

MAT1523 ★ Cálculo III

Ayudantía 7

Martes, 27 de Abril de 2004

Ayudante: Rodrigo Berrios A.

Sección: 3.

Teorema de la función Implícita, y de la función Inversa.

Notación: Ya sabemos que si tenemos una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, de la forma $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, donde $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, su matriz diferencial esta definida como:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

desde ahora, cuando $n = m$, también llamaremos a esta matriz la *matriz jacobiana* de F , Jf . Llamaremos *jacobiano* de F al determinante de esta matriz, y lo denotaremos por:

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det (Jf)$$

Teorema de la función implícita. El teorema nos dice que si tenemos una función F cont. diferenciable que va de \mathbb{R}^{n+m} a \mathbb{R}^m , y para algún punto \vec{p}_0 vale que:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} (\vec{p}_0) \neq 0$$

entonces en una vecindad de ese punto vale que $x_i = h_i(x_1, \dots, x_n)$ para $i = n+1, n+2, \dots, n+m$. En general, estas funciones h_i están definidas implícitamente mediante un sistema de ecuaciones. Para encontrar sus derivadas respecto a las otras variables, las independientes, simplemente derivamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos usando como incógnitas las derivadas que aparecen.

Teorema de la función inversa: Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es cont. diferenciable en un punto y el jacobiano de f en ese punto es distinto de cero, entonces existen 2 vecindades, en el espacio de salida como en el de llegada, de manera que existe f^{-1} , y es cont. diferenciable. Se cumple también la relación: $J(f^{-1}) = (Jf)^{-1}$

Problema 1:

Suponga que el sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

$$xyz = -2$$

definen implícitamente a x e y como funciones de z . Calcular $\frac{\partial x}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial z}$.

Solución:

Derivamos el sistema de ecuaciones con respecto a z , obteniendo:

$$2x \frac{\partial x}{\partial z} + 2y \frac{\partial y}{\partial z} + 2z = 0$$

$$yz \frac{\partial x}{\partial z} + xz \frac{\partial y}{\partial z} + xy = 0$$

Usando la regla de Cramer para sistemas de ecuaciones, la solución para $\frac{\partial x}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial z}$ está dada por:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\begin{vmatrix} 2z & 2y \\ xy & xz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ yz & xz \end{vmatrix}} = \frac{x(y^2 - z^2)}{z(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{\begin{vmatrix} 2x & 2z \\ yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ yz & xz \end{vmatrix}} = \frac{y(z^2 - x^2)}{z(x^2 - y^2)}$$

notemos que, si llamamos F a la primera restricción (es decir, $F(x, y, z) = 5$) y G a la segunda ($G(x, y, z) = -2$), tenemos que:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

Problema 2:

Dado el sistema:

$$xy + e^{ux} + 2v = 3$$

$$x + uy - v = -1$$

- (i) Comprobar que existe una vecindad de $p_0 = (0, 1)$ y funciones de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ tales que $u(0, 1) = 0$ y $v(0, 1) = 1$ que resuelven el sistema.

(ii) Para la función u , de la parte anterior, calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 1)$

Solución:

(i) Chequeamos primero que la condición dada satisface el sistema:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 &= 3 \quad \checkmark \\ 0 + 0 - 1 &= -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Se cumple. Ahora, debemos ver si la condición para la existencia de función implícita se cumple. Escribiendo $F = 0$ la primera ecuación, y $G = 0$ la segunda, tenemos:

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \right|_{p_0} = \left| \begin{array}{cc} xe^{ux} & 2 \\ y & -1 \end{array} \right|_{p_0} = -xe^{ux} - 2y|_{p_0} = -2 \neq 0$$

Luego sí se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita.

(ii) Derivamos el sistema con respecto a x :

$$\begin{aligned} y + e^{ux}(u + xu_x) + 2v_x &= 0 \\ 1 + yu_x - v_x &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema, encontrando:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p_0) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\left| \begin{array}{cc} y + ue^{ux} & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} xe^{ux} & 2 \\ y & -1 \end{array} \right|} = \frac{-y - ue^{ux} - 2}{xe^{ux} + 2y} = -\frac{3}{2}$$

