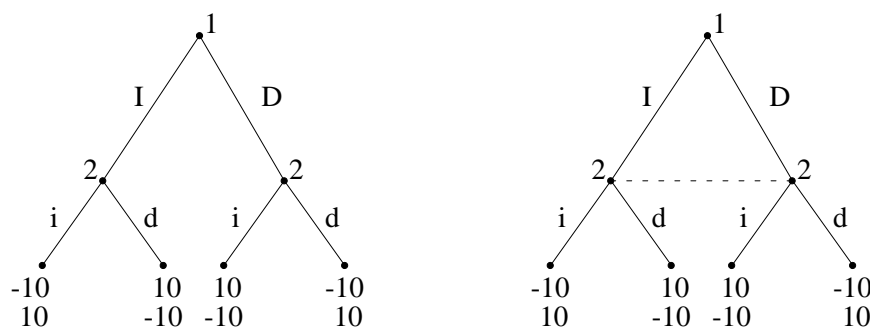


Figura 2.1: Componentes de un juego: El juego de la moneda.

- (a) Nodos, cada uno asignado a un sólo jugador.
 - (b) Las acciones (ramas) que dispone un jugador en cada uno de sus nodos.
3. La *información* que dispone un jugador en cada nodo en el que le toca decidir. La información se describe mediante *conjuntos de información*, que son conjuntos de nodos que el jugador puede distinguir entre sí (ver ejemplo 2).
 4. Las *estrategias* $s_i \in S_i$ de cada jugador, que son libros de instrucciones que le dicen al jugador que acción elegir cuando llega a uno de sus conjuntos de información. Es decir, son funciones desde los conjuntos de información del jugador a las acciones que tiene en cada conjunto de información.
 5. Los *pagos* u_i a los jugadores en los nodos terminales del árbol del juego.³

Ejemplo 2 Consideremos el juego en la izquierda de la figura 2.1. En este juego, el primer jugador toma una moneda en una mano. El segundo jugador puede observar su acción. El segundo jugador debe determinar si el jugador 1 tomó la moneda en su mano izquierda o en su mano derecha. Si acierta (lo que es trivial pues observa la acción del primer jugador), su pago es 1 y el jugador 2 obtiene -1. Si no acierta, recibe un pago de -1 y el jugador 1 recibe 1.

El primer jugador tiene un sólo nodo que es a su vez su único conjunto de información (un *singleton*). En este conjunto de información puede elegir entre sus acciones I o D, es decir, posee dos estrategias: $S_1 = \{I, D\}$. El segundo jugador posee dos nodos que puede distinguir entre sí, ya que sabe lo que ha jugado el jugador 1, es decir, posee dos conjuntos de información (también *singletons*). En cada uno puede elegir dos acciones, lo que da un total de $2 \times 2 = 4$ estrategias distintas. Las estrategias del jugador 2 son:

$$S_2 = \{(i, i), (i, d), (d, i), (d, d)\}$$

El juego de la derecha en la figura 2.1 es similar, salvo porque el jugador 2 no puede observar lo que ha hecho el jugador 1, ya que éste elige a escondidas. En este caso, el jugador 2 no puede distinguir entre

³Estos pagos están definidos en términos de útiles. La utilidad subyacente es de tipo Von Neumann-Morgenstern. Esto significa que la utilidad esperada del juego, dado como ha jugado cada jugador es el valor esperado de los pagos dadas las probabilidades inducidas en los nodos terminales.

su nodo izquierdo y su nodo derecho, es decir, tiene un solo conjunto de información.⁴ Distinguimos los nodos que pertenecen a un mismo conjunto de información mediante una línea punteada que los une, como se muestra en la figura de la derecha.

Cuando decide su acción, el jugador 2 no sabe en cual de los dos nodos de su conjunto de información se encuentra, por lo que no puede usar estrategias que condicionan lo que hace en el nodo en que se encuentra. Tiene que elegir la misma acción en ambos nodos. Dispone, pues, de sólo dos estrategias $S_2 = \{i, d\}$

◇

Es importante notar que una estrategia le dice a un jugador que hacer en cada posible situación (conjunto de información) en que el jugador podría encontrarse y no sólo en aquella que resulta ser la trayectoria de equilibrio del juego. Esto resulta esencial ya que los equilibrios que resultan dependen de lo que se haga en conjuntos de información fuera del equilibrio, como lo es por ejemplo una amenaza que atemoriza a otro jugador y por lo tanto, que no se lleva a cabo, pero afecta el equilibrio del juego.

Definición 2 La n -tupla de estrategias que le asigna una estrategia a cada jugador es una *combinación de estrategias* $s \in S \equiv \prod_{i=1}^n S_i$.

Cuando cada jugador elige una estrategia en el juego, la combinación de estrategias resultante define una trayectoria que lleva desde el comienzo del juego hasta uno de los nodos terminales, es decir determina los pagos que reciben los jugadores, $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 3 En el ejemplo de la moneda, izquierda, hay $4 \times 2 = 8$ posibles combinaciones de estrategias. Un ejemplo es $(I, (d, i))$. ¿Cuál es el nodo terminal asociado?

◇

Notación: Para cada jugador i , distinguimos por el subíndice $-i$ la $(n-1)$ -tupla de estrategias de los demás jugadores, es decir

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_{-i}$$

Dada la notación anterior, la combinación de estrategias s se puede escribir como $s = (s_i, s_{-i})$.

2.3 Conceptos de solución en estrategias puras

Una vez definido lo que es un juego, es necesario encontrar formas de resolverlo, mecanismos que encuentren la forma en que jugadores racionales elegirían jugar el juego. Comenzamos analizando el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, no sólo porque fue uno de los primeros tipos de equilibrios examinados, sino porque tiene aplicaciones importantes.

Definición 3 Una estrategia s_i^* del jugador i es *mejor respuesta* a s_{-i} (las estrategias de los demás jugadores) si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i.$$

⁴Nótese que todos los nodos en un mismo conjunto de información tienen el mismo número de acciones (ramas) ya que si no serían distinguibles entre sí.

Ejemplo 4 En el ejemplo de la moneda, figura izquierda, $s_2 = (i, i)$ es una mejor respuesta a $s_1 = I$. ¿Existe otra estrategia de 2 que también sea mejor respuesta a esta estrategia del jugador 1?

◇

Definición 4 Una estrategia s_i^* del jugador i es *dominante* si es la mejor respuesta a todas las estrategias de los demás jugadores:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i, \quad \forall s_{-i}.$$

con desigualdad estricta para al menos algún s_i .

Consideremos las dos definiciones anteriores. Una estrategia que es mejor respuesta es lo mejor ante una *determinada* elección de los demás jugadores. Una estrategia dominante es mejor respuesta ante *todas* las estrategias de los demás. Cuando existe una estrategia dominante, los jugadores siempre la usan, porque es lo mejor que pueden hacer, independientemente de lo que hagan los demás jugadores.

Ejercicio 1 En el juego de la moneda, izquierda, muestre que la estrategia (i, d) es dominante para el jugador 2. ¿Existe una estrategia dominante en el juego de la moneda, derecha?

◇

Ejercicio 2 Muestre que cada jugador puede tener a lo más una estrategia dominante.

Definición 5 Una estrategia s_i es *débilmente dominada* por s'_i si $\forall s_{-i}$ se tiene que $u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$, con desigualdad estricta para al menos un s_{-i} .⁵

La definición anterior permite descartar estrategias que nunca serán utilizadas por un jugador racional ya que es peor que otra estrategia, no importando lo que hagan los demás jugadores. Notemos sin embargo que una estrategia que domina a otra no tiene por que ser dominante.

2.3.1 Equilibrio en estrategias dominantes

Las definiciones anteriores nos permiten plantear una primera definición de solución de un juego, ideada por von Neumann.

Definición 6 Una combinación de estrategias $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ es un *equilibrio en estrategias dominantes* si cada s_i^* es dominante.

Ejercicio 3 Muestre que a lo más puede existir un equilibrio en estrategias dominantes.

