

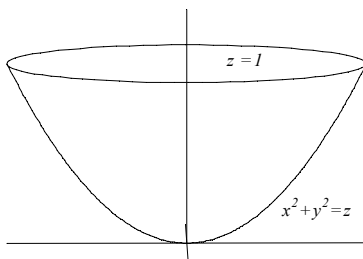
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 14 de Junio de 2000

Ejercicio 1. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$, en el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Solución. El conjunto A es la parte interior del paraboloide $x^2 + y^2 = z$, situada por debajo del plano $z = 1$.



Porción del paraboloide

Se trata de un conjunto cerrado y acotado, de forma que como f es una función continua, tenemos garantía de que existen el máximo y el mínimo de la función en el conjunto dado. Dichos extremos deben encontrarse entre los extremos relativos de la función que estén en el interior del conjunto, los extremos condicionados a la restricción del paraboloide, los que se obtienen en el plano, y, finalmente, los que se encuentran en la circunferencia intersección de ambas superficies.

Como quiera que el gradiente $\nabla f = (1, 1, 1)$ no se anula nunca, no existen extremos relativos de la función en el interior de A .

Para encontrar los extremos sobre el paraboloide usamos la función lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

de donde obtenemos las condiciones

$$1 + 2\lambda x = 0$$

$$1 + 2\lambda y = 0$$

$$1 - \lambda = 0$$

que tienen como solución:

$$\lambda = 1, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Tenemos, por tanto, que el primer candidato es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Los extremos sobre el plano $z = 1$ pueden obtenerse, por ejemplo, con

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(z - 1)$$

que dan lugar a las condiciones

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 1 &= 0 \\ 1 + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

que son claramente incompatibles.

Finalmente, sobre la intersección y usando las dos restricciones:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ 1 - \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones $x = y$, y como $x^2 + y^2 = z = 1$, concluimos que $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$, y, por supuesto, $z = 1$. Tenemos, pues, otros dos candidatos:

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) \text{ y } P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right).$$

Ya sólo nos queda evaluar la función en los tres puntos para determinar los valores mayor y menor:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -1/2 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 + \sqrt{2} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Solución. El mínimo de f se alcanza en $(-1/2, -1/2, 1/2)$ y vale $-1/2$, y el máximo se alcanza en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$ y vale $1 + \sqrt{2}$.

Ejercicio 2. Sea R la región en el plano \mathbb{R}^2 limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

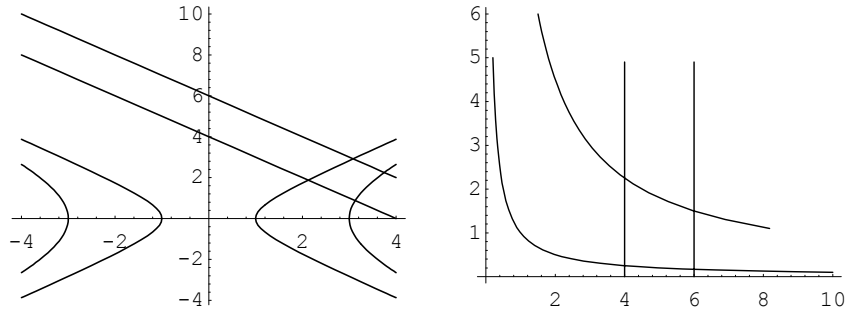
Mediante el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$, se transforma la región dada en otra región T . Se pide:

1. Representar gráficamente las regiones R y T .
2. Calcular el área de la región R utilizando T .
3. Siendo C la frontera de la región R recorrida en sentido positivo, obtener el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2) dx + (x^2 - 4) dy.$$

Solución. 1. Teniendo en cuenta que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv$, el cambio de variables transforma la región R en la región T , que está acotada por las rectas verticales $u = 4$, $u = 6$, y las curvas $uv = 1$, $uv = 9$. Es decir,

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq u \leq 6, \quad \frac{1}{u} \leq v \leq \frac{9}{u} \right\}.$$



Las regiones R y T

2. El teorema del cambio de variables asegura que el área

$$A(R) = \iint_R dx dy = \iint_T \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Calculamos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces

$$A(R) = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_4^6 \left(\frac{9}{u} - \frac{1}{u} \right) du = 4 \int_4^6 \frac{1}{u} du = 4 \ln \left(\frac{3}{2} \right).$$

3. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

Sabemos que $P = (x^2 - y^2)$ y $Q = (x^2 - 4)$. Entonces $Q_x - P_y = 2x + 2y$, por lo que, usando de nuevo el teorema del cambio de variables, obtenemos

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R 2(x + y) dx dy = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} 2u \frac{1}{2} dv du = \int_4^6 u \left(\frac{8}{u} \right) du = 16.$$

Ejercicio 3. Sea S el trozo de la superficie del paraboloide $z = x^2 + (y - 1)^2$, interior al cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 3$. Sea \mathbf{F} el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, xz)$. Se pide calcular la integral $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}$, con la normal exterior al paraboloide,

1. Directamente.
2. Usando el teorema de Stokes.
3. Usando el teorema de Gauss.

Solución. 1. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo \mathbf{F} ,

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & x & xz \end{vmatrix} = (0, -z, 0).$$

Usaremos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice $(0, 2, 0)$ del cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 3$. Entonces, la parametrización del trozo del paraboloide interior al cilindro es

$$S(u, v) = (u \cos v, 2 + u \sin v, u^2 + 2u \sin v + 1), \quad 0 \leq u \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Obtenemos un vector paralelo al vector normal a la superficie mediante

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u + 2 \sin v \\ -u \sin v & u \cos v & 2u \cos v \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v - 2u, u).$$