Notar que para el jacobiano del numerador, al derivar con respecto a x no ocupamos la regla de la cadena. Para encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, hay dos opciones: Derivar nuevamente el sistema, esta vez respecto a y , o derivar la expresión que ya tenemos. Siguiendo esta última alternativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{1 + u_y e^{ux}(1 + ux)}{xe^{ux} + 2y} - \frac{2 + y + ue^{ux}}{(xe^{ux} + 2y)^2}(2 + u_y x^2 e^{ux}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 1) &= -\frac{1 + u_y}{2} - \frac{6}{4} \end{aligned}$$

Necesitamos u_y . Lo obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(p_0) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\left| \begin{array}{cc} x & 2 \\ u & -1 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} xe^{ux} & 2 \\ y & -1 \end{array} \right|} = \frac{-x - 2u}{xe^{ux} + 2y} = 0$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

Problema 3:

Considere la superficie:

$$-2x^2 + 64x - 4y^2 + 64y + z^2 - 768 = 0$$

¿En que punto no podra ser posible trazar un plano tangente?

Solución:

Podemos escribir la superficie como $F(x, y, z) = 0$. Pensemos que para trazar un plano tangente, necesitamos localmente poder despejar una variable en función de las otras. Es decir, supondremos que F define implícitamente, para vecindades de cada punto, a una de las variables como función de las otras dos. No necesariamente debe ser siempre la misma variable. Pensemos primero que podemos despejar z . Derivando con respecto a x , obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

despejando, obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

De la misma forma obtenemos la derivada con respecto a y . Luego para que z este implícitamente definido por F , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &\neq 0 \\ 2z &\neq 0 \longrightarrow z \neq 0 \end{aligned}$$

(o sea el jacobiano de F distinto de cero). Pero quizas en ese punto, la función define implícitamente a y y no a z . Análogamente, la condición para que esto ocurra es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &\neq 0 \\ -8y + 64 &\neq 0 \longrightarrow y \neq 8 \end{aligned}$$

Con $z = 0$, $y = 8$, F no puede definir implícitamente ni a y ni a z , pero quizas si podría definir a x . La condición para que esto ocurra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &\neq 0 \\ -4x + 64 &\neq 0 \longrightarrow x \neq 16 \end{aligned}$$

Luego el punto donde no podría existir plano tangente es el $(16, 8, 0)$

Problema 4:

Calcular el gradiente de la función escrita en coordenadas cilíndricas:

$$f(\rho, \theta, z) = \ln(\rho) + \theta^2 z$$

Solución: Podríamos reemplazar ρ y θ con su equivalente en cartesianas y derivar, pero eso tendría un desarrollo algebraico terrible. Lo que haremos, es transformar el operador vectorial nabla (∇) de como lo conocemos en coordenadas cartesianas, a coordenadas cilíndricas. Por regla de la cadena, los operadores de cada coordenada son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z}\end{aligned}$$

Como sabemos, x e y se transforman en ρ y θ , mientras que z es independiente de la transformación. Entonces queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

El problema se presenta en las derivadas de ρ y θ con respecto a x e y . A diferencia del cálculo univariado, acá ya no se cumple generalmente que $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$. ¿Como obtenemos las derivadas, entonces? Usaremos acá el teorema de la función inversa. Dadas las transformaciones:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

la matriz jacobiana de la “función transformación” $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, z)$ será:

$$JF = \begin{bmatrix} x_\rho & x_\theta & x_z \\ y_\rho & y_\theta & y_z \\ z_\rho & z_\theta & z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego el jacobiano es igual a $\rho \neq 0$, para todo punto distinto del $(0, 0, 0)$. Entonces, por el teorema de la función inversa, existe una transformación inversa para cualquier vecindad en torno a cualquier

punto distinto del origen. Además, sabemos que:

$$(JF)^{-1} = J(F^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ z_x & z_y & z_z \end{bmatrix}$$

Usando álgebra y el concepto de matrices por bloque, podemos obtener la inversa fácilmente:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, encontramos:

$$\begin{bmatrix} \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ z_x & z_y & z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \frac{1}{\rho} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Comprobar que $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$ no se cumple) Si extraemos los términos necesarios, concluimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Entonces, el operador vectorial nabla, podemos escribirlo en coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \sin \theta \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Recordemos que el vector final esta en coordenadas cilíndricas. Ahora, aprovechando el resultado, simplemente:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{\rho}, \frac{2\theta z}{\rho}, \theta^2 \right)$$

en coordenadas cilíndricas. Es conveniente recordar la expresión del operador $\vec{\nabla}$ en otros sistemas de coordenadas aparte del cartesiano, ya que se ocupa frecuentemente en cálculos de aplicaciones a la física e ingeniería.