◇

El concepto de equilibrio en estrategias dominantes es poderoso ya que cuando existe, tiene todas las propiedades posibles: es único y nadie tiene mejores alternativas desde un punto de vista individual. El problema de este concepto de equilibrio es que no todos los juegos tienen un equilibrio en estrategias dominantes. En general los jugadores no disponen de estrategias dominantes así que en el conjunto de juegos posibles, son pocos los que tienen este tipo de equilibrios. Sin embargo, existen juegos muy importantes como el *Dilema del prisionero* que tienen equilibrios en estrategias dominantes.

⁵Una estrategia es estrictamente dominada si para todo s_{-i} , las desigualdades son estrictas.

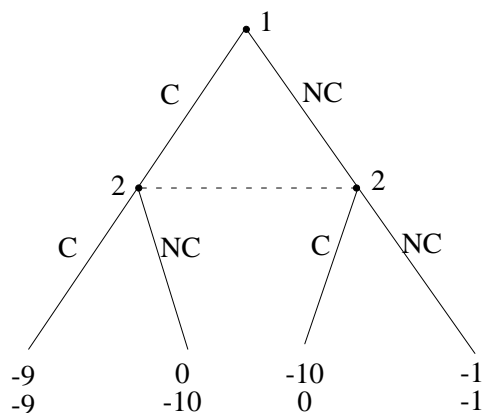


Figura 2.2: Dilema del Prisionero

Ejemplo 5 El dilema del prisionero. Dos individuos con antecedentes criminales son detenidos en un barrio elegante mientras caminan con una carretilla cargada con artículos electrónicos que la policía sospecha son robados. En la cárcel, detectives los interrogan por separado y les hacen ofertas. Si el prisionero confiesa, se le dejará libre, siempre y cuando su colega no haya confesado. Por el contrario, si no confiesa, pero su colega lo hace, tendrá una condena de 10 años de cárcel. Los prisioneros también saben que si ninguno confiesa, no los podrá mantener detenidos más de un año y que si ambos confiesan, pasarán 9 años en la cárcel. La figura 2.2 muestra el juego.

Consideremos al prisionero 1. Supongamos que cree que el prisionero 2 respeta sus promesas anteriores y no confiesa. Si el prisionero 1 confiesa, sale libre, lo que es preferible a la opción de no confesar, que acarrea un año de condena (dado que el otro prisionero no confiesa). Si por el contrario, cree que el prisionero 2 va a confesar, no importando sus promesas anteriores, confesar le da 9 años de cárcel, lo que es mejor que cargar con todas las culpas y 10 años de cárcel al no confesar. Por lo tanto, no importando lo que haga el prisionero 2, el prisionero 1 está mejor confesando: es su estrategia dominante. Lo mismo ocurre con el prisionero 2, por lo que el único equilibrio en estrategias dominantes es aquel en que ambos prisioneros confiesan. Es notable que a pesar que cooperando les habría ido mejor, ambos confiesan y terminan peor.⁶

◇

El dilema del prisionero es un juego de enorme importancia. Proporciona una explicación para las dificultades para establecer la cooperación entre agentes económicos. Tiene aplicaciones en pesquería, donde la falta de respeto a los compromisos de restringir la pesca puede llevar a sobreexplotación del recurso, como ocurre actualmente en las pesquerías en Chile. El dilema del prisionero también es relevante en la formación de *carteles* (acuerdos entre firmas) para subir los precios, ya que las firmas se ven tentadas a vender más de lo acordado a los altos precios que resultan de los carteles, lo que reduce los precios. El dilema del prisionero muestra las dificultades para establecer la colaboración en cualquier situación en la

⁶Por supuesto que en la vida real confesar puede no ser dominante, ya que los amigos del prisionero 2 pueden castigar al prisionero 1 por violar su palabra. Este no es un problema de la teoría de juegos, sino de nuestra representación del juego. En este caso, el juego no es el que se muestra en la figura 2.2, ya que los pagos que recibe el jugador al confesar no son los que se muestran. Probablemente la estrategia de confesar no sería dominante en este juego modificado.

Tabla 2.1: Dilema del prisionero

Reo 1 \ Reo 2	C	NC
C	-9, -9	0, -10
NC	-10, 0	-1, -1

que hacer trampa beneficia a las partes.

Como se ha mencionado antes, el equilibrio en estrategias dominantes no siempre existe, porque no siempre los jugadores disponen de estrategias dominantes. Por lo tanto, es conveniente encontrar otro concepto de solución que sea aplicable a todo tipo de juegos, es decir, un tipo de equilibrio que exista en todo juego. El problema de un concepto de equilibrio de este tipo es pueden haber múltiples equilibrios en un juego, lo que implica que es necesario poder seleccionar entre estos.

El análisis de muchos juegos no requiere la compleja estructura de la forma extensiva, con su énfasis en la dimensión temporal del juego. En estos casos se usa la *forma normal* del juego, que aparece por primera vez en Neumann and Morgenstern (1944).

Definición 7 Un juego en *forma normal* está compuesto por:

1. Los jugadores, $i \in 1 \dots n$.
2. Las estrategias $s_i \in S_i$ de cada jugador.
3. Los pagos $u_i(s)$ que reciben los jugadores.

La tabla 2.3.1 muestra el dilema del prisionero en su forma normal. Las estrategias de cada jugador aparecen como las leyendas de las columnas o filas (por convención, el primer jugador corresponde a las filas) y los pagos aparecen en las celdas, con la primera componente en cada celda correspondiendo al jugador 1. En ella se puede ver claramente que la combinación de estrategias (C,C) es un equilibrio en estrategias dominantes.

2.3.2 Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

Supongamos que partiendo por el jugador 1, eliminamos todas sus estrategias estrictamente dominadas. En el nuevo juego que resulta, eliminamos todas las estrategias estrictamente dominadas del jugador 2 y así sucesivamente. Si, siguiendo este procedimiento, finalmente obtenemos una sola combinación de estrategias, se dice que es un equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas.

Ejemplo 6 La batalla del Mar de Bismarck.

		Imamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2, -3/2	2, -2
	Sur	1, -1	3, -3

		Jugador 2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
Jugador 1	<i>T</i>	1, 1	0, 0
	<i>M</i>	1, 1	2, 1
	<i>B</i>	0, 0	2, 1

Tabla 2.2: El resultado de la EIED depende del orden de eliminación de estrategias.

En este juego, Kenney se da cuenta que la estrategia *Sur* de Imamura está estrictamente dominada por *Norte*. Eliminando esta estrategia, en el juego reducido que resulta *Norte* es dominante para Kenney. $\{Norte, Norte\}$ es la solución por eliminación iterada de estrategias dominantes.

Lo interesante del concepto de eliminación iterada de estrategias dominadas es que requieren un supuesto de racionalidad de los jugadores. Cuando Kenney elimina la estrategia *Sur* de Imamura es porque sabe que a Imamura nunca le va a convenir utilizarla, y puede descartarla de su análisis. De la misma forma, en el Dilema del prisionero, la solución por eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas es el equilibrio en estrategias dominantes, (C, C) . Aún cuando este concepto de equilibrio requiere mucha racionalidad de los actores, esto es razonable.

La situación es distinta cuando estudiamos el caso de estrategias débilmente dominadas. Consideremos el juego 7 modificado:

Ejemplo 7 La batalla del Mar de Bismarck II.

		Imamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2, -2	2, -2
	Sur	1, -1	3, -3

En tal caso, descartar la estrategia *Sur* de Imamura no es tan obvio. Si Kenney cree que Imamura podría usar *Sur*, descartar *Sur* como estrategia de Kenney ya no es obvio. Es por esto que la estrategia de eliminación iterada de estrategias *débilmente* dominadas tiene problemas:

- En muchos casos, el procedimiento entrega más de una solución, como se muestra en la tabla 8.
- A menudo la solución alcanzada depende del orden de eliminación de estrategias (débilmente) dominadas.

Ejemplo 8 El resultado de EIED depende del orden de eliminación de estrategias.

En la tabla 8, denominemos por $s_i \leq s'_i$ cuando la primera estrategia está dominada por la segunda. Entonces, si eliminamos a *T* pues $T \leq M$ y luego a *L* pues $L \leq R$ en el juego reducido, el equilibrio contiene a *R*. Si en cambio eliminamos a *B* pues $B \leq M$, y luego a *R* pues $R \leq L$ en el juego reducido, el equilibrio contiene a *L*.