Dado que en el vértice $(0, 1, 0) = S(1, 3\pi/2)$, el vector $S_u \times S_v(1, 3\pi/2) = (0, 0, 1)$ apunta hacia el interior del paraboloide, tenemos que la normal exterior a S tiene sentido opuesto a $S_u \times S_v$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= -\text{rot}(\mathbf{F})(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v)(u, v) du dv \\ &= (0, u^2 + 2u \sin v + 1, 0) \cdot (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v - 2u, u) du dv \\ &= -(2u^4 \sin v + 4u^3 \sin^2 v + 6u^2 \sin v + 2u^3 + 2u) du dv. \end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= - \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} [(2u^4 + 6u^2) \sin v + 4u^3 \sin^2 v + 2u^3 + 2u] dv du \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} \left[4u^3 \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) + (2u^3 + 2u)v \right]_0^{2\pi} du \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} (8\pi u^3 + 4\pi u) du \\ &= - [2\pi u^4 + 2\pi u^2]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -24\pi. \end{aligned}$$

2. Sea C la curva frontera de S . La parametrización de C viene dada por

$$\mathbf{r}(v) = S(\sqrt{3}, v) = (\sqrt{3} \cos v, 2 + \sqrt{3} \sin v, 4 + 2\sqrt{3} \sin v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

La orientación inducida por la normal exterior al paraboloide es opuesta a la orientación de C con la parametrización dada. Entonces, el teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) dv.$$

Dado que

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] = \left(2 + \sqrt{3} \operatorname{sen} v, \sqrt{3} \cos v, \sqrt{3} \cos v (4 + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} v) \right)$$

$$\mathbf{r}'(v) = \left(-\sqrt{3} \operatorname{sen} v, \sqrt{3} \cos v, 2\sqrt{3} \cos v \right),$$

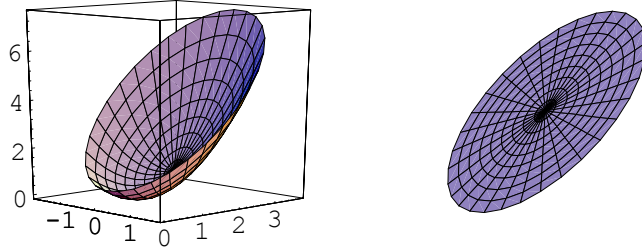
su producto escalar

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) &= -2\sqrt{3} \operatorname{sen} v - 3 \operatorname{sen}^2 v + 3 \cos^2 v + 24 \cos^2 v + 12\sqrt{3} \cos^2 v \operatorname{sen} v \\ &= -2\sqrt{3} \operatorname{sen} v - 3 + 30 \cos^2 v + 12\sqrt{3} \cos^2 v \operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) dv &= - \left[2\sqrt{3} \cos v - 3v + 30 \left(\frac{v}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2v}{4} \right) - \frac{12\sqrt{3}}{3} \cos^3 v \right]_0^{2\pi} \\ &= 6\pi - 30\pi \\ &= -24\pi. \end{aligned}$$

3. Colocando un techo T a la superficie S , de forma que $\Omega = S \cup T$ sea una superficie cerrada, podemos aplicar el teorema de Gauss.



Superficie S y techo T

Sabemos que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$. Entonces,

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} + \iint_T \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) dx dy dz = 0,$$

lo que implica que

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = - \iint_T \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}.$$

La superficie T es la curva C y su interior. Es decir,

$$T(u, v) = (u \cos v, 2 + u \operatorname{sen} v, 4 + 2u \operatorname{sen} v), \quad 0 \leq u \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Calculamos el producto vectorial

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 2 \operatorname{sen} v \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 2u \cos v \end{vmatrix} = (0, -2u, u).$$

La normal exterior al techo T tiene el mismo sentido que $T_u \times T_v$. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= \operatorname{rot}(\mathbf{F})(T(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)(u, v) du dv \\ &= (0, -4 - 2u \operatorname{sen} v, 0) \cdot (0, -2u, u) du dv \\ &= (8u + 4u^2 \operatorname{sen} v) du dv. \end{aligned}$$

Obtenemos la integral

$$\begin{aligned}
 \iint_T \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8u + 4u^2 \operatorname{sen} v) dv du \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} 16\pi u du \\
 &= [8\pi u^2]_0^{\sqrt{3}} \\
 &= 24\pi.
 \end{aligned}$$

Por tanto, el flujo del rotacional del campo a través de S , es

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = -24\pi.$$

Nota. Si usamos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice $(0, 1, 0)$ del paraboloide $z = x^2 + (y - 1)^2$, la parametrización es

$$S(u^*, v^*) = (u^* \cos v^*, 1 + u^* \operatorname{sen} v^*, u^{*2}).$$

En este caso, los parámetros deben verificar

$$(u^* \cos v^*)^2 + (u^* \operatorname{sen} v^* - 1)^2 = u^{*2} - 2u^* \operatorname{sen} v^* + 1 \leq 3,$$

es decir, $u^{*2} - 2u^* \operatorname{sen} v^* - 2 \leq 0$. Las raíces de ese polinomio, resuelto en u^* , son

$$u^* = \frac{2 \operatorname{sen} v^* \pm \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 v^* + 8}}{2} = \operatorname{sen} v^* \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 v^* + 2},$$

siendo negativa la correspondiente al signo menos. Por tanto, el dominio es

$$D^* = \left\{ (u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u^* \leq \operatorname{sen} v^* + \sqrt{\operatorname{sen}^2 v^* + 2}, \quad 0 \leq v^* \leq 2\pi \right\}.$$