Tabla 2.3: El juego del gallina

1 \ 2	Sigue	Desvía
Sigue	-100, -100	10, 0
Desvía	0, 10	1, 1

2.3.3 Equilibrio de Nash

Borel (1921) y Von Neumann (1959) demostraron en los años 20 que todo juego de *suma cero* tiene un equilibrio *minimax* en el que cada jugador actúa tratando de asegurarse el máximo beneficio ante lo peor que le puede hacer el otro jugador.⁷ Aunque útil para analizar temas de defensa, tiene un campo limitado de aplicaciones, pues en la mayoría de los juegos, la suma de los pagos en los nodos terminales no es constante, como lo vemos en el Dilema del prisionero. En su tesis de doctorado, John Nash (1950) definió el equilibrio que lleva su nombre, y demostró su existencia en todos los juegos no-cooperativos.

Definición 8 Un *equilibrio de Nash* es una combinación de estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ tal que

$$\forall i, \quad u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Es decir, en un equilibrio de Nash la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta ante las estrategias de los otros jugadores. Es importante observar que no se dice nada acerca de cuán buena es la estrategia del jugador frente a *otras* estrategias (no s_{-i}^*) de los demás jugadores. Es fácil observar que un equilibrio en estrategias dominantes es también un equilibrio de Nash.

En el juego que se muestra en la tabla 2.3.3 denominado el juego *del gallina*, no existe un equilibrio en estrategias dominantes, pero existen dos equilibrios de Nash.⁸

En este juego, dos adolescentes van en direcciones opuestas en un camino abandonado. Chocarán a menos que uno de ellos se desvíe. El que se desvía es el gallina, y obtiene 0, mientras el otro se queda con el prestigio de ser valiente. El problema ocurre cuando ambos son valientes y ninguno se desvía. En este juego no hay estrategias dominantes y por ende, no hay equilibrio en estrategias dominantes. Existen dos equilibrios de Nash en estrategias (puras): en cada una de ellas, uno de los jugadores se desvía.⁹

2.3.4 Estrategias mixtas y existencia de equilibrios de Nash

Consideremos nuevamente el juego de la moneda, derecha. Aquí se pueden probar todas las posibles combinaciones de estrategias (puras) y no existe un equilibrio de Nash en estas estrategias. Esto es razonable, pues cualquier estrategia (izquierda o derecha) que use uno de los agentes, el otro se podría aprovechar. Otra

⁷En los juegos de suma cero, lo que gana uno lo pierde el otro (algo más generalmente, en todos los nodos terminales los pagos suman una constante), por lo que los jugadores siempre esperan que el otro use la estrategia que le cause el máximo daño. Las estrategias elegidas son conservadoras.

⁸Veremos más adelante que existe otro equilibrio adicional.

⁹Omitimos examinar el problema de coordinación, que en este caso puede ser importante.

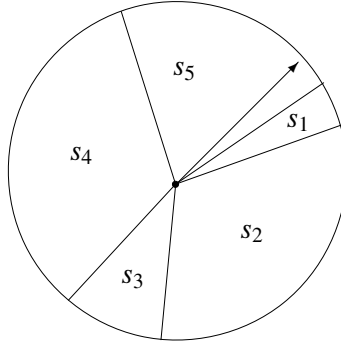


Figura 2.3: Estrategia mixta de un jugador

forma de verlo es que este juego es equivalente al del delantero y el arquero en un penal. Si el arquero siempre se tira a la derecha, el delantero tiraría siempre a la izquierda. Si el delantero siempre tira a la derecha, el arquero se tira en la misma dirección. La alternativa es que, en forma aleatoria, los dos jugadores usen la izquierda o la derecha. Este concepto es el que está detrás de la idea de *estrategia mixta*.

Definición 9 Una estrategia *mixta* $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1), \dots, \sigma_i(s_i^{m_i}))$ es una distribución de probabilidad sobre las m_i estrategias del jugador i , que le asigna la probabilidad σ_i^j a que el jugador use su estrategia s_i^j .¹⁰ Una estrategia *pura* es un caso especial de estrategia mixta en el que el jugador le asigna probabilidad 1 a una de las estrategias del jugador.

De acuerdo a la definición anterior, las estrategias que se han visto hasta ahora son estrategias puras. Una estrategia mixta se puede interpretar como una ruleta (ver figura 2.3) que el jugador hace girar. En la ruleta se han establecido divisiones que particionan el círculo en áreas que corresponden a las probabilidades que la estrategia mixta le asigna a cada estrategia pura. El jugador hace girar la aguja y utiliza la estrategia elegida por la aguja. Cada jugador usa su propia ruleta y éstas son independientes entre sí.¹¹

Notación: Una *combinación de estrategias mixtas* es $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_n)$.

Una combinación de estrategias mixtas determina una distribución de probabilidad sobre los nodos terminales, es decir, sobre los pagos. El pago para i de una combinación de estrategias mixtas es el valor esperado calculado usando las probabilidades generadas por la estrategia mixta sobre los nodos terminales.

Definición 10 El pago para i de la combinación de estrategias mixtas σ es

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$$

Ejemplo 9 En el caso específico del juego de la moneda, derecha, consideremos las estrategias $\sigma_1 = (3/4, 1/4)$ y $\sigma_2 = (1/4, 3/4)$. El valor esperado para el jugador 1 de esa combinación de estrategias mixtas es: $(-10 \cdot (3/16) + 10 \cdot (9/16) + 10 \cdot (1/16) - 10 \cdot (3/16)) = 10/4 > 0$.

¹⁰Es decir, $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) = 1$.

¹¹El uso de ruletas no independientes da lugar a los equilibrios *correlacionados*, ver Osborne and Rubinstein (1994).

◇

Definición 11 Una estrategia σ_i del jugador i es *dominada* por σ'_i si $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma_{-i}$, con desigualdad estricta para algún σ_{-i} .

Definición 12 Una estrategia σ_i del jugador i es *mejor respuesta* a σ_{-i} si $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma'_i$.

Ejercicio 4

1. Muestre que una estrategia mixta que utiliza una estrategia dominada es dominada.
2. Invente un ejemplo que muestre que una estrategia mixta puede ser dominada a pesar de no poner probabilidad positiva en estrategias dominadas.

◇

Definición 13 Un *equilibrio de Nash* es una combinación de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ tal que

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall i, \quad \forall \sigma_i$$

Se puede demostrar que los equilibrios de Nash siempre existen, lo que fue demostrado por John Nash en su tesis doctoral (Nash (1950)). Se puede demostrar que un equilibrio por eliminación iterada de estrategias *estrictamente* dominadas es un equilibrio de Nash (ver Fudenberg and Tirole (1991)).¹²

El siguiente lema ayuda a caracterizar los equilibrios de Nash.

Lema 1 Una condición necesaria y suficiente para que σ^* sea un equilibrio de Nash es que para todo jugador i se tiene que si la probabilidad asignada por σ_i^* a una estrategia s_i^j es positiva, entonces s_i^j es mejor respuesta a σ_{-i}^* .

Demostración: Supongamos que σ^* sea un equilibrio de Nash y que s_i^j no sea mejor respuesta a σ_{-i}^* . Entonces se puede aumentar el pago esperado por el jugador i reduciendo la probabilidad asignada a s_i^j y traspasándola a una estrategia pura que sea la mejor respuesta. Pero si eso se puede hacer, σ_i^* no es mejor respuesta a σ_{-i}^* , y por lo tanto, σ^* no sería un equilibrio de Nash.

Supongamos que cada una de las estrategias s_i^j a las que σ_i^* le asigna peso positivo es mejor respuesta a σ_{-i}^* , pero que σ_i^* no forma parte de un equilibrio de Nash, es decir, σ_i^* no es mejor respuesta a σ_{-i}^* . Esto significa que existe que existe σ'_i que es mejor que σ_i^* para i , dado σ_{-i}^* . O sea alguna de las estrategias utilizadas con probabilidad positiva en σ'_i debe dar un pago mayor que alguna de las estrategias utilizadas con probabilidad positiva por σ_i^* . Pero esto significa que alguna de las estrategias utilizadas con probabilidad positiva por σ_i^* no es mejor respuesta a σ_{-i}^* . ■

Ejemplo 10 Consideremos como encontrar los equilibrios de Nash del juego del gallina que se muestra en la tabla 2.3.3. Llamando S y D a las estrategias de Seguir y Desviarse, respectivamente, sabemos que existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (S,D) y (D,S). Supongamos que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es un equilibrio de Nash. Los equilibrios en estrategias puras del juego de la gallina corresponden a: $\sigma_1(D) = 1, \sigma_2(D) = 0$

¹²Esto no es válido para el caso de EIED con estrategias débilmente dominadas.

y $\sigma_1(D) = 0, \sigma_2(D) = 1$. Estudiemos ahora la existencia de equilibrios en estrategias mixtas: del lema 1 se tiene que para que $0 < \sigma_1(D) < 1$ (y $0 < \sigma_1(S) = 1 - \sigma_2(D) < 1$) sea un equilibrio de Nash, se debe tener que las estrategias D y S deben entregar el mismo pago (dado lo que hace el otro jugador). Es decir, se debe tener $-100\sigma_2^*(S) + 10\sigma_2^*(D) = 0\sigma_2^*(S) + 1\sigma_2^*(D)$, lo que implica que $\sigma_2^*(S) = 9/109$. Por simetría, $\sigma_1^*(S) = 9/109$. Por lo tanto, $\sigma_1^* = (9/109, 100/109) = \sigma_2^*$. Es interesante notar que en el equilibrio en estrategias mixtas, la probabilidad de chocar es algo menor de un 1%.

◇

Es interesante señalar que situaciones estratégicas equivalentes al juego del gallina ocurren en la vida real. A mediados de los 90, dos empresas tenían planes para construir gasoductos desde Argentina hacia el valle central, con el objeto de proveer gas natural a plantas eléctricas de ciclo combinado y para uso industrial y domiciliario. El problema es que esto era un buen negocio para una compañía, pero resultaba un desastre económico si ambos proyectos se concretaban. Ambas empresas trataron de atemorizar a la otra mediante anuncios de gastos que indicarían que habían comprometido tal monto de recursos en el proyecto que era imposible abandonarlo.¹³ Este proceso duró meses, hasta que finalmente una de las empresas se desistió del proyecto. La otra empresa *GasAndes*, construyó el gasoducto.

Pocos años después la situación se repitió en el norte de Chile. En el Norte la demanda por gas está asociada a proyectos mineros, los que requieren grandes cantidades de energía eléctrica. A mediados de los 90, la demanda crecía a 20% anual. El 85% de la demanda, aproximadamente 1400MW en 2001, correspondía a proyectos mineros. Para responder al aumento esperado de la demanda se proyectaron gasoductos desde Argentina. Tal como en el caso del gasoducto en la zona central, un proyecto era viable, pero no dos. Durante meses ambos proyectos jugaron el Juego del Gallina, pero finalmente ambos se llevaron a cabo.¹⁴ El resultado es una sobreabundancia de gas en el Norte y que los recursos sean, desde ya, irrecuperables desde un punto de vista económico. Cada proyecto consultaba la construcción de centrales para utilizar el gas. Peor aún, una tercera compañía decidió innovar y no hacer un gasoducto, sino generar la electricidad en Argentina (a partir de gas) y luego traer la electricidad al Norte mediante un cable de transmisión. El resultado es una enorme sobreoferta de electricidad en el Norte, que tiene una capacidad instalada de unas tres veces la demanda. Esto significa que las plantas de generación eléctrica también son irrecuperables económicamente. Las pérdidas de las compañías de seguir la estrategia (S, S) en este juego del gallina se estiman en mil a mil quinientos millones de dólares.

Como se ha mencionado, el equilibrio de Nash es más débil que el de equilibrio en estrategias dominantes. Al poco tiempo, los especialistas en teoría de juego se dieron cuenta que es fácil encontrar juegos con más de un equilibrio de Nash. En ese caso aparece la dificultad de saber si todos los equilibrios son igual de relevantes. En algunos casos, la multiplicidad es intrínseca: en el juego de la gallina no hay forma de decidir cual entre (S, D) y (D, S) es preferible. En otros casos, en cambio, esta multiplicidad de equilibrios de Nash involucra algunos que son más “débiles” que otros equilibrios y por lo tanto deberían ser descartados en el análisis.

2.3.5 Perfección en el subjuego

Reinhardt Selten (1975) observó que algunos de los equilibrios de Nash estaban basados en que los jugadores eligen estrategias porque temen que uno de los otros jugadores use una estrategia que les costaría caro si

¹³Veremos más adelante (sección 9.9.1) como los costos hundidos afectan la situación estratégica de las empresas.

¹⁴A pesar que casi hasta el final, podrían haberse unido ambos proyectos.

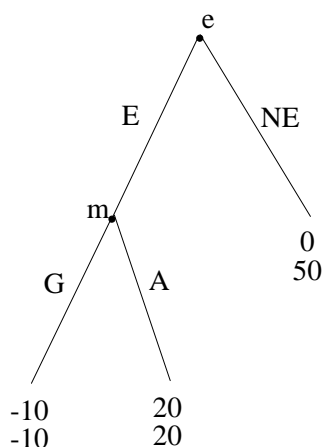


Figura 2.4: Entrada de Competencia I

se desvían del equilibrio. Eso no es un problema si hubiera seguridad que la amenaza se va a llevar a cabo en caso que los otros no obedezcan. El problema es que existen otros equilibrios Nash en los cuales las amenazas no se llevarían a cabo, ya que no le conviene al jugador que las hace, por lo que no parece razonable que estos equilibrios sean robustos.

Ejemplo 11 (entrada de competencia) La figura 2.4 muestra una firma que es un monopolio (m) en una ciudad pequeña y que enfrenta la potencial entrada de un competidor. En este juego hay dos equilibrios de Nash, $N_1 = (E, A)$ y $N_2 = (NE, G)$. El problema es que el segundo equilibrio está basado en una amenaza de castigo si es que la firma entrante efectivamente entra al mercado. La pregunta es: ¿debería el entrante creer en la amenaza del monopolista?

◇

Una manera de enfocar el problema es considerar si la amenaza del monopolista es *creíble*, es decir, si es una amenaza que el monopolista llevaría a cabo en caso que le tocara jugar. Consideremos la situación del monopolista al llegar a su nodo (es decir, cuando el entrante ha decidido entrar). En ese momento el monopolio ya no puede cambiar la elección del entrante, entonces, ¿por qué sacrificarse para cumplir una amenaza? De esa forma es posible definir una amenaza no creíble si el jugador no utiliza la acción anunciada si acaso llega a un nodo del juego en que le toca jugarla. Una forma de seleccionar entre equilibrios, es eliminando aquellos que contienen estrategias no creíbles. Antes de precisar el concepto, es preciso contar con algunas definiciones.

Definición 14 Un *subárbol* del juego es el subconjunto de nodos y acciones de un juego que se origina en un conjunto de información que es un *singleton*.

Ejemplo 12 En el juego de la moneda, izquierda, hay 3 subárboles. El juego de la moneda, derecha solo tiene un subárbol.

◇

Consideremos una combinación de estrategias σ en un juego. Al considerar un subárbol del juego, se puede definir un subjuego del juego original, que corresponde al juego restringido al subárbol.

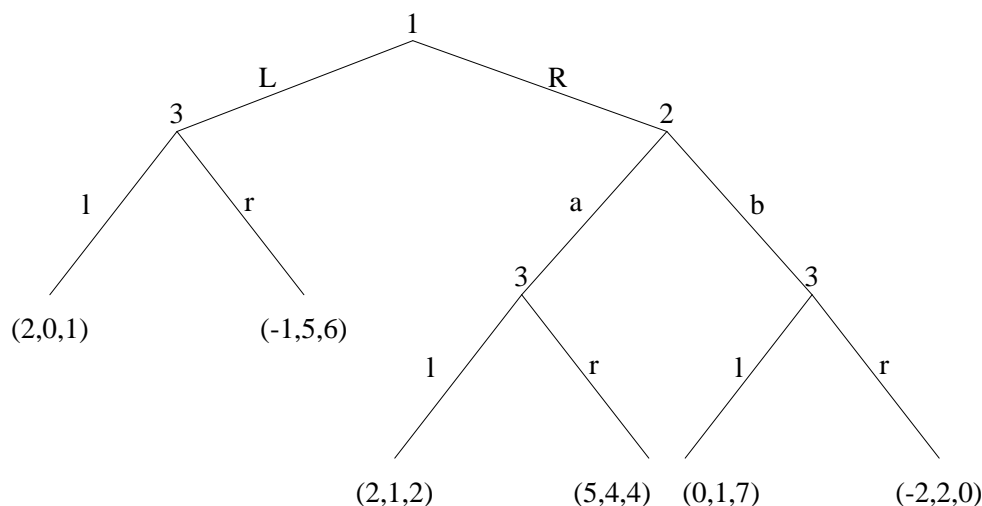


Figura 2.5: Un juego con tres jugadores

Definición 15 Un equilibrio de Nash es *perfecto en el subjuego* (EPS) si al considerar cada subárbol, la combinación de estrategias restringidas al subárbol es un equilibrio de Nash del juego restringido al subárbol.

En la definición anterior se utiliza la llamada *racionalidad secuencial*, en la que los jugadores juegan en forma óptima en cada nodo del juego.

Ejemplo 13 En el juego de entrada de competencia (figura 2.4), la combinación de estrategias (NE,G) es un equilibrio de Nash pero no es perfecto en el subjuego.

◇

Par encontrar los EPS basta utilizar el método de *inducción hacia atrás*. Se parte desde los nodos penúltimos y se elige en cada nodo la mejor acción (un problema de teoría de decisiones, ya que hay un solo jugador). Se reemplaza el juego original por uno en que se eliminan los nodos terminales y los nodos penúltimos se transforman en los nodos terminales de un juego simplificado, con los valores asociados a la mejor estrategia a usar en cada nodo penúltimo. Se prosigue hasta terminar el juego. Este procedimiento lleva a una solución única (salvo que los pagos a los jugadores sean los mismos en nodos distintos).

Ejemplo 14 En la figura 2.5, mostrar que existe un equilibrio (en estrategias puras) en que el jugador 3 obtiene un pago de 6, pero que no es EPS. Encontrar el único EPS del juego.

Ejercicio 5 En la figura 2.6 se muestra el juego del ultimátum I. Dos jugadores deben repartirse \$100. El primer jugador hace una oferta x , que es lo que le entrega al jugador 2 si este acepta la oferta. Si no lo hace, ambos jugadores terminan con cero. Encuentre un set de estrategias que son equilibrios de Nash. Muestre que el número de equilibrios de Nash es muy grande. Muestre que en el único EPS de este juego los pagos son (\$99.99,\$.01).

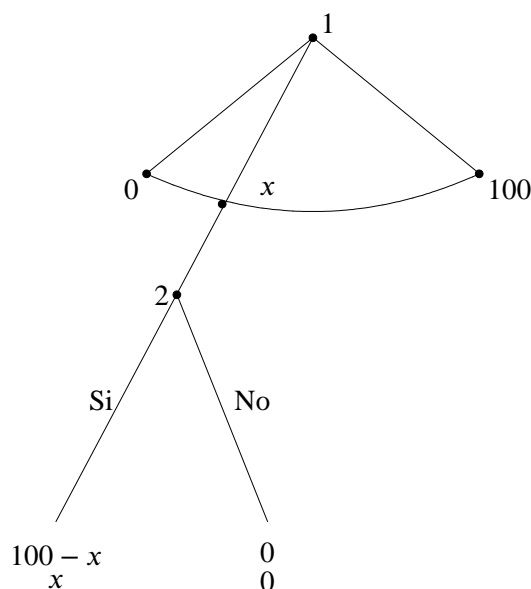


Figura 2.6: El juego del ultimátum I

◇

Ejercicio 6 En el juego del ultimátum II de la figura 2.7, si el jugador 2 no acepta la oferta del jugador 1, tiene derecho a una contraoferta. Con el objeto de reflejar los costos de negociación, la suma a repartir es de $\$100/(1 + r)$. Si el jugador 1 rechaza la contraoferta, ambos jugadores terminan con cero. ¿Cuál es el EPS del juego? Tenga cuidado al definir las estrategias. Suponga ahora que hay un tercer período en el que el jugador 1 puede hacer una contraoferta al jugador 2, pero con $\$100/(1 + r)^2$ a repartir. Encuentre el equilibrio. Finalmente, ¿puede escribir la regla general para el caso de un número indefinido de ofertas y contraofertas?

◇

El juego del ultimátum ha sido estudiado en experimentos. En estos experimentos, a voluntarios se le paga una suma fija por participar además de sumas variables que dependen de cuán bien juegan contra sus contendores. El juego del ultimátum ha sido bien estudiado, y los resultados muestran que en general, la oferta del primer jugador corresponde a $x \in [35\%, 45\%]$. ¿Cómo se explica la diferencia con los resultados que se obtienen en el EPS del juego? Una posibilidad es que los pagos del juego no reflejen la utilidad que recibe el jugador 2 que sabe que el otro jugador es egoísta y se queda con la mayor parte de la suma a dividir. De acuerdo a este razonamiento, la equidad (que el jugador 1 no se aproveche) es un factor importante en la decisión de 2, y como 1 lo sabe, no se atreve a sacar toda la ventaja que podría obtener. Sin embargo, cuando las sumas son mucho mayores que aquellas de los experimentos (normalmente US\$15-30), los resultados tienden a parecerse a lo que predice el juego. En un *gedanken-experiment*¹⁵, si la suma

¹⁵Experimento mental.

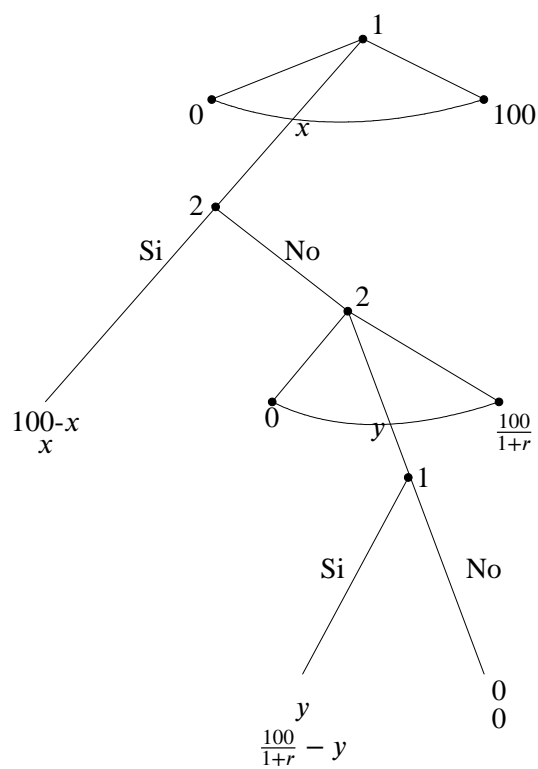


Figura 2.7: El juego del ultimátum II

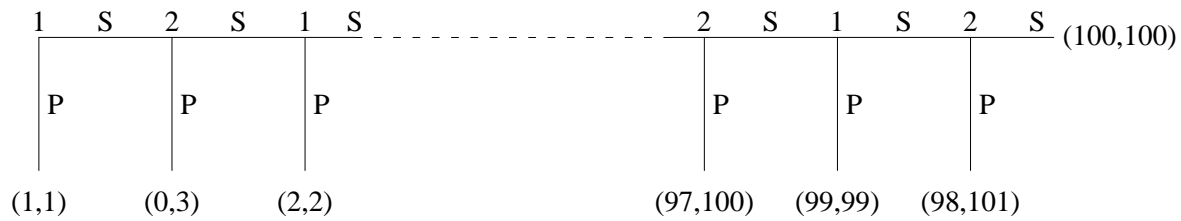


Figura 2.8: El juego del ciempiés

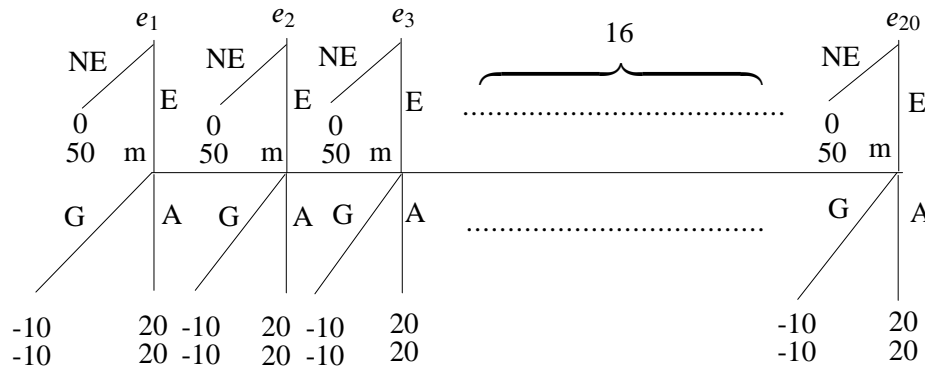


Figura 2.9: El juego del ciempiés, versión monopolio

a dividir es US\$100.000, ¿cuántos de nosotros estaríamos dispuestos a perder US\$5.000 (por ejemplo) para mostrarle al jugador 1 que no hizo una división justa?

La idea de racionalidad secuencial se puede aplicar incluso cuando no todos los nodos son *singletons*. Consideremos el juego de entrada de competencia II que se muestra en la figura 2.10. En este caso, si el entrante decide entrar, puede elegir entre una guerra de precios y acomodar, y el jugador monopolista debe elegir, en forma simultánea, que hacer. Existen tres equilibrios a este juego:

- ((No Entra, Acomodar si Entra), Guerra)
 ((No Entra, Guerra si Entra), Guerra)
 ((Entra, Acomodar si Entra), Acomodar)

de los cuales, sólo el último es EPS.

El mecanismo de inducción inversa (y por lo tanto, el concepto de EPS) tiene algunas limitaciones como se muestra en el juego del ciempiés, figura 2.8. En este caso, a ambos jugadores les convendría colaborar y conseguir llegar al menos cerca del final, y parece razonable que así lo hagan, pero el único EPS es uno en que ambos jugadores siempre usan la estrategia de parar (P) cuando les toca jugar. El problema parece ser

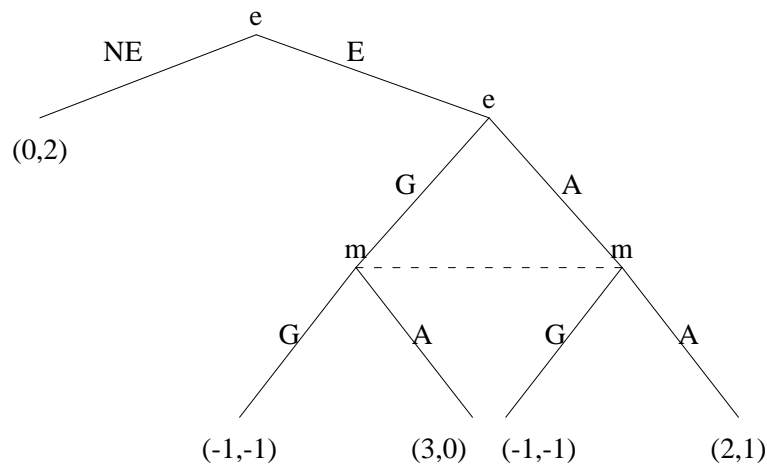


Figura 2.10: Entrada de competencia II

que la *inducción inversa* es demasiado exigente respecto a la racionalidad de los agentes, pero la solución a este problema está aún abierta.

En el siguiente caso, que se muestra en figura 2.9, se trata de un juego similar al de entrada de competencia. En este caso hay un monopolio a lo largo del país, que enfrenta potenciales entrantes en 20 localidades, uno tras otro. En cada uno de ellos se encuentra en la situación del juego de entrada de competencia, figura 2.4. Al resolver el juego por inducción inversa obtenemos que todos los entrantes entran y el monopolio nunca reacciona, lo que es poco realista. Es más razonable pensar que el monopolio al principio utilizaría la estrategia de guerra a los entrantes, hasta crearse una reputación de agresividad, y sólo cerca del final del juego estaría dispuesto a aceptar la entrada.

Ejercicio 7 Suponga que un millonario está a punto de morir y tiene dos hijos. Ha diseñado el siguiente mecanismo para distribuir su herencia de 100 millones de dólares:

Le entrega un dólar a su hijo mayor. Este puede decidir como dividir el dólar con su hermano, o puede decirle a su padre que prosiga con el mecanismo. Si decide dividir el dólar, el resto de la fortuna (i.e., 99 millones, 999 mil 999 dólares) irá a una institución de beneficencia que ayuda a los estudiantes que han tenido problemas con IN51. Si permite que el mecanismo prosiga, el padre le quita el dólar y le pasa diez al hermano menor, preguntándole a su vez si desea dividir los diez dólares con su hermano o seguir el juego. Si el hermano menor decide dividirlo, el resto va a beneficencia. Si decide seguir, el padre le quita los diez dólares y le entrega 100 dólares al hermano mayor, y así sucesivamente, hasta llegar a dividir el total de la fortuna, es decir, 100 millones de dólares. ¿Cómo termina este juego? ¿Le parece razonable?

◇

Otro problema del EPS es la debilidad del concepto en los casos de información imperfecta. En este caso, algunos de los conjuntos de información contienen más de un elemento (no son *singletons*), por lo que el número de subárboles puede ser mucho menor que el número de nodos, o incluso puede existir un solo subárbol, como en el juego de la moneda, figura derecha. Al no existir subárboles, no podemos desagregar

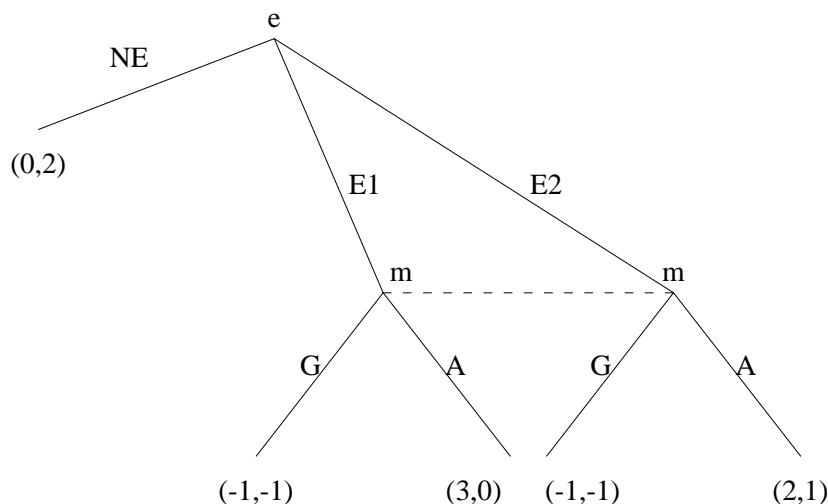


Figura 2.11: Entrada de competencia II modificado

el juego, por lo que el concepto de EPS pierde su capacidad para eliminar equilibrios de Nash que no son creíbles. Consideremos, por ejemplo, una modificación menor del juego del ultimátum II. En este juego, que es, desde el punto de vista del jugador m , igual al anterior, existe un solo subjuego, por lo que el criterio de EPS no tiene ninguna utilidad para elegir entre los dos equilibrios de Nash del juego (¡búsquelos!).

Ejemplo 15 Consideremos el juego de entrada de competencia III que se muestra en la figura 2.12. En este juego el monopolista puede invertir en tecnología, a un costo de \$20 antes de que haya entrada. Si no lo hace, estamos de vuelta en el juego de la figura 2.4. Si lo hace, es más eficiente en caso de guerra comercial, como lo muestra el subárbol del lado izquierdo para el caso de guerra. Claro que si no hay guerra esa tecnología no es necesaria, pero el costo de realizar las inversiones necesarias para estar preparados para la guerra reduce las utilidades.

El único EPS en este caso es $s_1^* = (I, G, A)$, $s_2^* = (NE, E)$, donde los nodos se han ordenado en forma natural. El resultado es que no hay entrada y la tecnología (o capacidad) no se utiliza. Su único objeto fue asustar a la potencial competencia.

◇

Lo más interesante del caso anterior es lo que sucede si la inversión en tecnología no es observable, es decir, si la firma entrante no puede determinar a ciencia cierta si el monopolio realmente realizó la inversión (por lo que tiene un único conjunto de información que contiene a sus dos nodos de acción). En este caso, la firma entrante tiene dos estrategias puras (contra 4 antes): las de entrar o no hacerlo. Pero entonces la estrategia del monopolio $s_1 = (I, G, A)$ no es mejor respuesta a una estrategia pura del entrante de $s_2 = NE$, porque en ese caso le conviene no invertir. Ahora, supongamos que el entrante anuncia $s_2 = E$. ¿Que puede hacer el monopolio? Si invierte, el entrante entra, y termina en guerra, obteniendo 10. Si no lo hace, termina acomodando la entrada con 20. Por lo tanto, no invierte y acomoda. En consecuencia, la amenaza del entrante es creíble y el entrante maximiza y se trata de un EPS. Lo sorprendente de este caso es que al

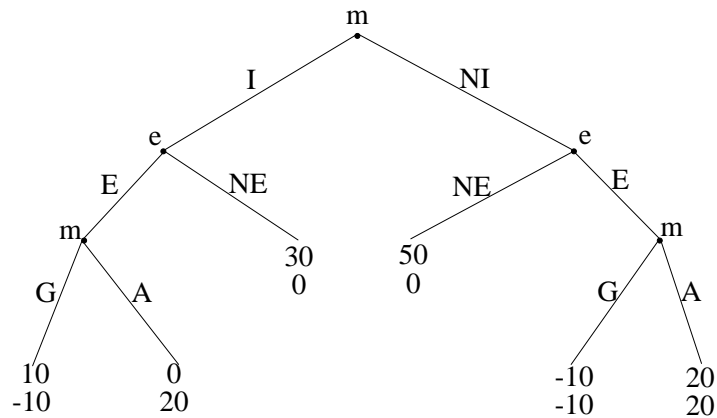


Figura 2.12: Entrada de competencia III

Tabla 2.4: Un juego de información incompleta

1 \ 2		2	
		Entra	No entra
1	Construye	0,-1	2,0
	No construye	2,1	3,0

1 \ 2		2	
		Entra	No entra
1	Construye	1.5,-1	3.5, 0
	No construye	2,1	3,0

entrante le conviene no saber lo que ha hecho el monopolista, porque si lo supiera (y el monopolista sabe que el entrante sabe) no entraría, ya que el monopolista haría las inversiones.

2.3.6 Juegos de información incompleta e imperfecta

Se dice que un juego es de *información imperfecta* cuando algunos de los conjuntos de información del juego tienen más de un nodo. Un juego es de *información incompleta* cuando los jugadores no conocen todas las características del juego, en particular, los pagos que reciben otros jugadores. De acuerdo a lo que hemos visto hasta ahora, los juegos de este último tipo no pueden ser estudiados, ya que hemos supuesto que en los juegos, toda la información sobre la estructura del juego es conocida por los participantes.

Ejemplo 16 Consideremos el juego siguiente (Fudenberg–Tirole, 1993), que es similar al problema de entrada de competencia, figura 2.4. El jugador 1 tiene que decidir si construir una planta, mientras el jugador 2 debe decidir si entra o no. Los pagos son los que aparecen en la tabla 16. El problema es que el jugador 2 no sabe si los costos del jugador 1 son 1.5 o 3, mientras que éste si lo sabe.

Si los costos del jugador 1 son altos (cuadro izquierdo), su estrategia dominante es no construir. En cambio, si su costo es bajo, la estrategia óptima del jugador 1 depende de su predicción de y , la probabilidad que el jugador 2 entre. Es mejor construir si

$$1.5y + 3.5(1 - y) > 2y + 3(1 - y)$$

es decir, $y < 1/2$. En otras palabras, el jugador 1 tiene que tratar de predecir el comportamiento del jugador 2, pero éste no puede inferir la acción del jugador 1 a partir de su conocimiento de los pagos.

Harsany (1967) propuso transformar los juegos de información incompleta en juegos de información imperfecta. Supongamos que introducimos un jugador adicional, que denominamos *Naturaleza*, que recibe el mismo pago en todos los estados. Naturaleza elige un *tipo de jugador 1*, es decir un jugador 1 con uno de los posibles valores alternativos en los nodos terminales del juego (sus costos, en el caso del juego anterior). El nuevo juego, llamado juego *Bayesiano*, se ha transformado desde un juego de información incompleta en un juego de información imperfecta, el que cabe dentro del marco de Teoría de Juegos conocida (ver figura 2.13). En el contexto de juegos estáticos (de jugadas simultáneas), si $\theta_i \in \Theta_i$ es un tipo del jugador i , una estrategia (o *regla de decisión*) del jugador $s_i(\theta_i)$ es una regla que le dice que hacer para cada realización de sus tipos. Ahora el jugador debe maximizar el valor esperado de sus tipos, dado las distribuciones de tipos de los demás. El equilibrio de Bayes-Nash es un equilibrio en que cada jugador maximiza esta utilidad esperada dadas las reglas de decisión de los demás jugadores.

En el caso de juegos dinámicos, se pueden definir los equilibrios de *Bayes-Nash* como un par ordenado compuesto por una combinación de estrategias y un sistema de creencias. Las creencias son probabilidades asignadas a cada nodo en un conjunto de información. Un jugador que le toca jugar en un conjunto de información H , con nodos le asigna una probabilidad a la ocurrencia de cada nodo de H . Se dice que una combinación de estrategias es *secuencialmente racional* (dadas las creencias μ) si en cada conjunto de información, el jugador que le toca jugar maximiza su utilidad esperada, dado μ . Para motivar la definición de *consistencia de las creencias*, notemos que, dada una combinación de estrategias σ , la probabilidad condicional de alcanzar el nodo x en el conjunto de información H es (por la regla de Bayes):¹⁶

$$Prob(x|H, \sigma) = \frac{Prob(x | \sigma)}{\sum_{x' \in H} Prob(x' | \sigma)}$$

El equilibrio (débil) de Bayes-Nash satisface:¹⁷

1. Dadas las creencias, la estrategia de cada jugador es secuencialmente racional (mejor respuesta).
2. Las estrategias son consistentes desde un punto de vista Bayesiano; es decir, las creencias están actualizadas de acuerdo a la regla de Bayes en los nodos alcanzados en el juego.¹⁸

◇

Nótese que cuando los costos del jugador 1 son altos, es preferible no construir (es una estrategia dominante). Sea x la probabilidad de construir cuando los costos son bajos. Entonces la estrategia óptima del jugador 2 es $y = 1$ (entrar) si $x < 1/[2(1 - p_1)]$, $y = 0$ (no entrar) si $x > 1/[2(1 - p_1)]$, e $y \in [0, 1]$ si

¹⁶Esta regla se aplica sólo a conjuntos de información que se alcanzan con probabilidad positiva dadas las creencias de los jugadores.

¹⁷Ver Mas-Collel *et al.* (1995).

¹⁸Por ejemplo, si con probabilidad positiva se alcanza un nodo que un tipo de jugador no habría usado nunca, se tiene que la probabilidad asignada a ese tipo de jugador es cero o se tiene una inconsistencia.

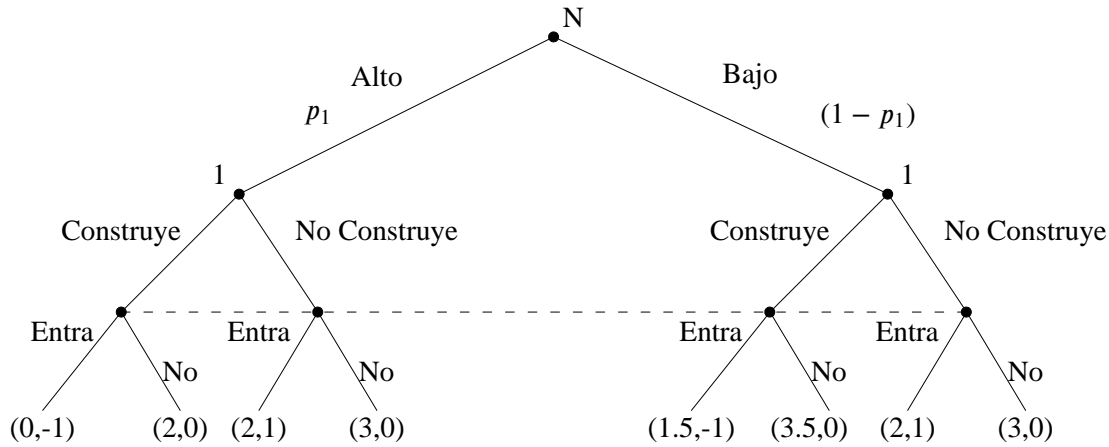


Figura 2.13: La transformación de Harsany

$x = 1/[2(1 - p_1)]$.¹⁹ Asimismo, la estrategia que es mejor respuesta para el jugador 1 es $x = 1$ (construir) si $y > 1/2$, $x = 0$ si $y < 1/2$ y $x \in [0, 1]$ si $y = 1/2$.

La búsqueda del equilibrio se basa en encontrar x e y tal que x sea óptima para el jugador 1 con bajo costo contra el jugador 2 e y sea óptima para el jugador 2 contra el jugador 1 dadas las creencias p_1 y la estrategia del jugador 1. Por ejemplo, la estrategia $x = 0$, $y = 1$ es un equilibrio para todo p_1 y la estrategia $x = 1$, $y = 0$ es un equilibrio si y solo si $p < 1/2$.

En todo caso, la definición que hemos dado de equilibrio de Bayes-Nash es débil porque no hemos impuesto condiciones sobre las creencias en nodos que no son alcanzados con probabilidad positiva, y sin embargo estas creencias pueden afectar a las estrategias. La noción de *equilibrio secuencial* es una forma de restringir las creencias en esos nodos de manera que no se produzcan inconsistencias.

Ejercicio 8 Considere un duopolio de Cournot. Se tiene $\Pi_i = q_i(\theta_i - q_i - q_j)$, donde $\theta_i = a_i - c_i$ es la diferencia entre la intersección de la curva de demanda y los costos marginales constantes de la firma i . Las acciones son $s_i = q_i$. Se sabe que $\theta_1 = 1$, pero la firma 1 cree que la firma 2 puede ser de dos tipos: $\theta_2 = 3/4$ con probabilidad $1/2$ y $\theta_2 = 5/4$ con probabilidad $1/2$. Las firmas actúan en forma simultánea. Se debe resolver para un equilibrio en estrategias puras.

◇

Ejercicio 9 Suponga que los n vecinos de la comuna de Vigo deben colaborar para comprar una ambulancia para el consultorio comunal. La calidad de la ambulancia depende de cuanto contribuye cada vecino. Suponga que el beneficio que recibe el vecino i de la ambulancia es $\ln(\sum_j^n p_j) - p_i$, donde p_j es la contribución de cada vecino. Suponga que hay dos formas alternativas de juntar la suma. En la primera, acuerdan una suma y todos deben cooperar en partes iguales (al que no colabora, le cortan el agua). En la segunda, cada uno colabora con lo que desea. Si hay 100 vecinos en la comunidad, ¿Cual es la recaudación bajo uno u otro

¹⁹Para obtener estos resultados se examinan los valores esperados de las estrategias.

sistema? ¿En que caso están mejor los vecinos? Explique sus resultados en términos de teoría de juegos. (Ayuda: Estudie el problema de maximización en cada caso.)

◇

Ejercicio 10 Suponga dos firmas que participan en la fabricación de discos LP. Este mercado está desapareciendo, por lo que las utilidades de las firmas decrecen en el tiempo t . Si las dos firmas participan en el mercado, las utilidades de duopolio son:

$$\begin{aligned}\text{Firma 1} & : 5 - t \\ \text{Firma 2} & : 10 - 2t\end{aligned}$$

En caso de quedar una sola firma en el mercado, las utilidades son:

$$\begin{aligned}\text{Firma 1} & : 10 - t \\ \text{Firma 2} & : 18 - 2t\end{aligned}$$

Si una firma sale del mercado no puede volver a entrar. Determine cual firma sale primero del mercado explicando sus argumentos. Calcule las utilidades de cada firma.

◇

Ejercicio 11 Supongamos el siguiente modelo de elecciones. Los electores están distribuidos en forma uniforme en el intervalo $[0,1]$, que podemos interpretar como el hecho que las preferencias de los electores son uniformes entre la extrema izquierda y extrema derecha. Los electores siempre votan por el candidato más cercano a su posición. Por ejemplo, si el candidato 1 se ubica en 0.6 y el candidato 2 se ubica en 0.8, el candidato 1 recibe todos los votos de los agentes a la izquierda más los votos de los agentes en el segmento $[0.7, 0.8]$, es decir, un 70% de los votos (ver figura 2.14). Cada uno de los dos partidos políticos elige la posición de su o sus candidatos simultáneamente. En caso de empate, el resultado se decide al azar, usando una moneda.

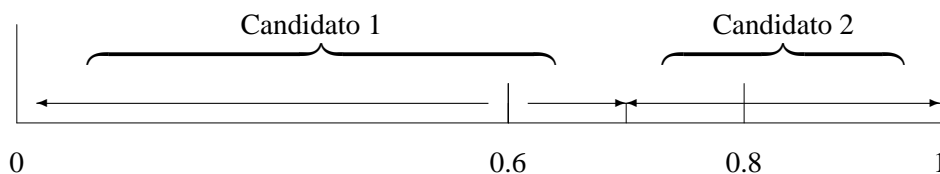


Figura 2.14: Votos recibidos por cada candidato

1. Suponga que sólo hay un cargo por circunscripción electoral (se gana por mayoría). Mostrar que para cada candidato, la estrategia de ubicarse en 0.5 es Nash. ¿Como se interpreta esto?

2. Suponga que el Partido 1 elige su posición antes que el partido 2. ¿Cual es la estrategia dominante del partido 2? ¿Cual es el equilibrio perfecto en el subjuego?
3. Suponga que el sistema es binominal y que hay dos cargos por circunscripción. Existen dos partidos, cada uno con dos candidatos idénticos. Examine los equilibrios de Nash en este caso.

◇

Ejercicio 12 Suponga que hay I campesinos, cada uno de los cuales tiene el derecho a hacer pastar sus vacas en el potrero común. La cantidad de leche que una vaca produce depende de la cantidad N de vacas en el potrero. El ingreso que producen N vacas es $Nv(N)$ para $N < \bar{N}$ con $v(N) = 0$ para $N > \bar{N}$ y $v(0) = 0$, $v' > 0$, $v'' < 0$. Cada vaca cuesta c , con $v(0) > c$, y es perfectamente divisible. Todos los campesinos deciden al mismo tiempo cuantas vacas va a poner cada uno en el potrero.

1. Escriba esto como un juego en forma estratégica.
2. Encuentre el equilibrio de Nash, y compárelo con el óptimo social (lo que haría un campesino que fuera dueño del potrero). La diferencia entre el óptimo social y el equilibrio de Nash se debe a la “*Tragedia de los Comunes*” y está relacionado con el dilema del prisionero.

◇

Bibliografía

- Borel, E. (1921). The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels (reprint 1953). *Econometrica*, **21**, 101–115.
- Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991). *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Harsanyi, J. (1967). Games with incomplete information played by ‘Bayesian’ players, parts I and II. *Management Science*, **14**, 159–82, 320–34, 486–502.
- Kuhn, H. W. (1953). Extensive games and the problem of information. In H. Tucker and R. Luce, editors, *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton University Press.
- Luce, R. and Raiffa, H. (1957). *Games and Decisions*. John Wiley and Sons.
- Mas-Collel, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**, 48–49.
- Neumann, J. V. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. John Wiley and Sons, New York.
- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, **4**, 25–55.
- Shapley, L. (1953). A value for n-person games. In R. Tucker, A.W. Y Luce, editor, *Contributions to the Theory of Games II*,. Princeton University Press.
- VonNeumann, J. (1959). Zur theorie des gesellschaftsspiele. In A. Tucker and R. Luce, editors, *Contributions to the Theory of Games, IV*. Princeton University Press. Inicialmente publicado en 1928.
- Zermelo (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, volume 2, pages 501–504, Cambridge. Cambridge University Press.